ZMA – teorie, vzorce

Obsah

Úvodní přednáška

Množiny

- **Množinu** chápeme jako jednoznačně určenou sadu objektů
- x je prvkem množiny M značíme:

$$x \in M$$

- x není prvkem množiny M značíme:

$$x \notin M$$

- Popsat množinu můžeme **výčtem jejich prvků:**

- $M = \{a,\ b,\ c, \ldots\}$ představuje množinu obsahující prvky a, b, c a případně další prvky (které jsou zadané jistým pravidlem jež je patrné z prvních několika uvedených členů). Např. $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ značí množinu obsahující právě tři prvky 1, 2 a 3.

- $M = \{x \in N \mid A(x)\}$ představuje množinu všech prvků x z množiny N pro něž je výrok $A(x)$ pravdivý. Např. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ je stejná množina jako množina B v předcházejícím bodě.

Operace s množinami

- **Prázdná množina** – množina neobsahuje žádné prvky

$$\emptyset$$

- Množina A **je podmnožinou** množiny B – každý prvek množiny A patří do množiny B

$$A \subset B$$

- Dvě množiny jsou **shodné**, když: $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$. Značíme:

$$A = B$$

- **Průnik** dvou množin je množina obsahující všechny objekty patřící současně do obou původních množin.
  - Co mají společné

$$\cap$$

- **Sjednocení** dvou množin je množina obsahující všechny objekty patřící alespoň do jedné z původních množin.
  - Vše, co aspoň jednou

$$\cup$$

Uspořádané dvojice

Jsou-li x a y prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro jejich **uspořádanou dvojici**. Prvek x (resp. y) nazýváme **první** (resp. **druhou**) **složkou** uspořádané dvojice (x, y).

Jsou-li (x, y) a (u, v) dvě uspořádané dvojice, pak definujeme **rovnost**

$$(x, y) = (u, v) \quad \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x = u \text{ a } y = v.$$

- To platí i o uspořádaných *n*-ticích

Poznámka

Všimněte si, že $\{x, y\}$ je množina shodná s $\{y, x\}$, kdežto uspořádané dvojice (x, y) a (y, x) nejsou stejné (obecně). Přesto lze uspořádanou dvojici zavést pomocí množinových pojmů, např. dvojici (x, y) lze ztotožnit s $\{x, \{x, y\}\}$.

Kartézský součin

Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Tedy symbolicky

$$A \times B := \{(x, y) \,|\, x \in A \text{ a } y \in B\}.$$

Množina $A \times B$ se nazývá **kartézský součin** množin A a B.

Příklad

Pro $A = \{1, 4, 2\}$ a $B = \{\triangle, \rightarrow\}$ platí

$A \times B = \{(1, \triangle), (1, \rightarrow), (4, \triangle), (4, \rightarrow), (2, \triangle), (2, \rightarrow)\}$

Poznámka

$\times$ je nekomutativní operace, tj. $A \times B$ je obecně množina různá od $B \times A$.

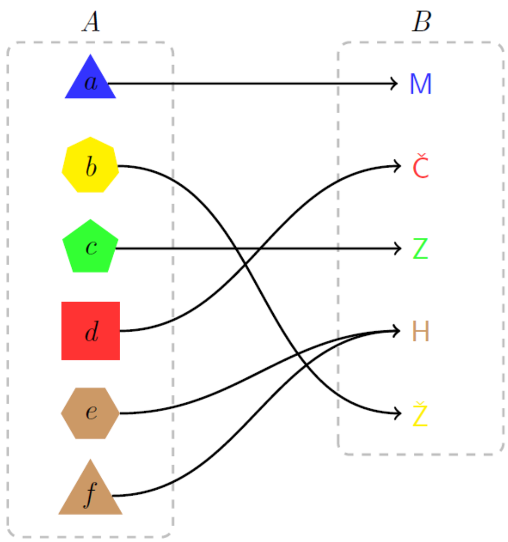
Relace

Definice Relace

- **Relace** $\mathcal{R}$ mezi množinami A a B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.
- Je-li $A = B$, mluvíme o relaci **na množině** A.
- Je-li $(x, y) \in \mathcal{R}$, pak říkáme že x a y **jsou v relaci** $\mathcal{R}$ a zkráceně tento fakt zapisujeme $x\mathcal{R}y$.

Pomocí relací můžeme přesně formalizovat „vztah" mezi různými objekty. Reálné funkce reálné proměnné, kterými se budeme zabývat po zbytek semestru, jsou speciálním příkladem relací.

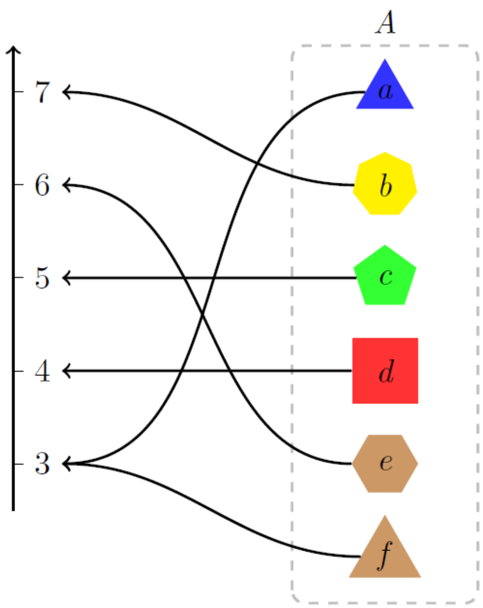
Příklad



$x\mathcal{C}y$: x má barvu y

$$\mathcal{C} \subset A \times B, \quad \mathcal{C} = \Big\{(a, \mathsf{M}),\ (b, \mathsf{Ž}),\ (c, \mathsf{Z}),\ (d, \mathsf{Č}),\ (e, \mathsf{H}),\ (f, \mathsf{H})\Big\}$$

Příklad



$x\mathcal{P}n$: x má n vrcholů

$$\mathcal{P} \subset A \times \mathbb{N}, \quad \mathcal{P} = \Big\{(a, 3),\ (b, 7),\ (c, 5),\ (d, 4),\ (e, 6),\ (f, 3)\Big\}$$

Další příklady relací

- **Ekvivalence**
- **Zobrazení**
- **Uspořádání**

Zobrazení

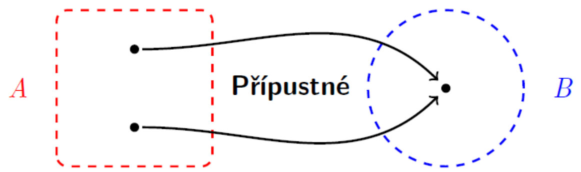
Definice Zobrazení

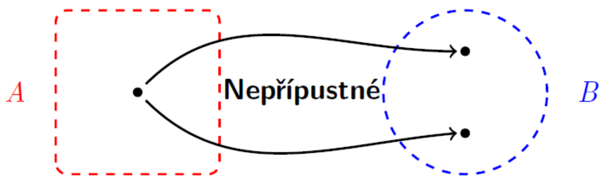
Zobrazení f z množiny A do množiny B je relace mezi množinami A a B s následující vlastností

- pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ tak, že xfy.

Toto zobrazení f značíme $f : A \to B$. Místo xfy píšeme $y = f(x)$ nebo $x \overset{f}{\mapsto} y$.

- Tzn. buď jedno, nebo žádné.





Terminologie spojená se zobrazením

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x, nebo **obraz** x při zobrazení f.
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f.
- Množinu všech $x \in A$ takových, že existuje $y \in B$ splňujících $y = f(x)$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení f. Tedy

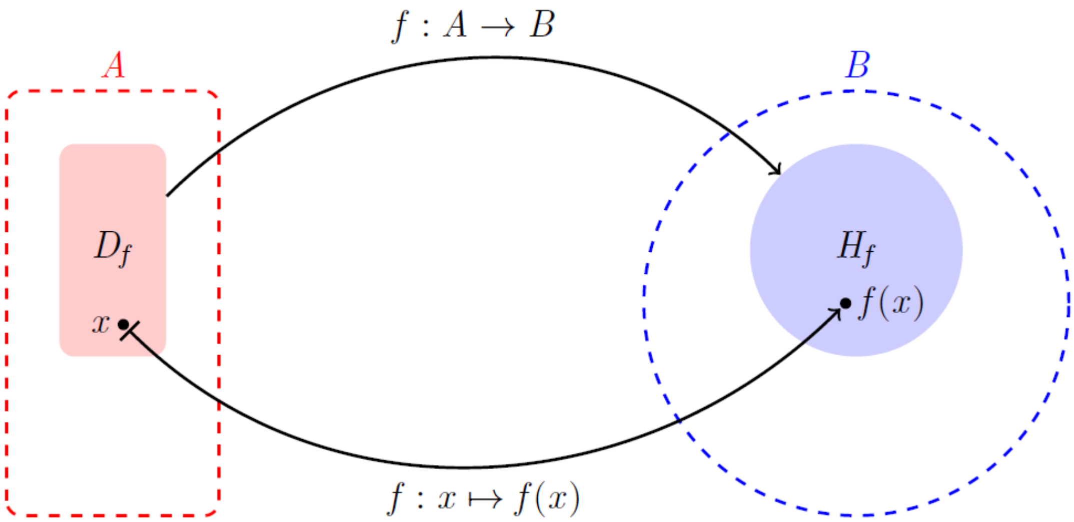
$$D_f = \{x \in A \mid \text{existuje } y \in B \text{ splňující } y = f(x)\}.$$

- Množina všech obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí se H_f. Tedy

$$H_f = \{y \in B \mid \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x)\}.$$

Buďte f a g dvě zobrazení z A do B. f a g jsou relace, tedy množiny. Podmínka jejich rovnosti $f = g$ je ekvivalentní podmínkám

$$D_f = D_g \quad \text{a současně} \quad f(x) = g(x) \text{ pro všechna } x \in D_f.$$



Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$

- Zobrazení $g : A \to B$ s $D_g := M$, kde $M \subset D_f$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení** f **na množinu** M. Zapisujeme $g = f\big|_M$.
- Množinu

  $$f(S) := \{y \in B \,|\, \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y\},$$

  kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny** S **při zobrazení** f.
- Je-li $N \subset B$, potom množinu

  $$f^{-1}(N) := \{x \in D_f \,|\, \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y\}$$

  nazveme **vzorem množiny** N při zobrazení f.

Poznámka

Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(N)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (viz dále).

Složené zobrazení

Definice Složeného zobrazení

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : A \to C$ předpisem

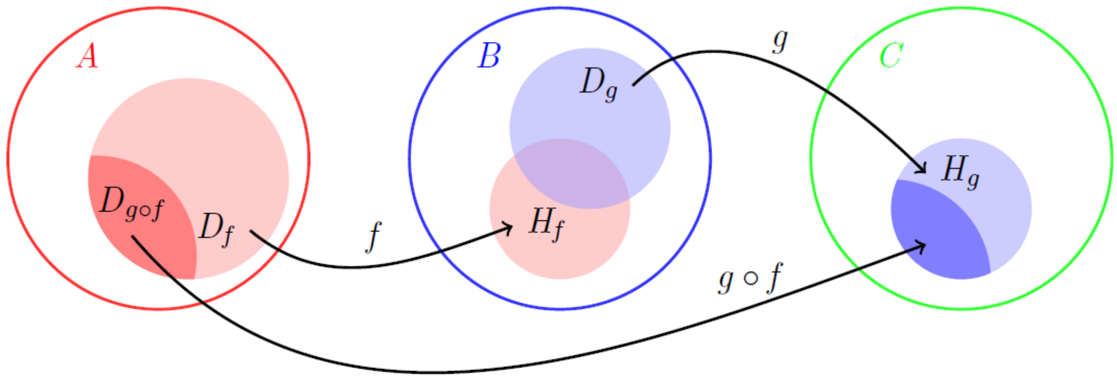
$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \big\{x \in D_f \,\big|\, f(x) \in D_g\big\}.$$

Poznámka

Tedy $D_{g \circ f} \subset D_f$. I v případě, že $D_f \neq \emptyset$ a $D_g \neq \emptyset$ může nastat situace $D_{g \circ f} = \emptyset$.



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x, y \in D_f$, $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté a na.

Příklad identického zobrazení

Buď A množina. Zobrazení $\mathrm{id}_A : A \to A$ definované předpisy

$$D_{\mathrm{id}_A} := A \quad \text{a} \quad \mathrm{id}_A(x) := x,\ x \in D_{\mathrm{id}_A},$$

nazýváme **identické zobrazení**.

Zobrazení id_A je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní.

- Tzn. prosté i na, tedy vzájemně jednoznačné

Inverzní zobrazení

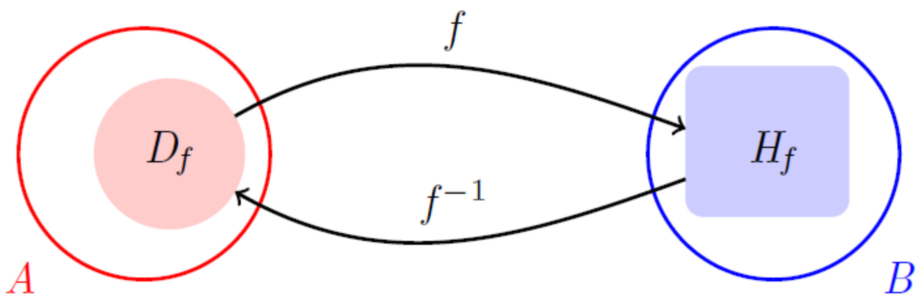
Definice Inverzního zobrazení

Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H_f lze přiřadit právě jedno y z množiny D_f tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení f a značíme f^{-1}.

Poznámka

Z definice ihned plyne, že $f^{-1} : B \to A$ a dále

$$D_{f^{-1}} = H_f, \qquad H_{f^{-1}} = D_f,$$
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{D_f}, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{H_f}.$$



Číselné množiny

- **Přirozená** čísla

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- **Celá** čísla

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- **Racionální** čísla

$$\mathbb{Q}$$

- **Reálná** čísla

$$\mathbb{R}$$

- **Komplexní** čísla

$$\mathbb{C}$$

Platí inkluze $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Reálná čísla

Mezi reálnými čísly existují dvě významné binární operace (tj. zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c), \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & &\text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Připomeňme speciálně, že rovnice $a + x = b$ má jediné řešení $x = b - a$.

Analogicky rovnice $a \cdot x = b$ má pro $a \neq 0$ jediné řešení $x = \frac{b}{a}$.

Uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje relace **uspořádání** na $\mathbb{R}$:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že

$$\begin{aligned} a < b,\ c > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \\ a < b,\ c < 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c. \end{aligned}$$

Intervaly

Pomocí uspořádání definujeme také speciální podmnožiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**, pro $a, b \in \mathbb{R}$ klademe:

otevřený interval	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
uzavřený interval	$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval	$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
analogicky	$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

A neomezené intervaly

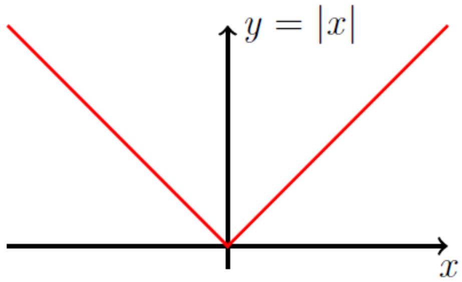
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$$
$$(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$$

Ve všech těchto intervalech je a tzv. **počáteční** bod a b tzv. **koncový** bod intervalu.

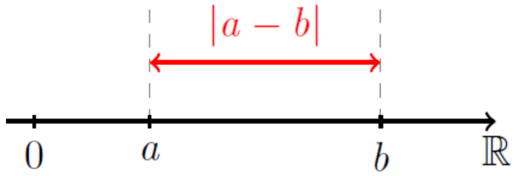
Vzdálenost reálných čísel

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla a předpisem

$$|a| := \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Vzdálenost dvou čísel $a, b \in \mathbb{R}$ je rovna $\left|a - b\right| = \left|b - a\right|$.



Vlastnosti absolutní hodnoty

Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0\,.$$

- Tzv. **trojúhelníková nerovnost**

- Je-li $a + b \geq 0$, pak $|a + b| = a + b < a - b = |a| + |b|$.
- Je-li $a + b < 0$, pak $|a + b| = -a - b < a - b = |a| + |b|$.

Iracionální čísla

- Tuto množinu nelze popsat nijak jednoduše.

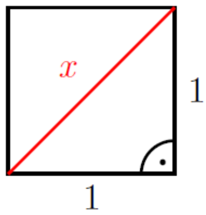
- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

- Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry.“

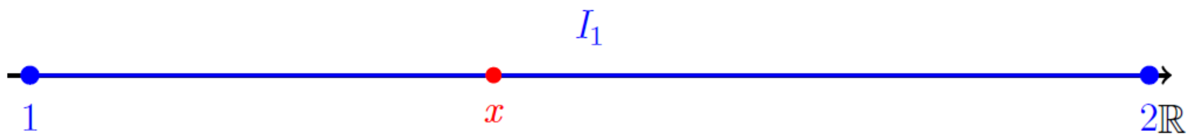
Příklad (na znázornění)

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$.

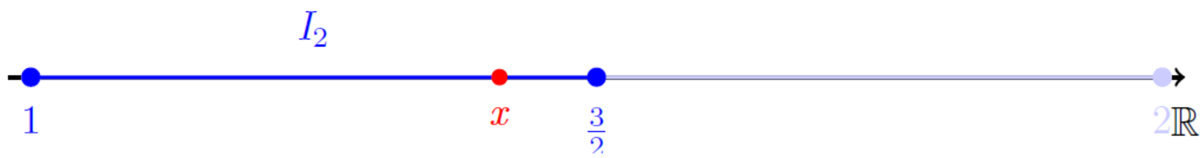
- Motivací této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.



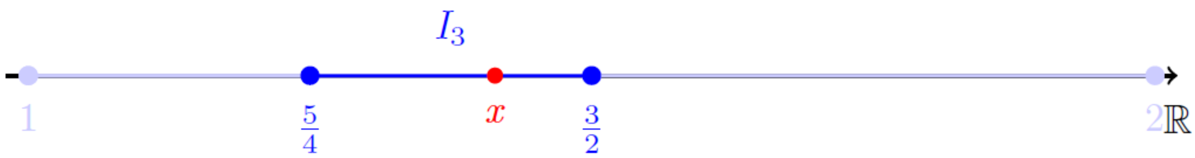
- Pokud řešení existuje, nemůže jím být racionální číslo. Toto tvrzení dokážeme **sporem**.



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2\rangle$.

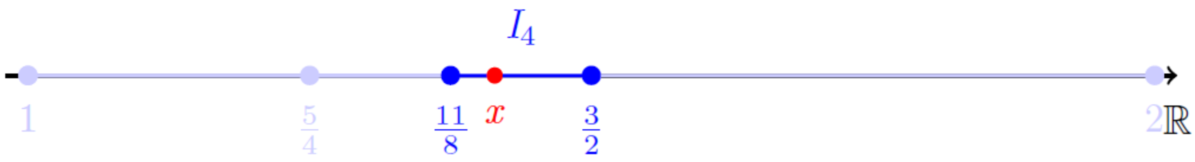


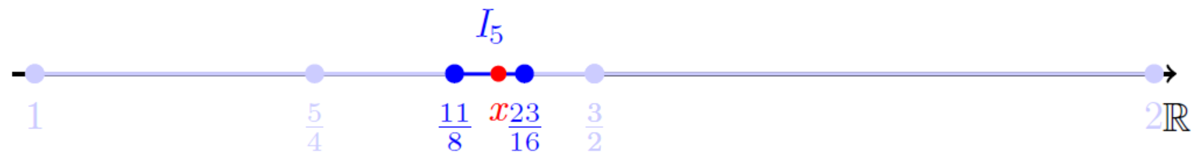
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2}\rangle$.



- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, že $\mathbb{R}$ nemá díry v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{\sqrt{2}\right\}.$$





Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

Přesněji, pokud jsou I_n, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

$$I_n \supset I_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Funkce

Reálná funkce reálné proměnné

Definice Reálné funkce reálné proměnné

Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** nazýváme množinu všech reálných x pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

Příklad

Uvažme výraz $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem je množina

$$D_f = \langle 0,1) \cup (1,+\infty).$$

Takto definovaná funkce je dána relací

$$f = \left\{ \left(x, \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \,\middle|\, x \in \langle 0,1) \cup (1,+\infty) \right\}.$$

Graf funkce

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \{ (x, f(x)) \mid x \in D_f \}.$$

- x je hodnota **nezávisle** proměnné znázorňovaná zpravidla na vodorovné ose a $f(x)$ je hodnota funkce f v bodě x (též hodnota **závislé** proměnné), která se znázorňuje na svislé ose.
- Graf funkce f je podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, který teď chápeme jako rovinu s vyznačeným počátkem (bodem $(0,0)$) a s vodorovnou souřadnou osou
$$\{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \},$$
a svislou souřadnou osou
$$\{ (0,y) \mid y \in \mathbb{R} \}.$$

Příklad paraboly

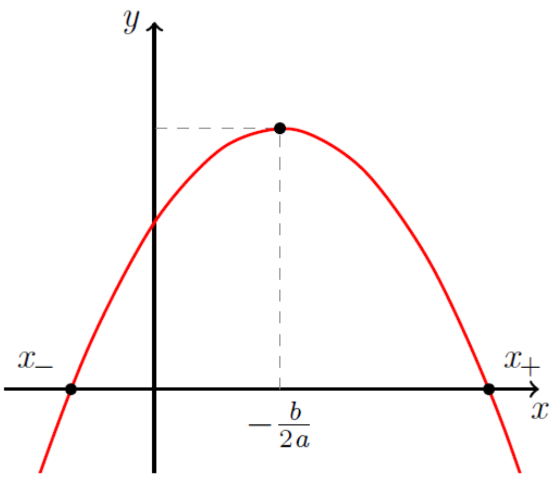
Připomeňme graf paraboly

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Reálné kořeny

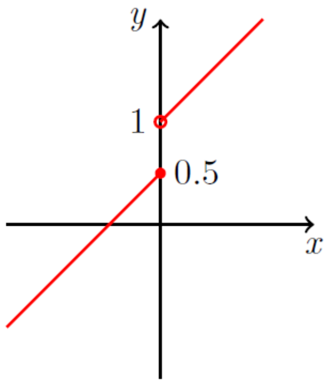
$$x_\pm = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{D} \right),$$

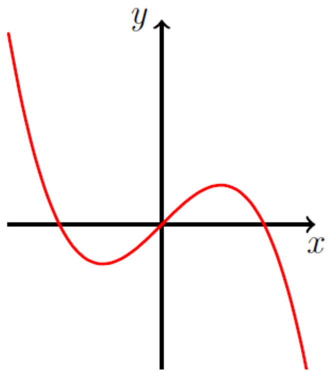
pokud $D = b^2 - 4ab \geq 0$.

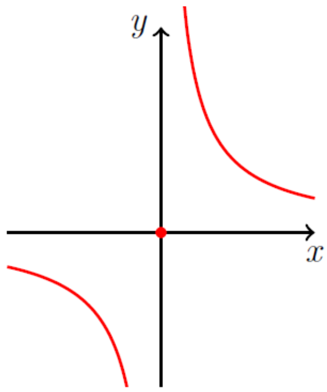


Příklad

Která z následujících funkcí $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ jsou prostá, na, či bijektivní?







$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = x(1 - x^2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1) Prostá
2) Na
3) Prostá i na (tzn. bijektivní)

Definice rostoucí a klesající funkce

Funkce f se nazývá

- **rostoucí na intervalu** I, jestliže

  pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) < f(y)$,

- **klesající na intervalu** I, jestliže

  pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) > f(y)$.

Je-li funkce buď rostoucí nebo klesající na intervalu I, pak se nazývá **monotonní** na intervalu I.

Každá monotónní funkce je prostá.

Příklad

Příkladem rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ je lichá mocnina (a také lichá odmocnina). Funkce $f(x) = x^2$ není na $\mathbb{R}$ ani rostoucí ani klesající, ale je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Důležité funkce

Elementární funkce

- Polynomy
- Exponenciální funkce
- Trigonometrické funkce
- Funkce inverzní k předchozím
    - Odmocniny, logaritmy

- Součty, součiny a podíly předchozích funkcí
    - Racionální lomené funkce
- Složení předchozích funkcí

Mocniny a odmocniny

- Definujeme **přirozenou mocninu** vztahy

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ členů}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x \in \mathbb{R},$$
$$x^0 := 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Dále pro záporná celá čísla n klademe

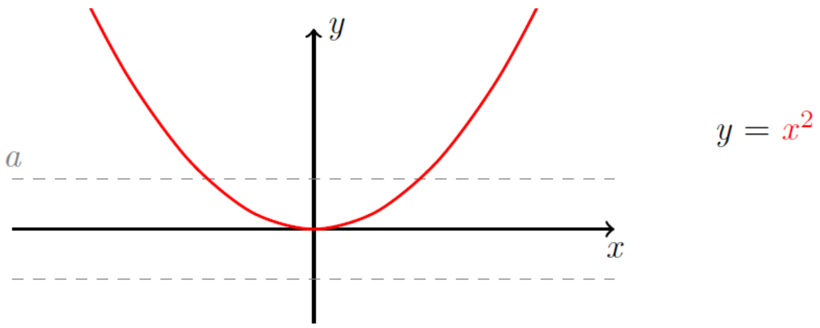
$$x^n := \frac{1}{x^{-n}} \quad \text{pro } x \neq 0,$$

- Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

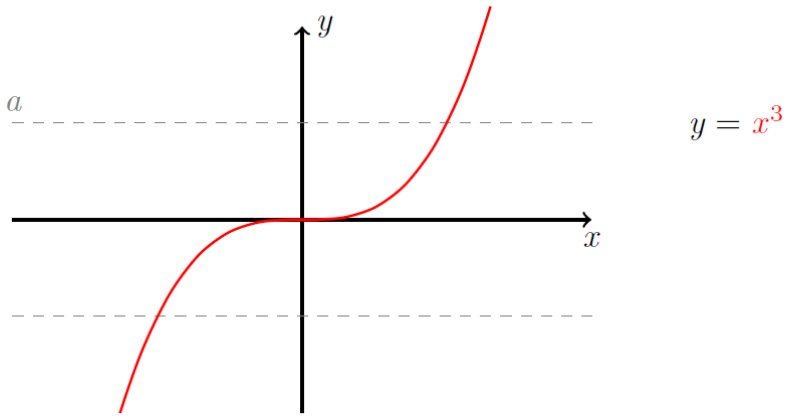
jako reálné řešení rovnice $x^n = a$. Podrobněji:

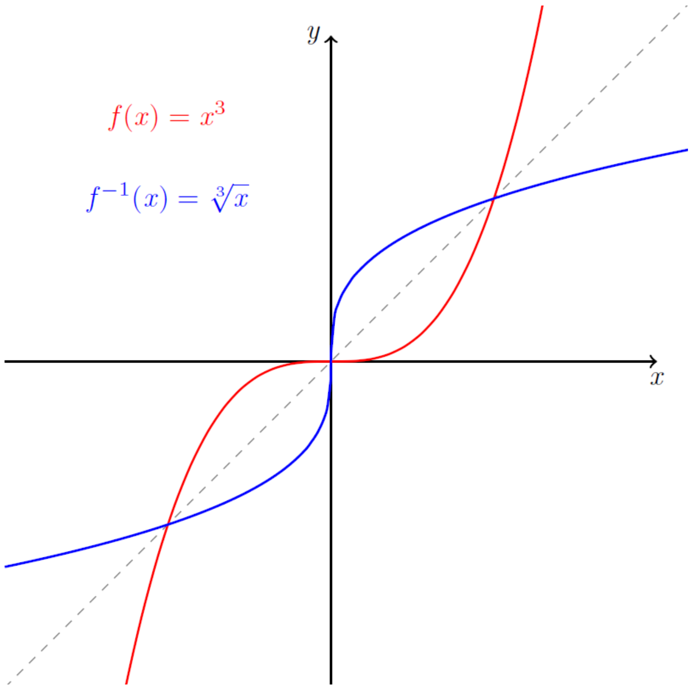
- Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, **sudé**, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice má reálné řešení jen pro $a \geq 0$.



Pro $a > 0$ jsou tato řešení dvě, neboť $x^{2k} = (-x)^{2k}$. Sudou odmocninu $\sqrt[2k]{a}$ definujeme jako nezáporné řešení. Je proto $\sqrt{x^2} = |x|$ a nikoli x, protože nevíme, jestli je x kladné nebo záporné.

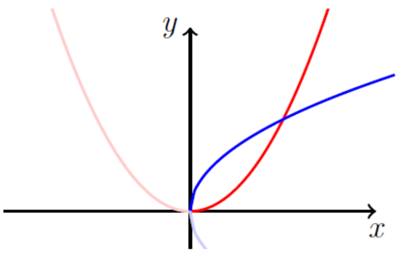
Je-li $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, **liché**, pak rovnice $x^{2k+1} = a$ má jediné řešení, které značíme $\sqrt[2k+1]{a}$. Například $\sqrt[3]{-8} = -2$.





- Vzhledem k této terminologii je lichá odmocnina $f^{-1}(y) = \sqrt[2k+1]{y}$ inverzní funkcí k liché mocnině $f(x) = x^{2k+1}$. Protože $H_f = \mathbb{R}$ (to ale vůbec není zřejmé) je $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

- Sudé mocniny $g(x) = x^{2k}$ nejsou na $\mathbb{R}$ prosté. Ale zúžíme-li definiční obor na interval $\langle 0, +\infty)$ pak funkce $h = g\big|_{\langle 0,+\infty)}$ je již na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí a tedy prostá. Inverzní funkce $h^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ má definičním oborem interval $\langle 0, +\infty)$, protože $H_h = \langle 0, +\infty)$, a je na tomto intervalu rostoucí.



- Doposud definované mocniny mají následující vlastnosti:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

pro taková a, b, x, aby výrazy vlevo i vpravo byly definované.

- Definici mocniny x^a můžeme rozšířit na všechna $a \in \mathbb{R}$ (později ukážeme jak to lze udělat), ale obecně jen pro $x > 0$ a pro $a > 0$ pro $x \geq 0$. Tato obecná mocnina má stejné vlastnosti jak byly uvedeny výše.

- Poznamenejme ještě, že často používáme zápis $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.

Exponenciální a logaritmické funkce

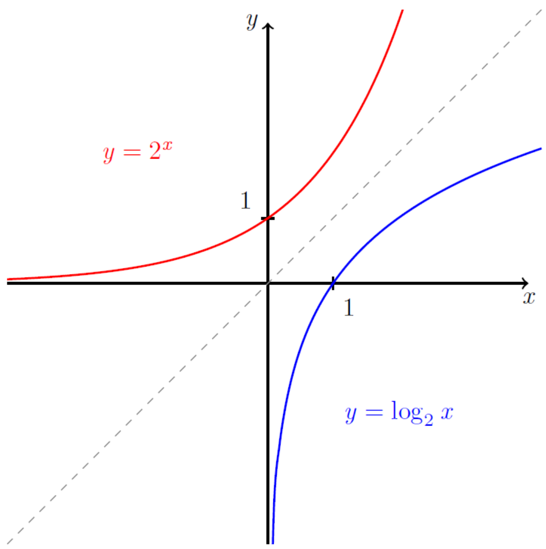
- V předcházejícím bodu jsme mluvili o obecné mocnině jako o funkci $x \mapsto x^a$, tj. s proměnným základem.

- Můžeme také považovat základ za konstantní a exponent za proměnný.

Definice Exponenciální funkce

Pro $b > 0$ se funkce typu $x \mapsto b^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazývá **exponenciální funkce**.

Pro $b > 1$ je funkce $f(x) = b^x$ rostoucí na $\mathbb{R}$ a je $H_f = (0, +\infty)$ (to také není zřejmé). Existuje proto inverzní funkce, která se nazývá logaritmická o základu b – označení $\log_b$.



Platí tedy

$$b^x = y \iff x = \log_b y \quad (b > 1,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0).$$

Funkce $\log_b$ je definovaná a rostoucí (stále $b > 1$) na intervalu $(0, +\infty)$.

Její vlastnosti jsou odvozeny z vlastností exponenciální funkce:

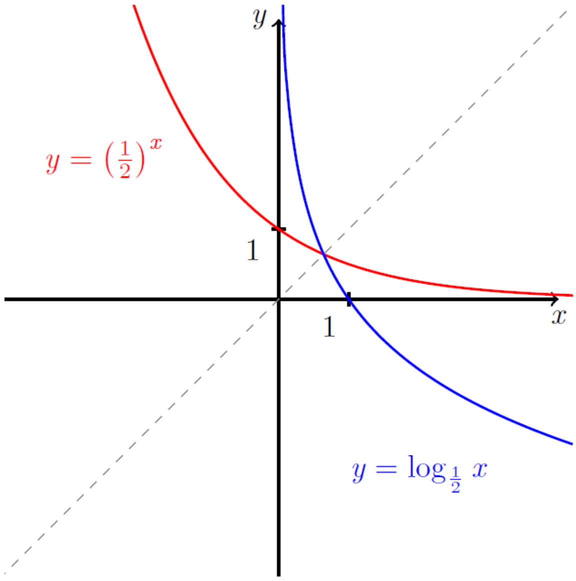
$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y\,, \quad x, y > 0\,,$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y\,, \quad \log_b(x^c) = c \cdot \log_b x\,, \quad x, y > 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

Poznamenejme, že zcela zvláštní místo v matematice má exponenciální funkce se základem e (**Eulerovo** číslo, $e = 2.718\ldots$, je iracionální) o níž bude řeč později. Inverzní funkce k ní se nazývá **přirozený logaritmus** a značí se $\ln$.

Je-li základ exponenciální funkce $b \in (0, 1)$, pak funkce $x \mapsto b^x$ je klesající na $\mathbb{R}$ a inverzní funkce k ní (opět $\log_b$) je definovaná a klesající na intervalu $(0, +\infty)$.



Občas je užitečný převodní vztah mezi exponenciálními funkcemi o různých základech: Pro $a, b > 0$, $a \neq 1 \neq b$, $x \in \mathbb{R}$, je

$$b^x = a^{x \log_a b}\,,$$

jak snadno nahlédneme řešením rovnice $b^x = a^y$ vzhledem k neznámé y je

$$y = \log_a b^x = x \log_a b\,.$$

Podobně (pro stejné hodnoty a, b, x jako výše)

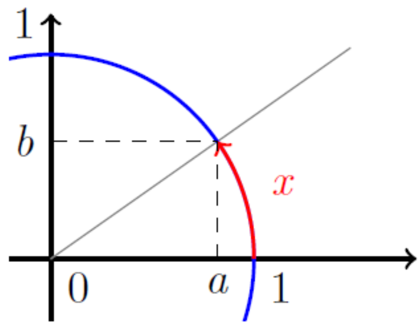
$$\log_a x = (\log_a b)(\log_b x) \,.$$

Poznámka

Ještě poznamenejme, že funkce $x \mapsto x^x$ není ani mocninná ani exponenciální, protože má jak proměnný základ, tak exponent. V souladu s předcházejícím je definovaná takto $x^x = e^{x \ln x}$.

Goniometrické funkce

Funkce **sinus** ($\sin$) a **kosinus** ($\cos$) se zpravidla definují pomocí souřadnic (a, b) bodu v rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ležícího na kružnici o středu v počátku $(0, 0)$ a poloměru 1.



Označíme-li x délku kruhového oblouku od bodu $(1, 0)$ do bodu (a, b) (x je velikost příslušného úhlu v tzv. obloukové míře), pak klademe

$$\cos x := a \;, \;\; \sin x := b \,.$$

Tím jsou definovány funkce $\cos$ a $\sin$ pro $x \in \langle 0, 2\pi)$ (2π je délka příslušné kružnice).

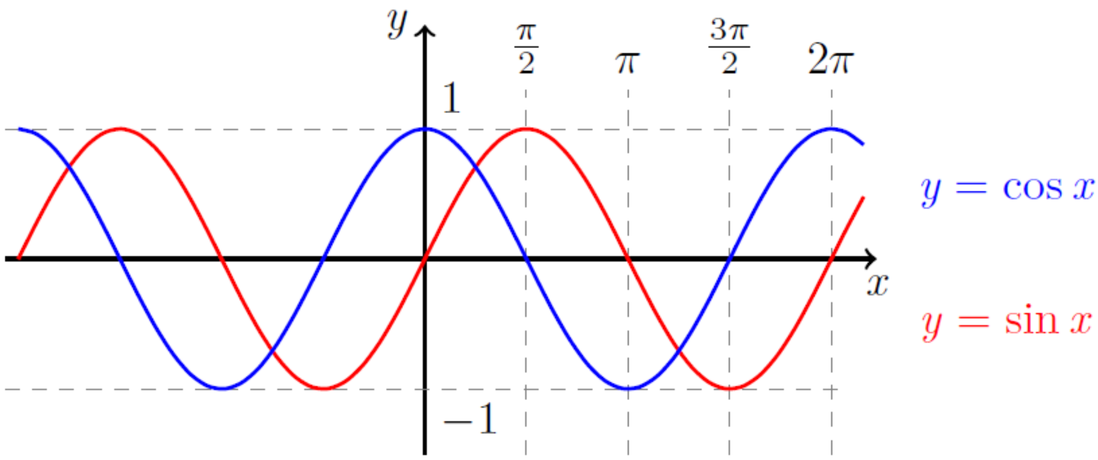
Z Pythagorovy věty (zde $a^2 + b^2 = 1$)
ihned plyne veleznámý vztah

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \,.$$

Funkce sinus a kosinus lze 2π-periodicky rozšířit, tj. klademe

$$\cos x = \cos(x - 2k\pi) \;, \quad \sin x = \sin(x - 2k\pi)$$

pro $x \in \langle 2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Poznámka

Je dobré znát hodnoty funkcí sinus a kosinus aspoň pro několik dalších význačných úhlů: $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/4$.

Tabulky

Stupně	Radiány	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
0	0	0	1	0	$-$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	0

	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 45^0$	$\alpha = 60^0$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
$\mathrm{arc}\,\alpha$ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Ještě budeme používat funkce **tangens** (tg) a **kotangens** (cotg), které mají periodu π a definujeme je pomocí podílů

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right),$$

$$\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, (k+1)\pi\right).$$

Matematická indukce

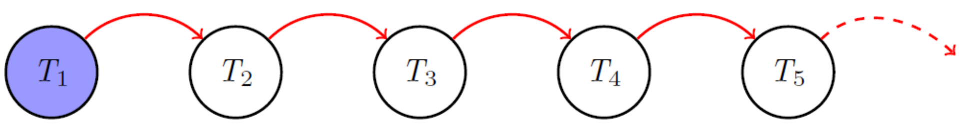
Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných kladnými přirozenými indexy $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Důkaz se provede ve dvou krocích:

i) Dokaž první tvrzení, zde T_1.

ii) Pro libovolné přirozené n dokaž tzv. **indukční krok**:

pokud platí T_n, pak platí T_{n+1}.

Schéma indukce:



Příklad Cvičení (1.10)

Příklad 1.10: Dokažte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, matematickou indukcí.

1. krok Pro $n = 1$ zjevně platí

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1.$$

2. krok Předpokládejme platnost formule pro n. Potom

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Příklad Cvičení (1.11)

Příklad 1.11: Dokažte

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Řešení. Důkaz samozřejmě provedeme matematickou indukcí. První krok je zřejmý. Nechť nyní formule platí pro n. Ukážeme její platnost pro $n+1$.

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= a(a^n - b^n) + ab^n + b(a^n - b^n) - ba^n = (a+b)(a^n - b^n) + ab^n - ba^n = \\
&= \{\text{indukční přepoklad}\} = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1}(a^{i+1}b^{n-1-i} + a^i b^{n-i}) + ab^n - ba^n = \\
&= (a-b)\left(\sum_{i=1}^{n} a^i b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i}\right) + ab^n - ba^n \\
&= 2(a-b)\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} - (a-b)b^n - (a-b)a^n + ab^n - ba^n \\
&= 2(a-b)\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} - (a^{n+1} - b^{n+1})
\end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}.$$

Číselné posloupnosti

Definice pojmu posloupnosti

Definice Posloupnosti

Zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$, jehož definiční obor je nekonečná množina, nazýváme **reálná posloupnost**.

Poznámka

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a \subset \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-**tým členem posloupnosti** a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o **indexu**.
2. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem (a_n).

- Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že zkoumaná posloupnost (a_n) je definovaná na celém $\mathbb{N}$. Lze ji totiž vždy „přečíslovat“.
- Pokud chceme explicitně vyznačit jakou množinu index probíhá, píšeme např.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{nebo} \quad (a_n)_{n\in J},$$

je-li indexovou množinou $J \subset \mathbb{N}$.

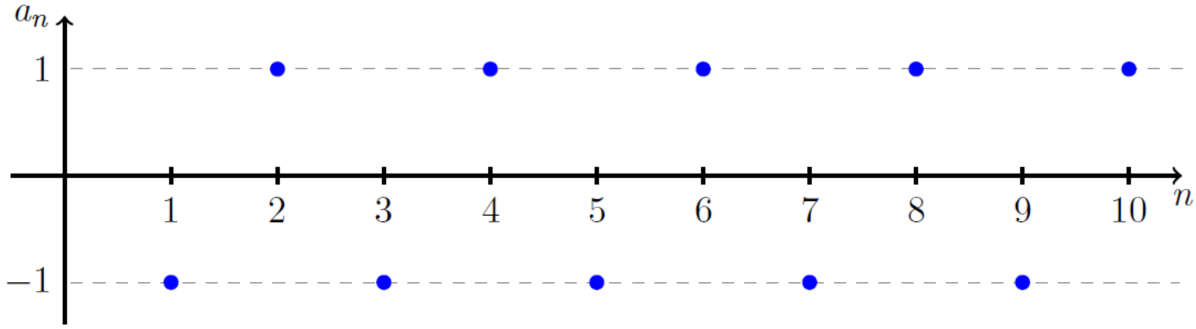
Příklad

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovovanou předpisem $a(n) := (-1)^n$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = ((-1)^n).$$

- Oborem hodnot a je množina obsahující pouze **dva** prvky, $\{-1, 1\}$.



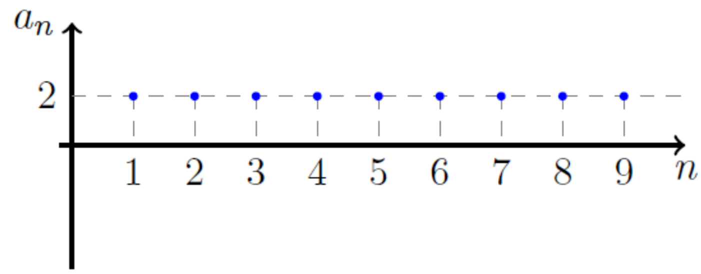
Vlastnosti posloupností

- (a_n) je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- (a_n) je **neklesající** (resp. **nerostoucí**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$),
- (a_n) je **monotonní** pokud je nerostoucí nebo neklesající.

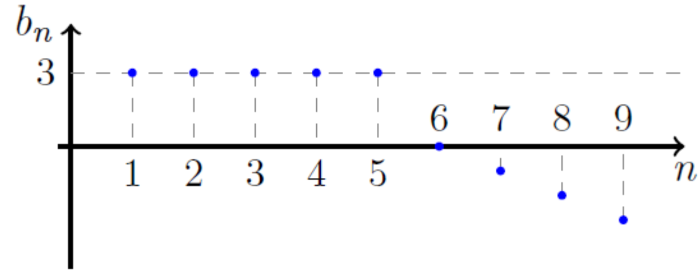
Příklad

Diskutujte vlastnosti následujících posloupností.

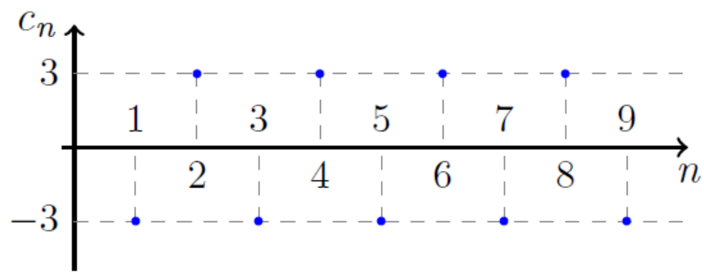
$$a_n = 2$$



$$b_n = \begin{cases} 3, & n \leq 5 \\ 6 - n, & n > 5 \end{cases}$$



$$c_n = 3(-1)^n$$

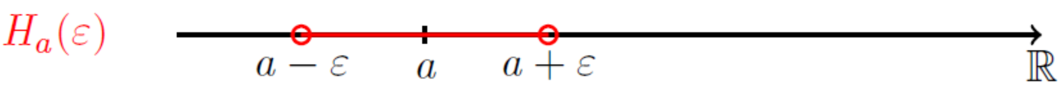


Důležité podmnožiny R a rozšířená reálná osa

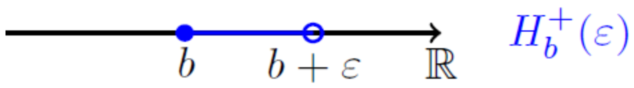
Okolí bodu a v R

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a(\varepsilon)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$.



Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.



Okolí a rozšířená reálná osa

Definice

Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c, +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu** $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_\infty(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

- Není-li potřeba specifikovat velikost okolí, píšeme zkráceně H_a, $H_{+\infty}$, $H_{-\infty}$.
- Okolí bodu a jsme definovali pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$, avšak toto okolí je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$.

Limita číselné posloupnosti

Definice Limity číselné posloupnosti

Řekneme, že reálná posloupnost (a_n) má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro každé okolí H_α bodu α lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než n_0 platí $a_n \in H_\alpha$. V symbolech

$$(\forall H_\alpha)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n \in H_\alpha).$$

Tuto skutečnost zapisujeme několika možnými způsoby:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \to \alpha.$$

Poznámky k definici limity

- Ekvivalentní definici dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.
- Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat:
  Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále $a_n \in H_\alpha$ znamená $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

- Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ dostáváme podmínku

$$\big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n > c\big).$$

- Udejte podmínku pro $\alpha = -\infty$.

- Dokázat tvrzení „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$" znamená ke každému okolí H_α, určenému parametrem ε nebo c, nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n \in H_\alpha$ pro všechna $n > n_0$.
- Posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když v každém okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti (a_n) až na konečný počet výjimek.
- K tomu aby $\lim a_n = \alpha$ ale nestačí, aby v každém okolí bodu α leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti (rozmyslete).

Věta o Jednoznačnosti limity

Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Elementární limity

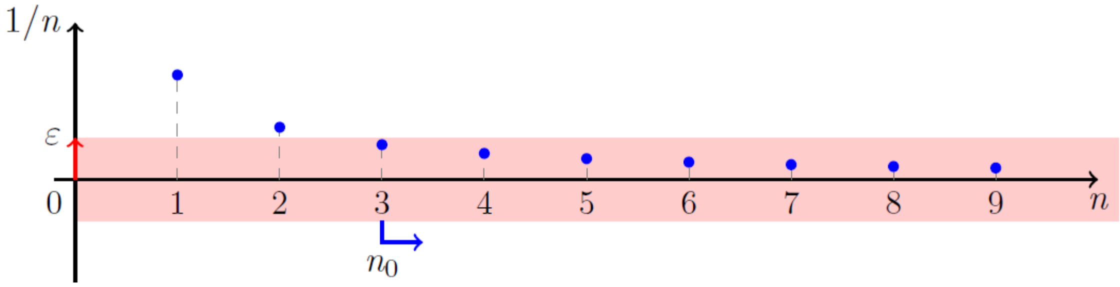
Příklad

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.



Příklad

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$ je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad

Limita posloupnosti $a_n = n^2$ je $+\infty$.

Buď $K > 0$ libovolné. Zvolíme-li přirozené $n_0 > \sqrt{K}$, pak pro každé $n > n_0 = \sqrt{K}$ platí $a_n = n^2 > K$.

Konvergence a divergence

Definice Konvergence a Divergence posloupnosti

Buď (a_n) posloupnost. Pokud má limitu $\alpha \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Příklad

Na základě výsledků předchozích příkladů dostáváme:

- posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je konvergentní,
- libovolná konstantní posloupnost je konvergentní,
- posloupnost (n^2) je divergentní.

Výpočet limity

Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti (a_n) je úspěšné provedení dvou kroků:

1. Uhodni kandidáta na limitu, ozn. $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Pomocí definice dokaž, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

- Další nástroje pro výpočet limity v kapitole Věty o posloupnostech.

Velmi často je nám však hodnota limity (pokud vůbec existuje) **neznámá**. Typicky je její případná hodnota právě to, co hledáme. Vyvstává proto přirozená otázka:

> *Lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti (a_n) pouze na základě znalosti jejích členů?*

- Ano, viz Věty o posloupnostech.

Vybrané posloupnosti

Definice Vybrané posloupnosti

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost (a_{k_n}) nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n). Posloupnost (a_{k_n}) nazýváme také **podposloupností** posloupnosti (a_n).

Příklad

Posloupnost (1) je vybraná z $((-1)^n)$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

Poznámka

Členy posloupnosti (k_n) udávají, které členy vyberu z (a_n).

Příklad

Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$.

- Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z (a_n). Ano, stačí volit rosotucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$.
- Posloupnost (2) není vybraná z (a_n). Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$, ale (k_n) není rostoucí.

Je důležité si povšimnout, že při výběru členů musíme zachovat jejich pořadí v původní posloupnosti. To je přesně vyjádřeno podmínkou na (k_n).

Věta O limitě vybrané posloupnosti

Nechť posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z (a_n) má také limitu α.

Příklad

Platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)$ a již víme, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Důsledek

Lze-li z posloupnosti (a_n) vybrat dvě podposloupnosti s **různými** limitami, pak limita původní posloupnosti (a_n) neexistuje.

Příklad

Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

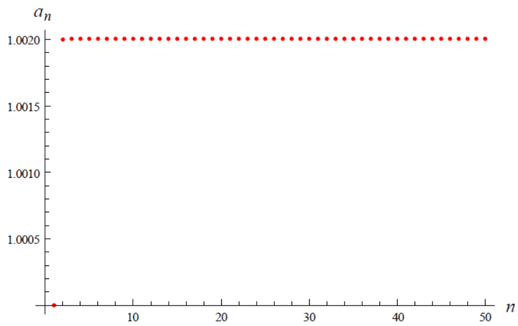
Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n-1$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Potom obě vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

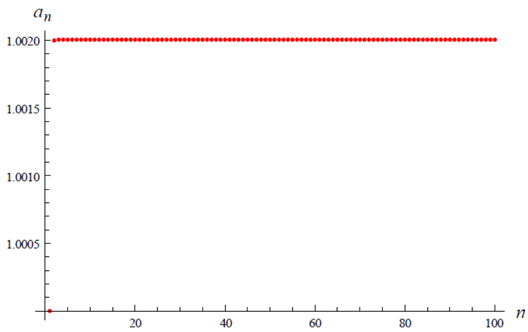
$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1.$$

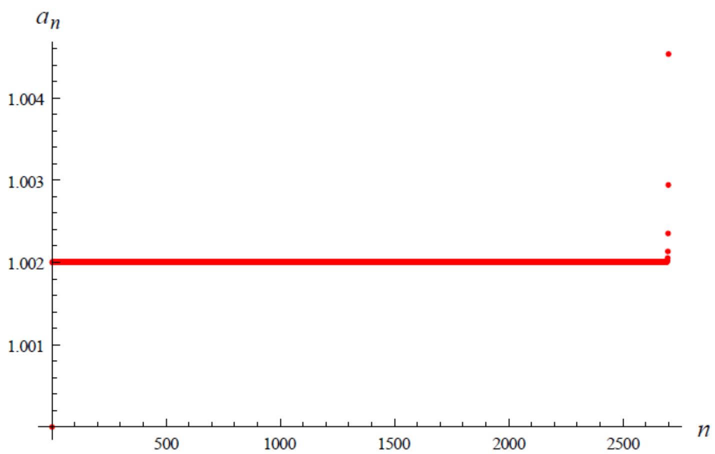
Příklad

Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$







Věty o posloupnostech

Kritéria konvergence

Připomenutí

- Axiom úplnosti

Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\langle a_n, b_n \rangle \supset \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Hromadný bod

Definice Hromadného bodu

Bod $x \in \mathbb{R}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti (a_n) právě, když v **každém** okolí H_x bodu x leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n).

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti?

- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, pak α je zřejmě hromadným bodem (a_n).
- I když má posloupnost právě jeden hromadný bod, limita posloupnosti nemusí existovat.

Příklad

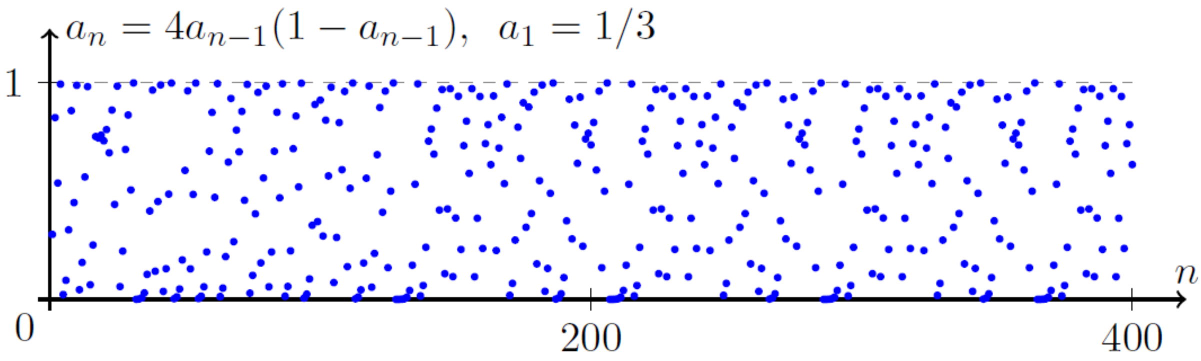
- Posloupnost (a_n) zadaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}, \end{cases}$$

  má hromadný bod 0, ale nemá limitu.
- Bod 0 je hromadným bodem i limitou posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Narozdíl od limit může mít zadaná posloupnost více hromadných bodů. Např. posloupnost $((-1)^n)$ má hromadné body 1 a -1.

Bolzanova-Weierstrassova věta

- Každá konvergentní posloupnost je omezená.
- Opak neplatí. Má každá omezená posloupnost aspoň hromadný bod?
- Představíme-li si omezenou a chaoticky se chovající posloupnost (a_n), může být překvapivé, že odpověď na otázku je **kladná**.



Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Věta O limitě monotónní posloupnosti

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Příklad

Zkoumejme limitu posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Tato posloupnost je očividně rostoucí. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme z ní posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \cdots + \frac{1}{2^j+2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost (b_n), a tedy i (a_n), není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka.

Bolzano-Cauchyho věta

Posloupnost (a_n) je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Podílové kritérium

Na tomto místě je vhodné připomenout postačující podmínku pro konvergenci probíranou na cvičení a to tzv. **podílové kritérium**. Buď (a_n) posloupnost **kladných** čísel a nechť existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

označme její hodnotu symbolem q. Potom

- pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$,
- pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

Příklad

Vypočtěte $\lim_{n \to +\infty} \frac{10^n}{n!}$.
Protože

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{10}{n+1} = 0$$

je původní zkoumaná limita rovna taktéž 0.

Algebraické operace na rozšířené reálné ose

Definice operací na rozšířené reálné ose

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, v závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,
- $a < +\infty$: $\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Poznámka

Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě že výraz na pravé straně je definován. Klademe $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Nedefinované výrazy

$$\pm\infty - \pm\infty, \quad \pm\infty + \mp\infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0} \text{ pro } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Věty o limitách

Věta

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Poznámka

Všimněte si, že aby podíl $\frac{a}{b}$ byl definován, musí být $b \neq 0$. Odtud již plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $b_n \neq 0$. Má tedy smysl zkoumat limitu posloupnosti (a_n/b_n).

Postup řešení příkladů

- Vytknu nejvyšší exponent
- Zkrátím
- Využiji výše definovaná pravidla a elementární limity

Příklady

Vypočtěte

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3}$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}$.

1) -2
2) 0
3) –infinity

Věta

Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\alpha|,$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

Věta

Nechť (a_n) je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Příklad

Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n.$$

- Výsledek: 1
- Nápověda (potup): Rozšířit -> tím se zbavit odmocniny v čitateli -> vytknout z odmocniny ve jmenovateli n^2 -> zkrátit n

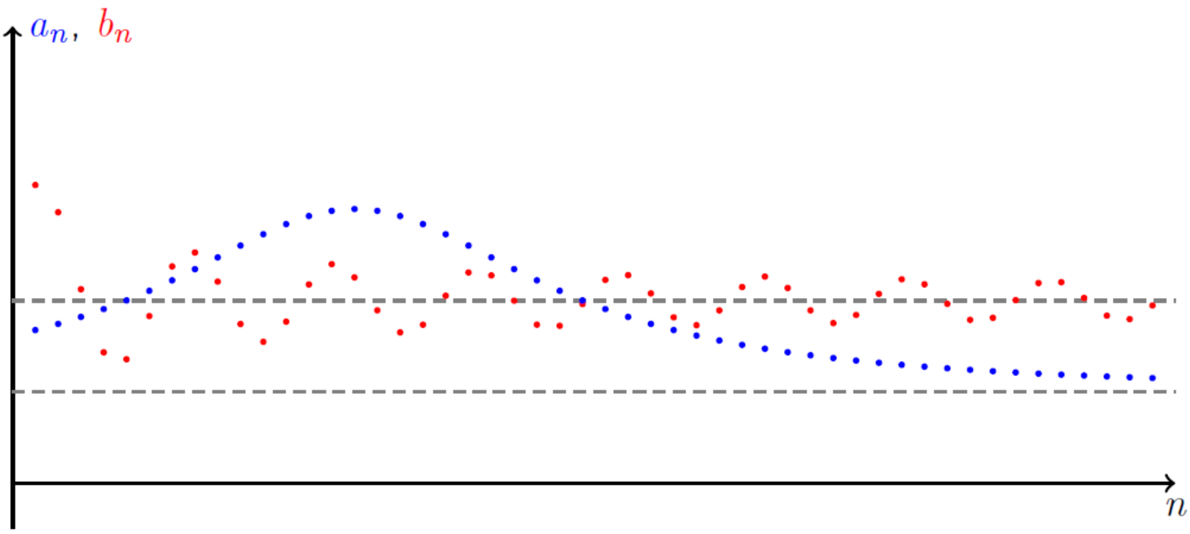
Nerovnosti limity

Věta

Nechť reálné posloupnosti (a_n) a (b_n) mají limity v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud

$$\lim a_n < \lim b_n$$

potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ platí $a_n < b_n$.



Důsledek

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Poznámka

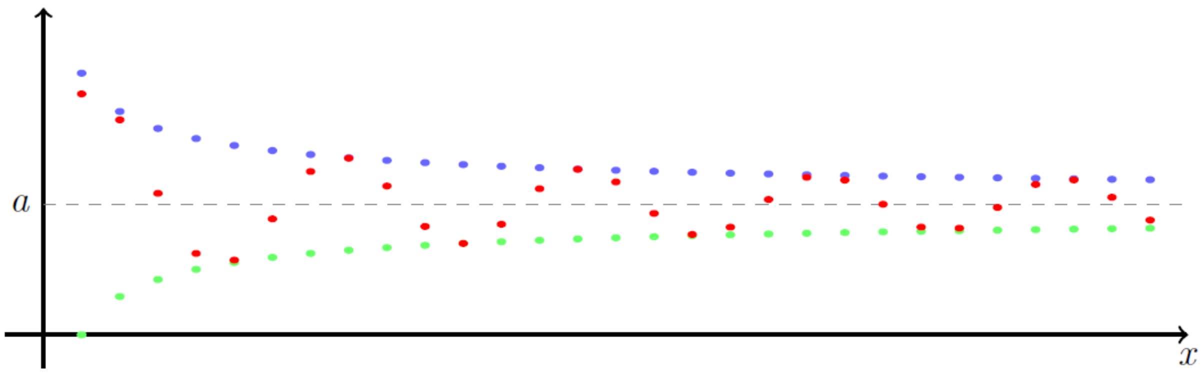
Všimněte si, že neostrost nerovnosti je zde důležitá. Například, pro $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$ platí ostrá nerovnost $a_n > b_n$ pro každé přirozené n, ale $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Věta O sevřené posloupnosti

Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou reálné posloupnosti pro které platí

1. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0)(a_n \leq b_n \leq c_n)$
2. posloupnosti (a_n) a (c_n) mají stejnou limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Potom existuje limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim b_n = \alpha$.



Příklad

Vypočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Funkce $\sin$ má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1 \rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ je podle předchozí věty

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Využití posloupností

Elementární limity

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Pro každé $a \in \mathbb{R},\ a > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti (a^n) platí:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \le -1. \end{cases}$$

- **Jednoduché případy**: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $\left((-1)^n\right)$ neexistuje.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

  $$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

  Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)$ je tedy klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|a^n\right|$.

  Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

  $$L = \lim_{n\to+\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to+\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

  Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Případ** $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že (a^n) je rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim_{n\to+\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí

$$L = \lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to+\infty} a^n = a \cdot L.$$

  Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $(a^{2n}) = \left((a^2)^n\right)$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim_{n\to+\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

Limitu vybrané posloupnosti $(a^{2n+1}))$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to+\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to+\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim_{n\to+\infty} a^n$, tedy neexistuje.

Shrnutí limit

posloupnost	limita
(n^a)	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$(\sqrt[n]{n})$	1
$(\sqrt[n]{a})$ pro $a > 0$	1
$(\sqrt[n]{n!})$	$+\infty$
(a^n)	$\begin{cases} 0, & \lvert a\rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \le -1. \end{cases}$

Rekurentně zadané posloupnosti

Poznámka

Doposud jsme se v příkladech setkávali pouze s explicitině zadanými posloupnostmi, tj. pro dané n bylo a_n explicitně dáno pomocí vzorce obsahujícího pouze n. Pokud je n-tý člen posloupnosti zadán pomocí předcházejících členů, nazýváme danou posloupnost **rekurentní**. Rekurentní posloupnost nemusí být možné převést na explicitně zadanou.

Příklad

Uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \text{ pro } n = 2, 3, 4, \dots .$$

Nejprve si všimněme, že kdyby limita posloupnosti existovala (označme ji a), pak z definičního vztahu plyne

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 2} = \sqrt{a + 2}.$$

Tento vztah je v $\overline{\mathbb{R}}_+$ splněn buď pro $a = 2$ nebo $a = +\infty$. První možnost by nastala v případě omezenosti (a_n), druhá v případě neomezenosti.

Pokusme se nejprve ukázat, že (a_n) je monotónní. Zřejmě $a_n > 0$, $n \geq 1$, a tedy

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad &\iff \quad a_n^2 < a_n + 2 \quad \iff \quad 0 < (2 - a_n)(a_n + 1) \\ &\iff \quad a_n < 2. \end{aligned}$$

Posloupnost roste, právě když $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tuto nerovnost můžeme dokázat matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$: $a_n = 1 < 2$ platí z definice.
2. Předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, platí $a_n < 2$: Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \overset{\text{I.P.}}{<} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Závěr: Ukázali jsme, že posloupnost (a_n) je rostoucí a shora omezená. Má tedy konečnou limitu, která je nutně rovna 2.

Číselné řady

Definice Číselné řady

Formální výraz typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě. **Součtem** konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim_{n \to +\infty} s_n$.

Příklad

Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \qquad \text{(platí pro lib. } q \neq 1\text{)}$$

Takže pro $|q| < 1$ dostáváme $\lim_{n \to \infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. Píšeme také

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \,.$$

Věta (Nutná podmínka konvergence)

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, potom pro limitu sčítanců platí $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

- Tuto větu lze použít k vyvrácení konvergence řady
- Tato podmínka je pouze nutná, jak demonstruje následující příklad

Příklad

Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, pro $k = 1, 2, \ldots$. Víme již, že platí

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Zkoumaná řada diverguje.

Věta (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium)

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Definice Absolutní konvergence

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta

Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Věta (Leibnizovo kritérium)

Buď (a_n) monotónní posloupnost kladných členů konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

konverguje.

Příklad

Podle Leibnizova kritéria je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

konvergentní. Ale není absolutně konvergentní. Z dřívější přednášky již víme, že $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverguje.

Věta (Srovnávací kritérium)

Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí odhad $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

Věta (d'Alembertovo kritérium)

Buďte $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro všechna $k \in \mathbb{N}$ od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

pak řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

- K splnění podmínky d'Alembertova kritéria například stačí, když

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = q < 1.$$

- Podobným způsobem můžeme dále nahlédnout, že pokud všechna a_k jsou kladná a
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q > 1$$
pro $k \geq k_0$, potom řada
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
diverguje.

Příklad (Desetinný rozvoj)

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$. Potom klademe
$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$
Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě
$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$
Řada $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje, její součet je $\frac{10}{9}$.

Eulerovo číslo *e*

Uvažme řadu
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$
Jedná se o řadu nezáporných členů pro něž platí
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$$
Podle d'Alembertova kritéria proto řada konverguje.

Poznámka

Konvergenci této řady můžeme ukázat i přímo. Posloupnost jejích částečných součtů[a]

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

je monotónní a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Tímto postupem získáváme i horní odhad hodnoty její limity. Součet zkoumané řady tedy leží mezi čísly 1 a 3.

- Do konce této kapitoly bude symbol s_n vyhrazen pro tento součet.

Definice Eulerova čísla

Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

konverguje, její součet značíme e a nazýváme **Eulerovým číslem**.

Alternativní vyjádření Eulerova čísla

Při výpočtech limit často narazíme na potřebu vypočíst limitu posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lemma

Posloupnost (a_n) konverguje a její limita je e. Tedy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Poznámka (Častá chyba)

Pozor, ačkoliv v limitě

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

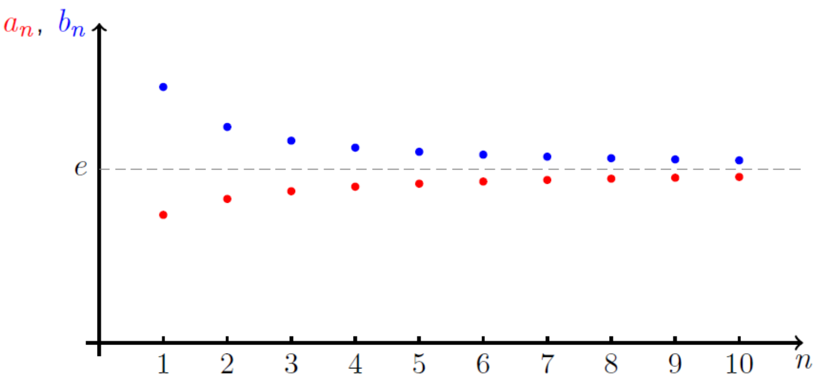
výraz v závorce konverguje k 1, $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1$, a konstantní posloupnost 1^n konverguje k 1, **není tato limita rovna** 1!

Poznámka

Z vlastností posloupností (a_n) a (b_n) je zřejmé, že nerovnosti

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n$$

platí pro každé kladné přirozené n. Jinak řečeno $e\in(a_n,b_n)$ pro každé $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Tato vlastnost nám umožňuje získat přibližnou hodnotu čísla e a **znát chybu**, které se dopustíme nahradíme-li e hodnotou některého členu a_n, či b_n pro konkrétní n.



- Čísla nekonvergují k *e* příliš rychle

Poznámka

Skutečně, pro délku intervalu (a_n,b_n) platí

$$\begin{aligned}b_n-a_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\\&=\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\cdot b_n=\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\cdot b_n>\\&>\frac{e}{n+1}>\frac{2}{n+1}.\end{aligned}$$

Tedy ani po výpočtu a_{1000} a b_{1000} neznáme cifru na **třetím** místě za desetinnou čárkou v Eulerově čísle e.

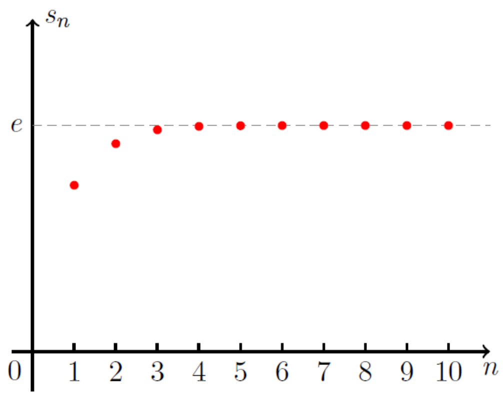
*Lemma (Odhad chyby při výpočtu **e** pomocí řady)*

Pro rozdíl e od s_n (definice pomocí řady) platí

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Poznámka

Prvních deset členů posloupnosti s_n. Výpočet je proveden s přesností na 8 cifer. Uvádíme i grafické znázornění.



Exponenciální funkce

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

1. Klademe $a^0 := 1$.
2. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$ a $a \neq 0$, definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$.
3. Je-li $q \in \mathbb{N}$ a $a > 0$ položíme $a^{\frac{1}{q}} := b$, kde $b^q = a$, $b > 0$ (takové b existuje zřejmě právě jedno).
4. Konečně, pro $p \in \mathbb{Z}$, kladné $q \in \mathbb{N}$ a $a > 0$ klademe

$$a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Stále platí pravidla $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ a $(a^r)^s = a^{rs}$ pro $a > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$.

Zbývá ukázat, jak definovat a^x pro iracionální x.

Lemma (Iracionální exponent)

Pro dané iracionální x existují posloupnosti (α_n) a (β_n) takové, že $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, (α_n) je rostoucí, (β_n) je klesající a obě mají limitu x.

Definice Iracionálního exponentu

Pro iracionální x a $a > 0$ položíme

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n},$$

kde (α_n) a (β_n) jsou posloupnosti z předchozího Lemmatu.

Poznámka

Všimněte si, že pro racionální r a s splňující $r < s$ a kladné $a > 1$ platí

$$a^r \leq a^s.$$

Odtud plyne, že (a^{α_n}) je rostoucí, (a^{β_n}) je klesající a platí $a^{\alpha_n} \leq a^{\beta_n}$ pro každé n. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existují konečné limity

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} \leq \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n}.$$

Dále lze ukázat, že tyto limity jsou shodné a nezávisí na volbě posloupností (α_n), (β_n). Případ $a < 1$ se ověří podobně.

Logaritmus

Poznámka

Pro $a > 0$ je funkce $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f_a(x) := a^x$ s $D_{f_a} = \mathbb{R}$

- rostoucí pokud $a > 1$,
- klesající pokud $0 < a < 1$,
- konstantní pokud $a = 1$.

Vyjma posledního případu je $H_f = (0, +\infty)$. Stále platí $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ a $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$.

Definice logaritmu

Buď $0 < a \neq 1$, pak inverzní funkci k funkci f_a nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$. Platí

- $D_{\log_a} = (0, +\infty)$, $H_{\log_a} = \mathbb{R}$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $x, y > 0$,
- $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$, $x > 0$ a $y \in \mathbb{R}$.

Exponenciála a přirozený logaritmus

Definice Exponenciály a přirozeného logaritmu

Funkci $x \mapsto e^x$ nazýváme **exponenciální funkcí**, logaritmus o základu e nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme $\ln = \log_e$.

Poznámka

Exponenciální funkce a přirozený logaritmus jsou jedny z nejdůležitějších funkcí vůbec. Všimněte si, že přímo z jejich definice plyne pro $a > 0$ důležitý vztah $a = e^{\ln a}$ a proto

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Poznámka

Platí $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Limita funkce

Vlastnosti funkcí

Opakování

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že funkce f je

- **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, právě když obor hodnot H_f je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.
- **rostoucí** na intervalu $I \subset D_f$, právě když $(\forall x_1, x_2 \in I)\big(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\big)$.
- **klesající** na intervalu $I \subset D_f$, právě když $(\forall x_1, x_2 \in I)\big(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)\big)$.
- **monotónní**, právě když je klesající nebo rostoucí.

Poznámka

Pomocí kvantifikátorů můžeme podmínku omezenosti zformulovat následovně:

$$(\exists K > 0)(\forall x \in D_f)\big(|f(x)| \leq K\big).$$

Podobně lze postupovat u omezenosti shora, resp. zdola.

Poznámka

Je-li funkce f monotonní, pak je i prostá. Tudíž existuje její inverzní funkce, kterou značíme f^{-1}. Platí

$$\begin{aligned} f \text{ je rostoucí} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je rostoucí,} \\ f \text{ je klesající} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je klesající.} \end{aligned}$$

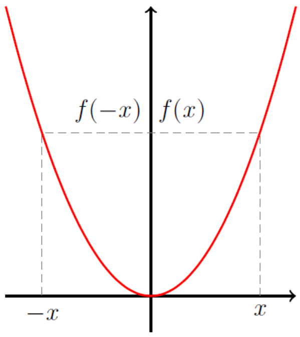
Poznámka

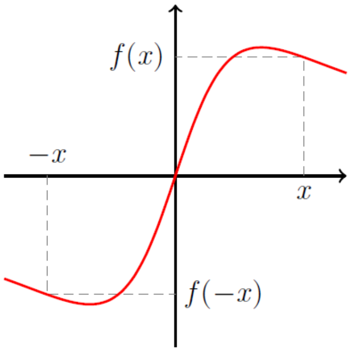
Prostá funkce nemusí být monotonní. Příkladem prosté funkce, která není ani klesající ani rostoucí je $f(x) := \frac{1}{x}$ s definičním oborem $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definice Sudosti a lichosti

Reálná funkce reálné proměnné f se nazývá

- **sudá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = f(-x)$.
- **lichá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = -f(-x)$.



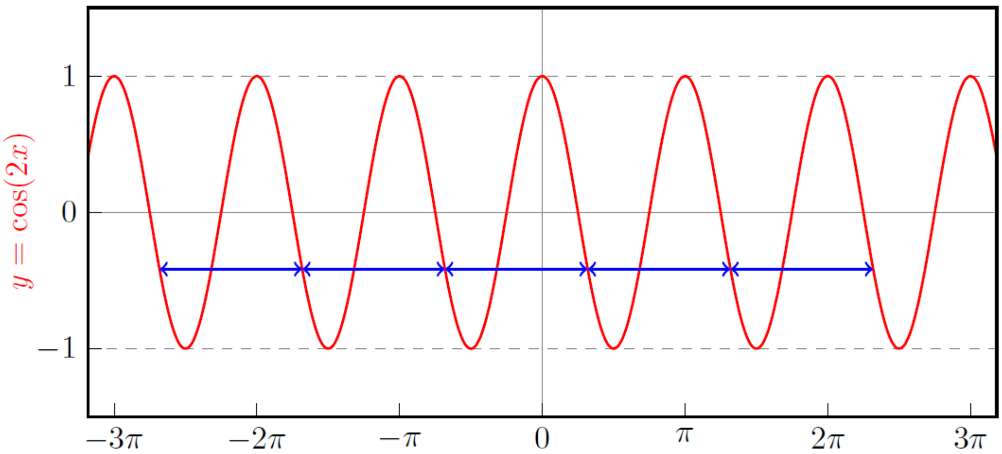


Definice Periody

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro niž existuje kladné $T \in \mathbb{R}$ takové, že

1. $(\forall x \in D_f)(x + T,\ x - T \in D_f)$,
2. $(\forall x \in D_f)(f(x + T) = f(x))$.

Říkáme, že funkce f je **periodická** a číslo T nazýváme **periodou** funkce f.



Limita funkce

Definice Limity funkce

Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť f je definovaná na okolí bodu a, s možnou vyjímkou bodu a samotného. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** a, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a \setminus \{a\}$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \lim_a f = c.$$

Poznámka (Epsilon-Delta definice)

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku:

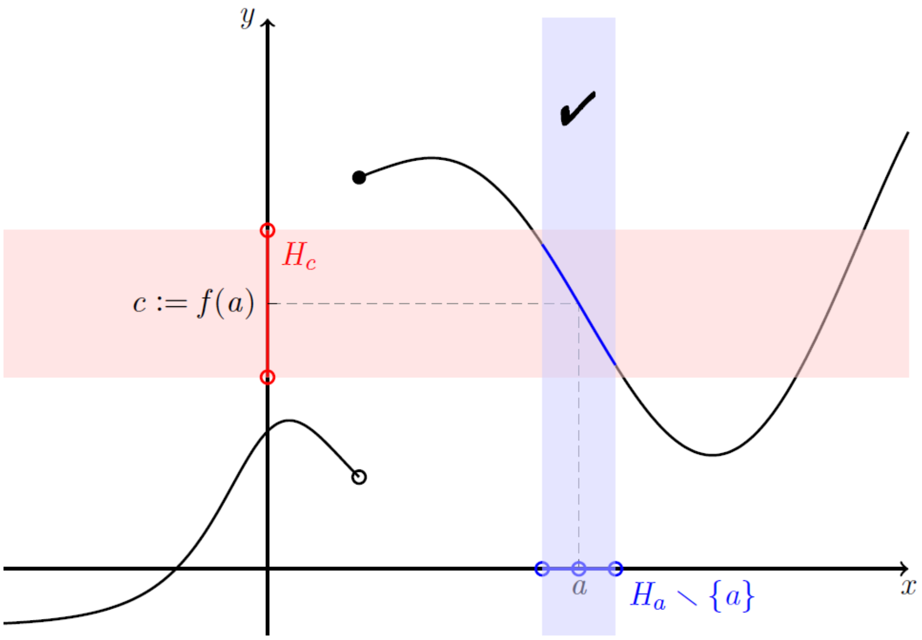
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Příklad

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$, $D_f := \mathbb{R}$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$, $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.



Jednostranná limita funkce

Definice Jednostranné limity funkce

Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \mathbb{R}$. Nechť f je definovaná na levém, resp. pravém okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a.

Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** a **zleva, resp. zprava**, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje levé okolí H_a^-, resp. pravé okolí H_a^+, bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a^- \setminus \{a\}, \text{ resp. } x \in H_a^+ \setminus \{a\},$$

plyne

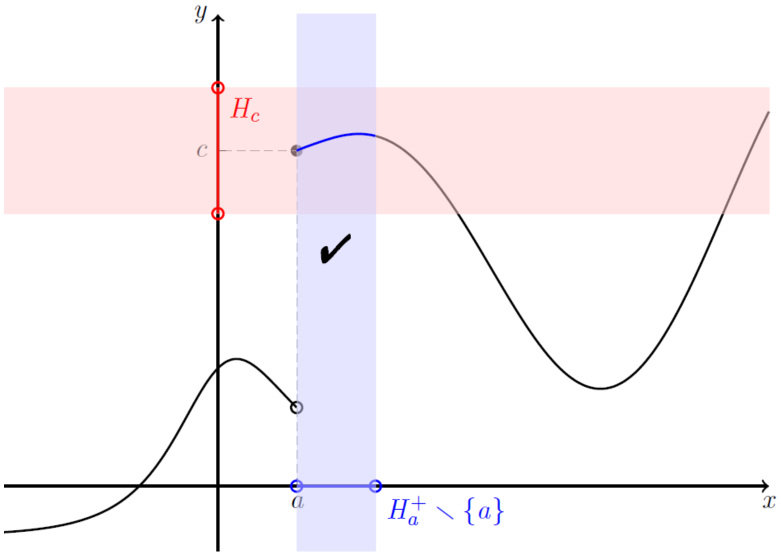
$$f(x) \in H_c.$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \to a-} f(x) = c, \quad \lim_{a-} f = c,$$

resp.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = c, \quad \lim_{a+} f = c,$$



Příklad

Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí $\lim\limits_{x \to a} x = a.$

Vezmu-li libovolné okolí H_a bodu a pak pro $x \in H_a \setminus \{a\}$ zcela jistě platí, že $x \in H_a$.

Vlastnosti limit

Vtah limity a jednostranných limit

Věta

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c.

Důsledek

Nechť f je funkce a bod $a \in \mathbb{R}$. Platí-li aspoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé,
- aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě a neexistuje,

potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Příklad

Limita $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje.

Pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1,$$
$$\lim_{x\to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Podle předchozího důsledku oboustranná limita nemůže existovat $(1 \neq -1)$.

Ekvivalentní definice limity

Heineho věta

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost (x_n) s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Věta (Heine pro jednostranné limity)

$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = c$, resp. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = c$, právě když je f definována na levém, resp. pravém, okolí bodu a a pro každou posloupnost (x_n) s limitou a a splňující

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (-\infty, a), \quad \text{resp.} \quad \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (a, +\infty),$$

platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Příklad

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Použijme Heineho větu. Funkce

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

je definována na jistém okolí bodu 0 s vyjímkou bodu 0 samotného, např. na

$$H_0(1) \setminus \{0\} = (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Buď (x_n) libovolná posloupnost patřící do $(-1,1) \setminus \{0\}$ a splňující $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x_n}}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e,$$

protože $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{x_n}\right| = +\infty$.

Poznámka

Heineho věta nám umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.

Důsledek

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a (x_n), (z_n) jsou dvě reálné posloupnosti patřící do D_f, konvergující k a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud limity

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Příklad

Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

neexistuje.

Označme $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ a položme

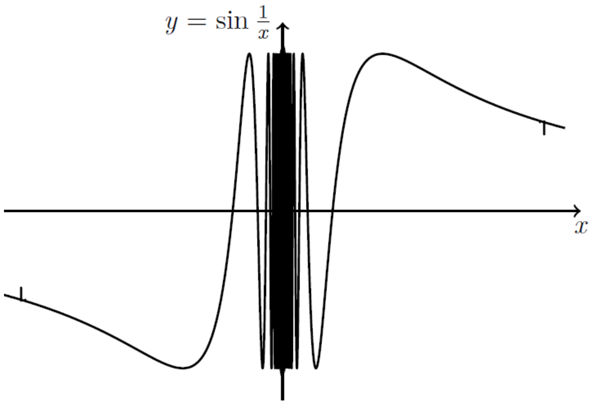
$$x_n := \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Tyto posloupnosti splňují

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Konečně

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$



Nástroje pro výpočet limity funkce

Věta

Nechť f a g jsou funkce a a prvek $\overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g,$$
$$\lim_a f \cdot g = \lim_a f \cdot \lim_a g,$$
$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g},$$

platí v případě, že výrazy na pravé straně jsou definovány a v posledním případě za předpokladu, že $\frac{f}{g}$ je definována na okolí bodu a s možnou vyjímkou bodu a samotného.

Poznámka

Analogická věta platí i pro jednostranné limity.

- Díky této větě je počítání limity polynomů velmi jednoduché

Příklad

Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Například tedy platí

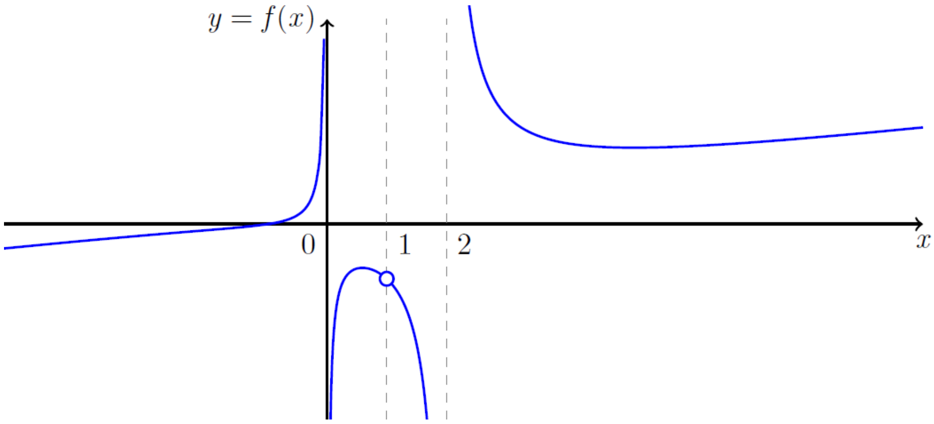
$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

Příklad

Vypočtěte limitu funkce
$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$
v bodech $a = -1,\ b = 1,\ c = 2$ a $d = -\infty$.

Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele
$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2),$$
tudíž $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pro výpočet limity v bodě $a = -1$ můžeme proto použít větu o limitě podílu,
$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x\to a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$
Dále, před výpočtem limity v bodě d upravme výraz pro $f(x)$ následovně
$$f(x) = \frac{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$
Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme
$$\lim_{x\to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$
Pro výpočet limit v bodech b a c je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatel,
$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$
Tudíž, opět pomocí předšlých vět,
$$\lim_{x\to b} = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x\to c} f(x) \text{ neexistuje.}$$
Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,
$$\lim_{x\to c+} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x\to c-} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$



Věta o limitě složené funkce

- Připomeňme pojem složeného zobrazení

Definice Složeného zobrazení

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : A \to C$ předpisem

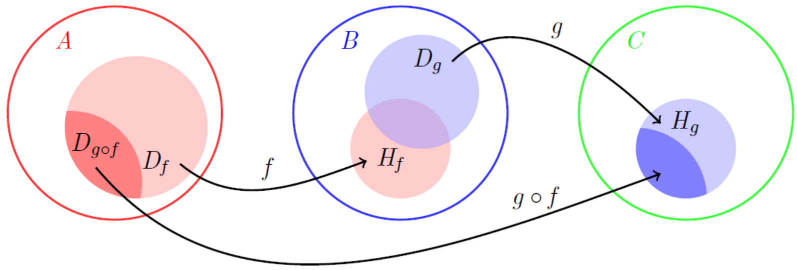
$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \big\{x \in D_f \big| f(x) \in D_g\big\}.$$

Poznámka

Tedy $D_{g \circ f} \subset D_f$. I v případě, že $D_f \neq \emptyset$ a $D_g \neq \emptyset$ může nastat situace $D_{g \circ f} = \emptyset$.



Věta (O limitě složené funkce)

Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí tři podmínky

1. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$,
2. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$,
3. buď $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \setminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = c$.

Příklad

Ukažte rovnost
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Použijeme větu o limitě složené funkce na:

- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ a $x \to 0$,
- vnější funkcí je $f(x) = \ln x$ a $b = e$,
- vnitřní funkcí je $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ a $a = 0$.

Ověřme předpoklady věty:

1. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to e} \ln(x) = 1 = c$,
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = b$,
3. $b = e \in D_f = D_{\ln} = (0, +\infty)$, $f(b) = \ln e = 1$.

Tudíž
$$\lim_{x\to 0} (f \circ g)(x) = 1.$$

Příklad

Dokažte
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Využijeme znalosti limity z předchozího příkladu,
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{\ln e^x} = \frac{e^x - 1}{\ln(1 + e^x - 1)}.$$

Ve větě o limitě složené funkce položme

- vnější funkcí je $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$, $b = 0$
- vnitřní funkcí je $g(x) = e^x - 1$, $a = 0$.

Ověřme předpoklady věty:

1. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1 = c$,
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^x - 1 = 0 = b$,
3. $b \notin D_f$, ale $g(x) = e^x - 1 \neq 0$ pro každé $x \neq 0 = a$.

Potom
$$\lim_{x\to 0} (f \circ g)(x) = 1.$$

Nerovnosti v limitách

Věta

Nechť existují limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Pak platí dvě tvrzení:

1. Pokud $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

   pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < g(x)$.

2. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že

   pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ je $f(x) \leq g(x)$,

   potom $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Podobně jako v případě limit posloupností platí věta o limitě sevřené posloupnosti, platí v případě funkcí i následující věta:

Věta (O limitě sevřené funkce)

Nechť pro funkce f, g, h a body $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:

1. existuje okolí H_a bodu a takové, že pro každé $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
2. existují $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = c$.

Potom existuje i limita $\lim_{x\to a} g(x)$ a je rovna c.

Příklad

Vypočtěte $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

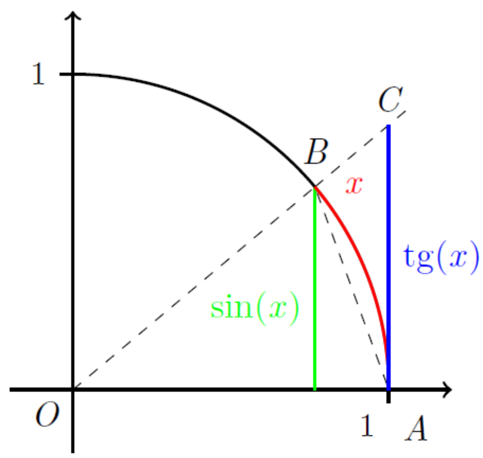
- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ totiž neexistuje.
- Ovšem nerovnost
$$f(x) := 0 \leq g(x) := \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| =: h(x)$$
platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Zvolíme-li např. $H_a = (-1, 1)$ okolí bodu $a = 0$, pak
  1. nerovnost $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ platí pro každé $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$,
  2. existují $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

  Podle věty o limitě sevřené funkce pak $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left|x \sin\frac{1}{x}\right| = 0$.

Příklad

Ověřte
$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$
Porovnejte obsahy trojůhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.
- Funkce sin je lichá a tudíž
$$-|x| \leq \sin x \leq |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$
- Potom $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. A z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak i $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. (Rozmyslete znaménko!)



- Funkce $\sin$ i tg jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

plyne nerovnost

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Odtud ihned dostáváme hledanou limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je totiž kladná na jistém okolí nuly.

Spojitost funkce

Definice a kritéria spojitosti

Spojitost

Definice Spojitosti

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce

- f je **spojitá v bodě** a, pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
- f je **spojitá v bodě** a **zleva**, pokud $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Poznámka (Epsilon – Delta formulace spojitosti)

Je-li funkce definovaná na okolí bodu $a \in D_f$, pak a i $f(a) \in \mathbb{R}$ a dostáváme alternativní definici:

- Funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Vlastnosti spojitých funkcí

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta

Součet a součin dvou funkcí f a g spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Věta

Buďte g funkce spojitá v bodě a a f funkce spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.

Spojitost polynomů

V předchozí přednášce jsme ukázali, že pro libovolné reálné a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

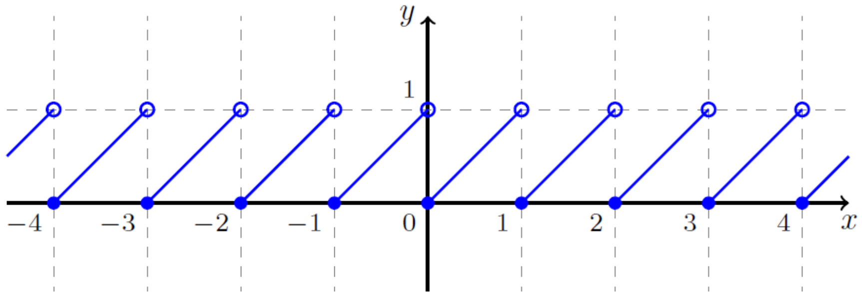
Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) + 1.$$



Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice Spojitosti na intervalu

Funkce f je

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Numerické řešení rovnic

Formulace problému

Řadu problémů lze formulovat jako hledání řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

V této části ukážeme jednoduchou postačující podmínku pro existenci řešení takovéto rovnice a algoritmus hledající aspoň jedno z možných řešení.

Příklad

Vypočíst numerickou hodnotu $\sqrt{2}$ znamená řešit rovnici

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Věta (Metoda půlení intervalu)

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Důkaz (metoda půlení intervalu)

Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
2. Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
3. Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, proveďme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b1

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti (a_n), (b_n) splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$.
Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

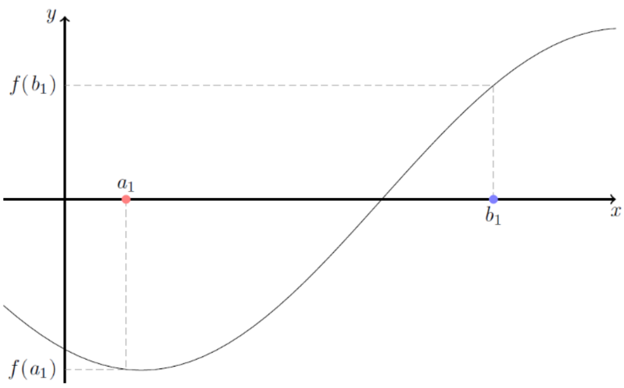
Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$ mohou poslední rovnosti nastat pouze v případě že $f(c)=0$.

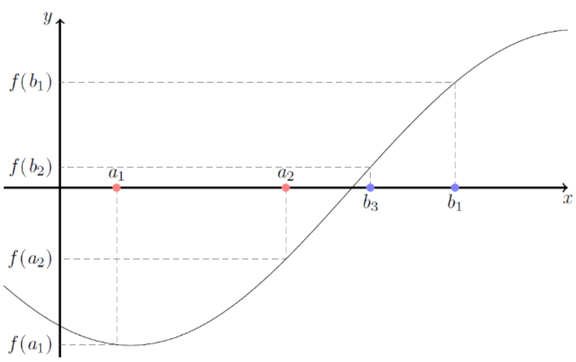
Poznámka k důkazu výše

- Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x)=0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \le c \le b_n$, $n = 1, 2, 3 \dots$

Důsledek

Buď f spojitá funkce na intervalu J a nechť platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.



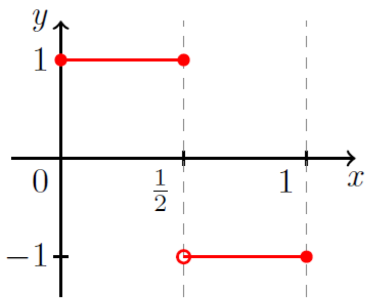


Poznámka

Předpoklad spojitosti v předešlé větě je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Sice $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0, 1)$ splňující $f(x) = 0$.



Další důsledek/věta

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Spojitost elementárních funkcí

Příklad

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.

Důsledek

Z posledního příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí (využijeme později)

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Konečně

$$\lim_{x \to a} e^x - e^a = \lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \cdot (x - a) = e^a \cdot 0 = 0.$$

Čili $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$.

Příklad

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}_+$ a navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}-1\right)}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)} = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

A konečně

$$\lim_{x\to a} \ln(x)-\ln(a) = \lim_{x\to a} \frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}\cdot(x-a) = \frac{1}{a}\cdot 0 = 0.$$

Čili funkce $\ln$ je spojitá v bodě a.

Příklad

Funkce x^n je spojitá pro každé $n \in \mathbb{N}$ v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}.$$

Spojitost je zřejmá (věta o spojitosti součinu spojitých funkcí). Dále

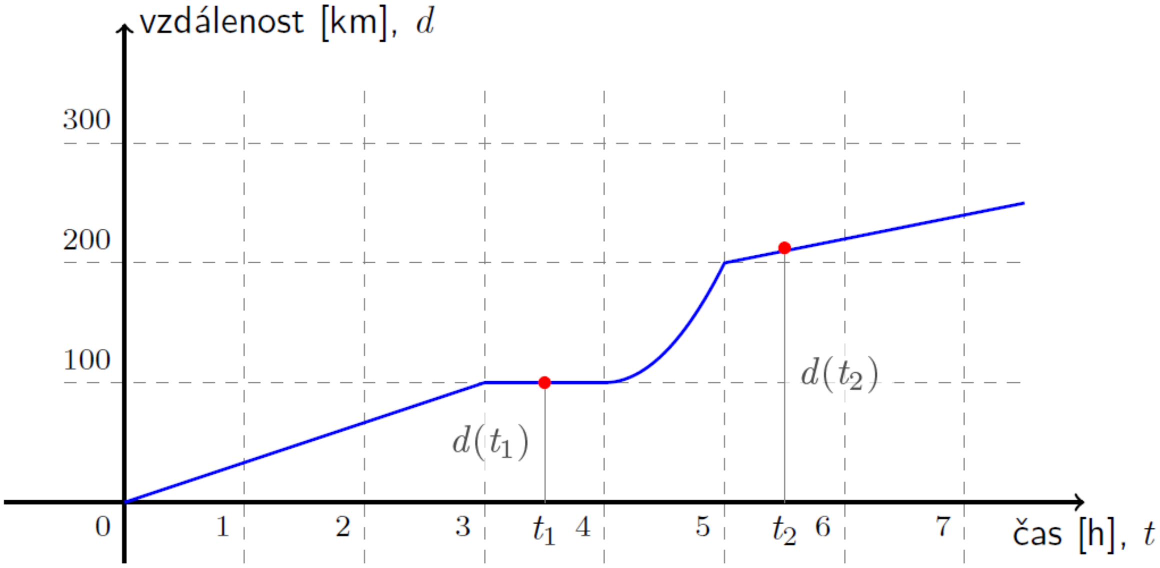
$$\begin{aligned}\frac{x^n-a^n}{x-a} &= \frac{1}{x-a}\cdot(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\dots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)\\ &= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}a+\dots+xa^{n-2}+a^{n-1}}_{n \text{ členů}}.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}.$$

Derivace

Rychlost a hledání tečny

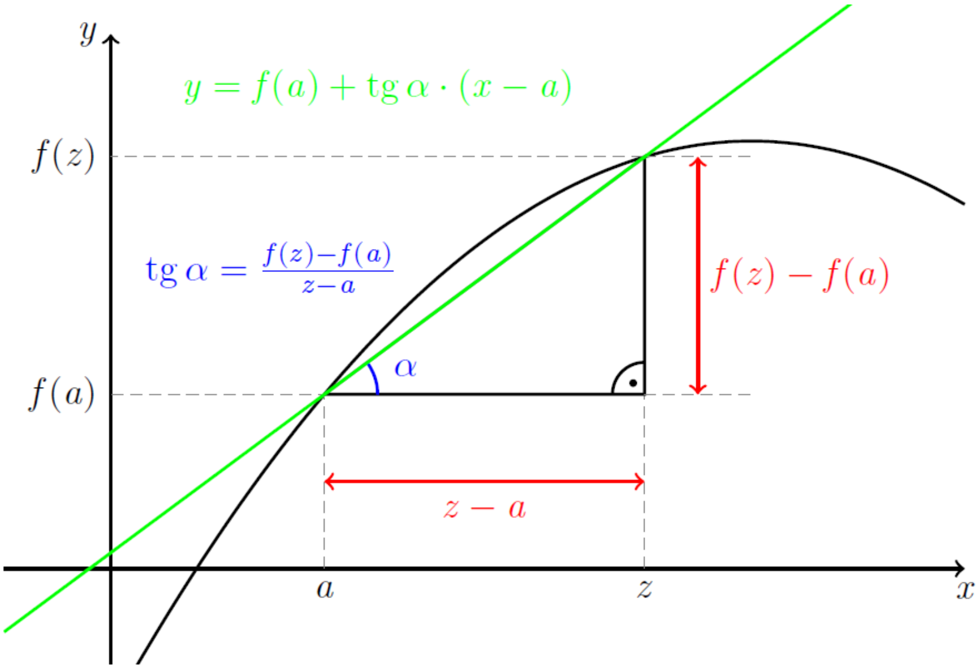


- Tento graf zachycuje vzdálenost uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Uražená vzdálenost tělesa d je tedy **funkcí** času t.
- Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky $t_1 < t_2$ je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

- Čím jsou t_1 a t_2 navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase t_1 se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$



Derivace funkce

Definice Derivace funkce

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Definice Derivace funkce

Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $x \in D_f$ takových, že existuje konečná derivace $f'(x)$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

Poznámka

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Poznámka

Limitu v definici derivace lze ekvivalentně přepsat do tvaru, který je někdy výhodnější pro výpočty,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Příklad

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

V minulé přednášce jsme odvodili limity

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a, \ (a \in \mathbb{R}), \quad \lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}, \ (a > 0).$$

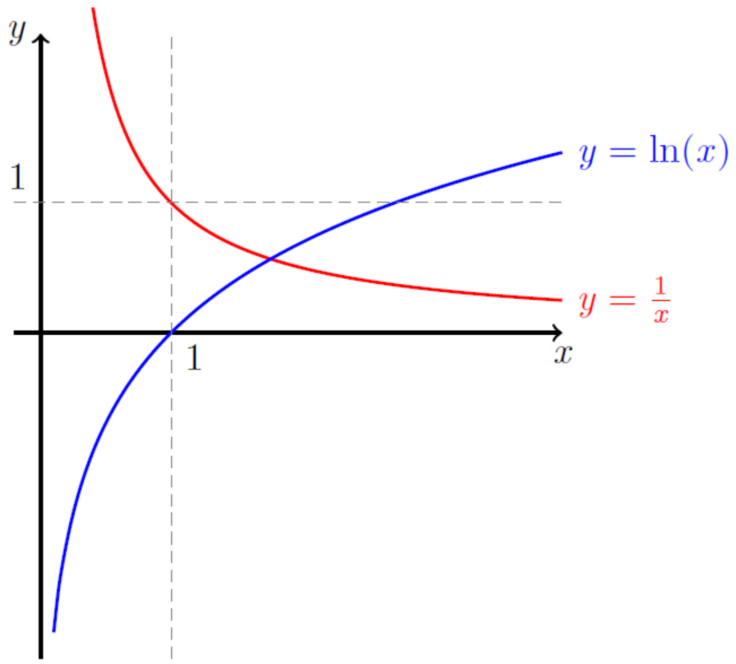
Příklad

Derivace funkce e^x je opět funkce e^x. Tedy $(e^x)' = e^x$.

Příklad

Derivace funkce $\ln x$ je funkce $\frac{1}{x}$, kde $x > 0$. Tedy pro $x > 0$ máme rovnost $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Grafy funkcí $f(x) = \ln(x)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.



Dále jsme v minulé přednášce odvodili limitu

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1},\quad a\in\mathbb{R} \text{ a } n\in\mathbb{N}.$$

Příklad

Pro kladné přirozené n je derivací funkce x^n funkce nx^{n-1}.

Příklad

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Pomocí součtového vzorce pro $\sin$ dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a}=\\ &=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a}=\\ &=\cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a}=\\ &=\cos(a)\cdot 1+\sin(a)\cdot 0=\cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Podobným způsobem můžeme odvodit

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=-\sin(a),$$

pro každé $a\in\mathbb{R}$.

Poznámka

Ve výpočtu výše jsme použili znalost limity

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2-1}{h}\cdot\frac{1}{\cos h+1}=\\ &=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{h}{\cos h+1}=-1\cdot\frac{0}{1+1}=0.\end{aligned}$$

Vlastnosti derivace

Věta

Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí

$$f'(a)\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Poznámka

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

  Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.
- Dokonce, existují funkce **spojité** na celém $\mathbb{R}$ **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

  kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla. Protože $0 \leq \{x\} < 1$ konverguje řada absolutně pro každé x. Definičním oborem funkce f je proto celá reálná osa $D_f = \mathbb{R}$. Ukázat spojitost a diferencovatelnost je však už složitější.

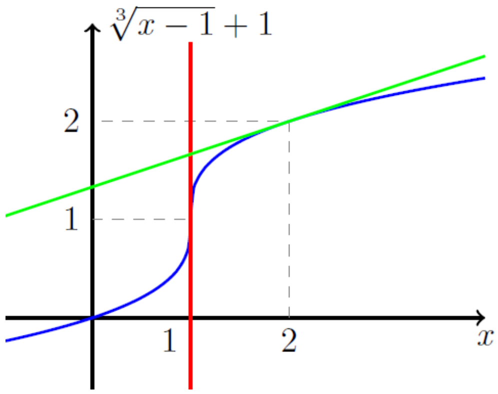
Tečna ke grafu funkce

Definice Tečny ke grafu funkce

Nechť existuje $f'(a)$. Je-li

1. funkce f spojitá v bodě a a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$, nazýváme přímku s rovnicí $x = a$
2. $f'(a) \in \mathbb{R}$, nazýváme přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

tečnou funkce f v bodě a.



Nástroje pro výpočet derivací

Věta (Derivace součtu, součinu a podílu)

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Poznámka

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo**. Platí tedy například

$$(\sin(x)\cos(x))' = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(2x),$$
$$(x\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

Příklad

Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\mathrm{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Věta (Derivace složené funkce)

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Příklad

Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \big(\sin\big(\cos(x)\big)\big)' = \cos\big(\cos(x)\big) \cdot \big(-\sin(x)\big).$$

Příklad

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$.
- Potom podle věty o složené funkci máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Příklad

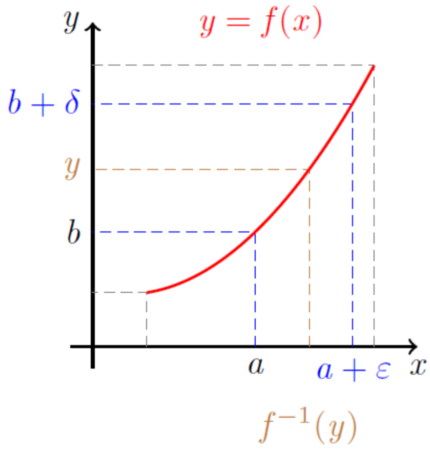
Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

- Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$.
- Potom

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Věta (O inverzní funkci)

Buď f monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.



Příklad

Protože už víme, že funkce $\sin$, $\cos$, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin\Big|_{\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1},\\
\arccos &= \left(\cos\Big|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1},\\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}\Big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1},\\
\operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}\Big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Věta (Derivace inverzní funkce)

Buďte f spojitá a monotónní na intervalu $I=(a,b)$ a bod $c\in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c)=\frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Označme $d=f(c)$. Všimněme si, že pro $x\in I$, $x\neq c$ platí

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\left(\frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(d)}{f(x)-d}\right)^{-1}=\Big(g\big(f(x)\big)\Big)^{-1},$$

kde

$$g(x)=\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(d)}{x-d},\quad \text{pro } x\in f(J),\ x\neq d.$$

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x\to d} g(x)=\left(f^{-1}\right)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=d$ a $f(x)\neq d$ pro $x\neq c$.

Podle věty o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(d)}.$$

Příklad

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle naší věty tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali.

Přehled derivací

$f(x)$	$f'(x)$	
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$	$f'(x)$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Příklad

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{arctg}\, x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\mathrm{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy.

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\right)' + \mathrm{arctg}'(x) \overset{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} \overset{3}{=} 0$$

Příklad

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,
4. algebraické úpravy.

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \overset{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{4}{=} x^x(1 + \ln x).$$

Poznámky

Poznámka

Lze definovat derivaci funkce f v bodě a zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Příklad

Uvažme funkci $f(x) = |x|$. Pro $x \neq 0 = a$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale $f'(0)$ neexistuje.

Derivace vyšších řádů

Poznámka

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''.
Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Příklad

Například pro $f(x) = x^3 - 2x + 4$ máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \;\; n \geq 4.$$

Extrémy funkce

Extrém funkce

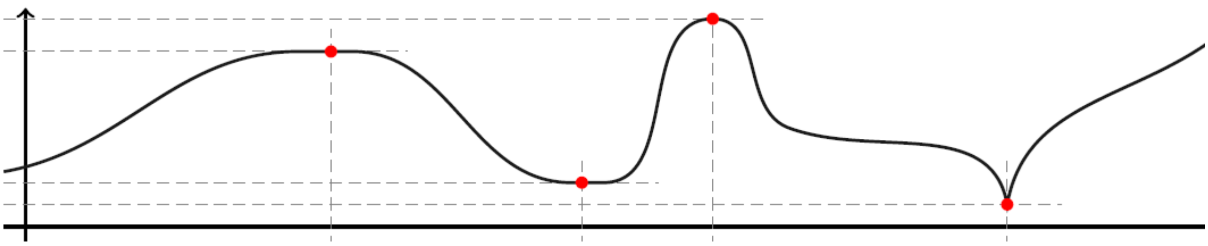
Definice Extrémů funkce

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.

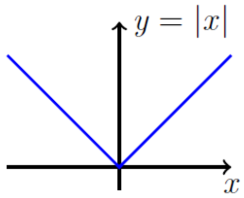


Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

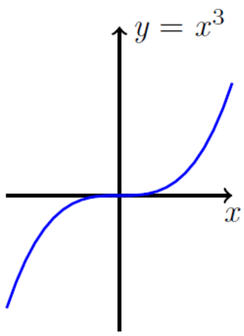
Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací)

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



Příklad (Bod nulové derivace bez extrému)

Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$.



Poznámka

Předchozí věta udává pouze podmínku **nutnou** pro existenci lokálního extrému. Umožňuje nám tvrdit, kde lokální extrém nenastává.

Věta (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu)

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém může být pouze v krajních bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

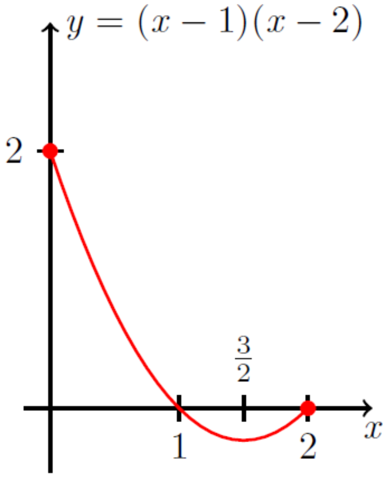
Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = (x-1)(x-2)$$

na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Derivace je nulová v bodě $\frac{3}{2}$, porovnáním funkčních hodnot

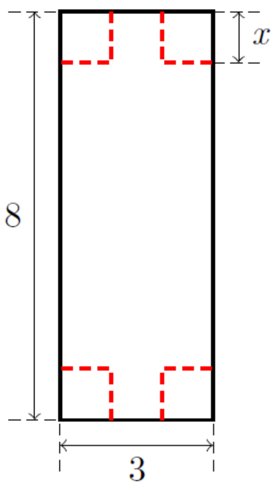
$$f(0) = 2, \quad f(3/2) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globání maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě $\frac{3}{2}$ s hodnotou $-\frac{1}{4}$.



Příklad

Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Označme stranu vystřihnutých čtverců symbolem x. Pro objem krabičky $O(x)$ platí

$$O(x) = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

kde $x \in \langle 0, 3/2\rangle$.
Derivace $O(x)$ je nula pouze v bodech 3 a $2/3$, ovšem pouze $2/3 \in \langle 0, 3/2\rangle$. V tomto bodě nastává i maximum $O(2/3) = 200/27\,\mathrm{cm}^3$, protože $O(0) = O(3/2) = 0$.

Příklad

Uzavřenost intervalu v předchozí větě je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

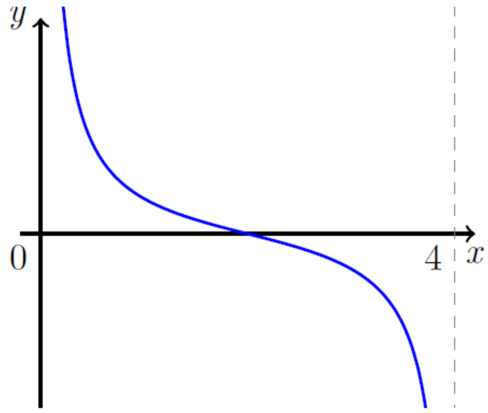
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum.

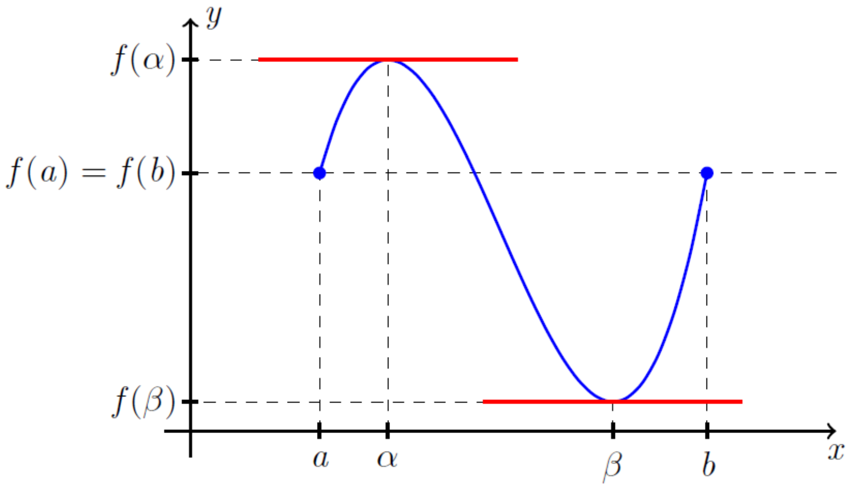
Skutečně, platí totiž

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 4_-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$



Věta o přírůstku funkce



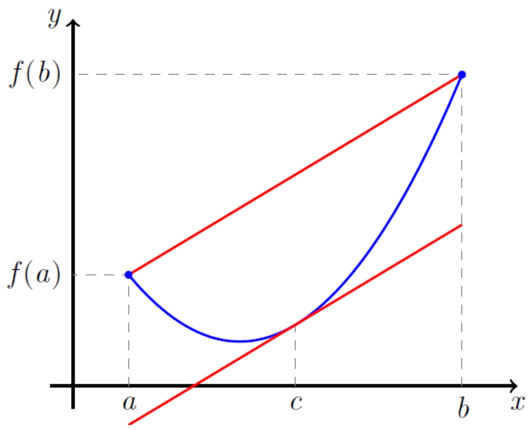
Pozorování: Pro „pěknou" funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou x.

Rolleova věta

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Přírustek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(b) - f(a)$. Lze ho odhadnout?

Věta (Lagrangeova, O přírůstku funkce)

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důsledky pro vyšetřování průběhu funkce

Monotonie funkce

Definice

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

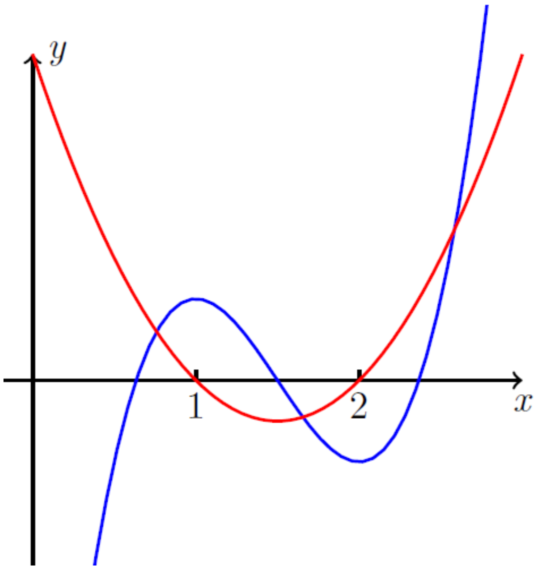
Věta

Nechť f je spojitá na itervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) \geq 0) \Rightarrow f$ je neklesající na J,
2. $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) \leq 0) \Rightarrow f$ je nerostoucí na J,
3. $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) > 0) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
4. $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) < 0) \Rightarrow f$ je klesající na J,
5. $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) = 0) \Rightarrow f$ je konstantní na J,

Poznámka

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.



Uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

pro jejíž derivaci platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

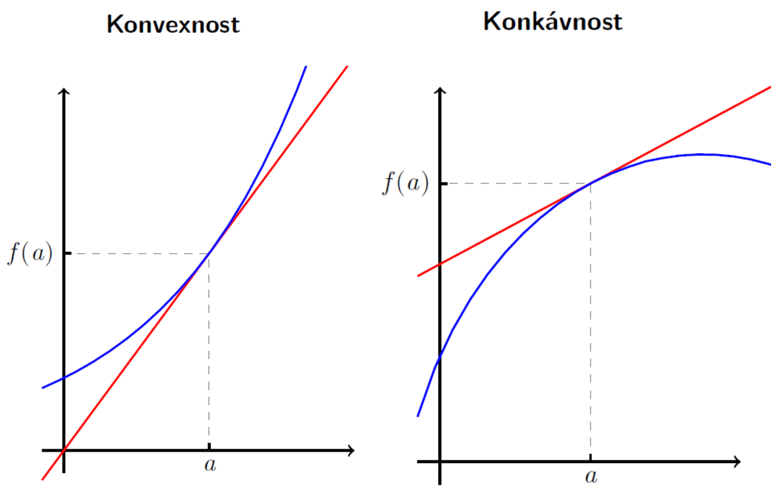
Konvexnost a konkávnost funkce

Definice Konvexnosti a konkávnosti funkce

Nechť funkce f má konečnou derivaci v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ leží všechny body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a,

$$y = f(a) + f'(a)(x-a),$$

pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.



Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a diferencovatelná na intervalu J°.

- Pokud je f'' kladná na J°, pak je funkce f konvexní v každém bodě J°.
- Pokud je f'' záporná na J°, pak je funkce f konkávní v každém bodě J°.

Inflexní body, asymptoty

Definice

Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(c-\delta, c\rangle$ a konkávní na intervalu $\langle c, c+\delta)$, nebo naopak.

Definice

- Řekneme, že funkce f má v bodě a **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.
- Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

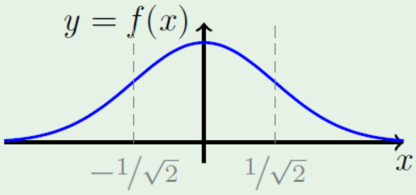
$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0 \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0.$$

Příklad

Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = e^{-x^2}$.
Je potřeba vypočíst druhou derivaci zadané funkce,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Vidíme, že znaménko druhé derivace je kladné pro $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ a záporné pro $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funkce f je proto konvexní na $\big(-\infty, -1/\sqrt{2}\big)$ a $\big(1/\sqrt{2}, +\infty\big)$ a konkávní na $\big(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\big)$. Inflexními body tedy jsou body $1/\sqrt{2}$ a $-1/\sqrt{2}$. Funkce je znázorněna na následujícím obrázku.



Poznámka

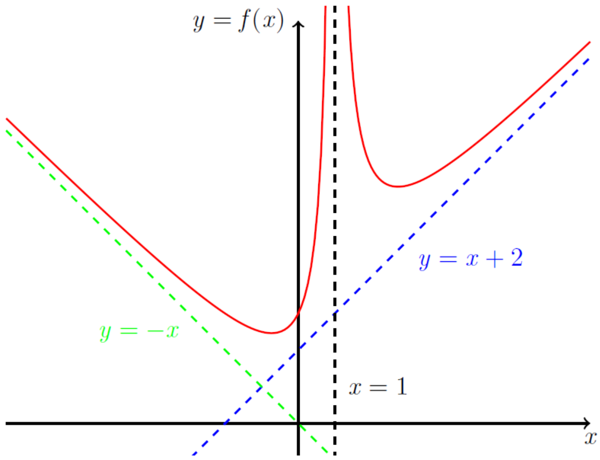
Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně

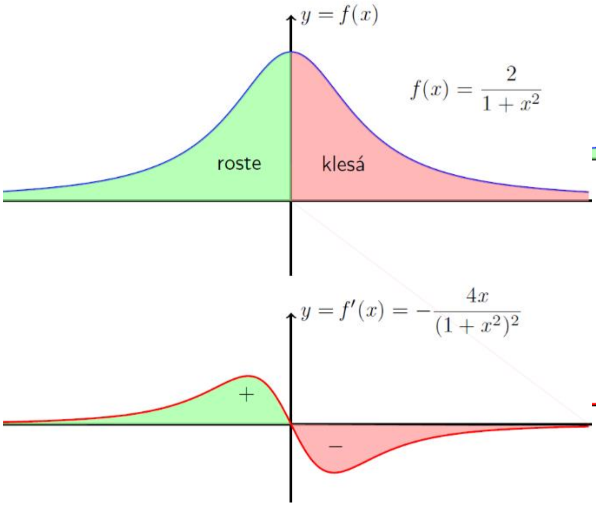
1. $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} - k$ a proto
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
2. Podobně
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx,$$
kde k jsem spočetli v předchozím bodu.

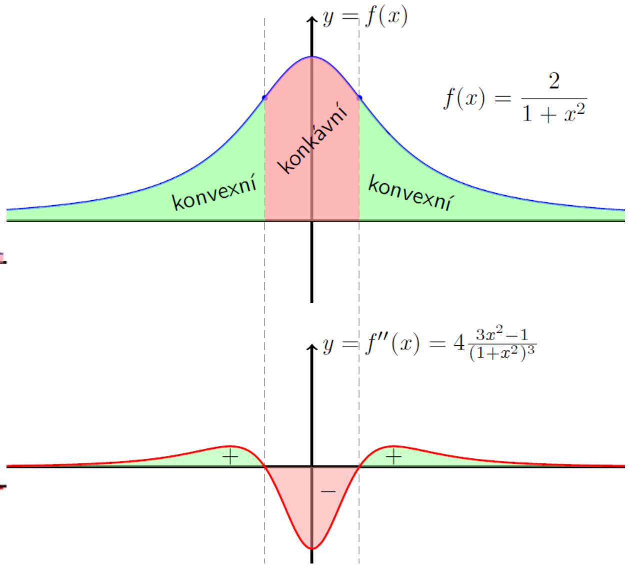
Příklad

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1.$

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x\to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1 \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$
- Podobně, pro asymptotu v $-\infty$ máme
$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x^2-x} + \frac{1}{x} = -1,$$
$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x+1} + 1 - (-1) \cdot x = 0.$$







Průběh funkce

Poznámka

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce f.

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = 0$ nebo $\lim\limits_{a} |g| = +\infty$
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \setminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje $\lim\limits_{a} \frac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim\limits_{a} \frac{f}{g}$ a platí $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a} \frac{f'}{g'}$.

Příklad

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Příklad

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln(x)$.

Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.$$

Příklad (Důležitost předpokladů)

Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} \overset{1}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos(x)}{1+\cos(x)} \overset{2}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = 1.$$

Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.
2. Limita nalevo od $\overset{2}{=}$ vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočíst bez l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = 2.$$

Příklad (Bludný kruh)

V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití nevede k cíli

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali.

Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1.$$

Příklady

Ukázkový příklad

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

1. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

2. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkoumejme existenci asymptot v $\pm\infty$,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1.$$

Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$.

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$).

Navíc ze spojitosti na $\mathbb{R}$ a z limit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ plyne $H_f = \mathbb{R}$.

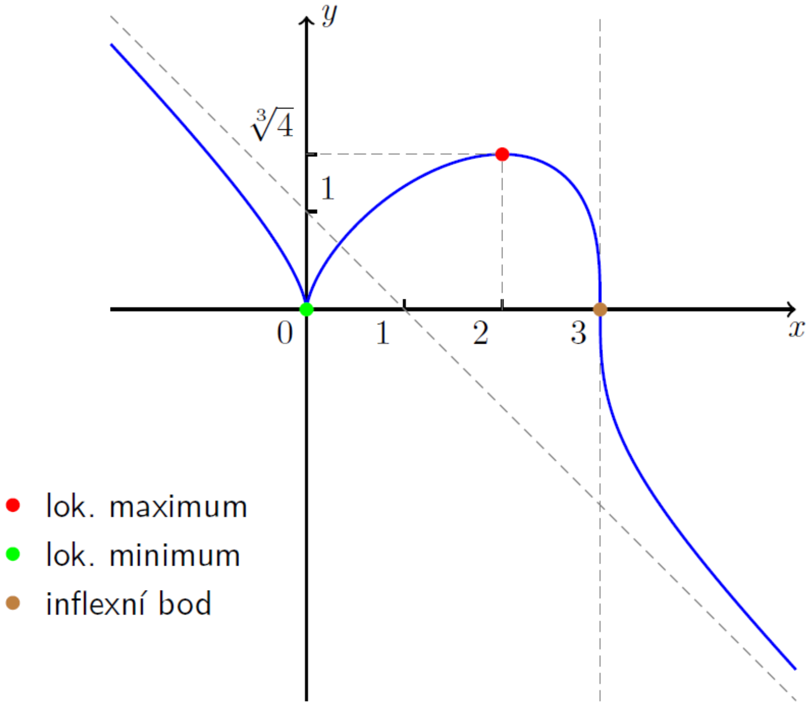
4. Pro druhou derivaci v bodech $x \neq 0, 3$ dostáváme

$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{(x-3)^{5/3}}.$$

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f''	$-$	$-$	$+$
	konkávní	konkávní	konvexní

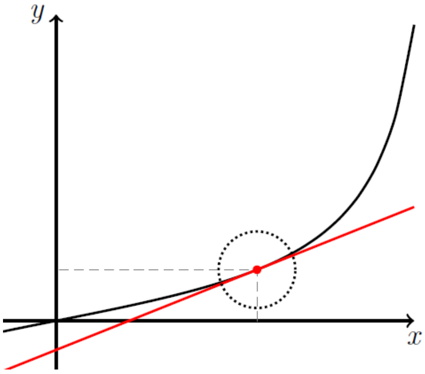
5. Nyní můžeme načrtnout graf funkce f.



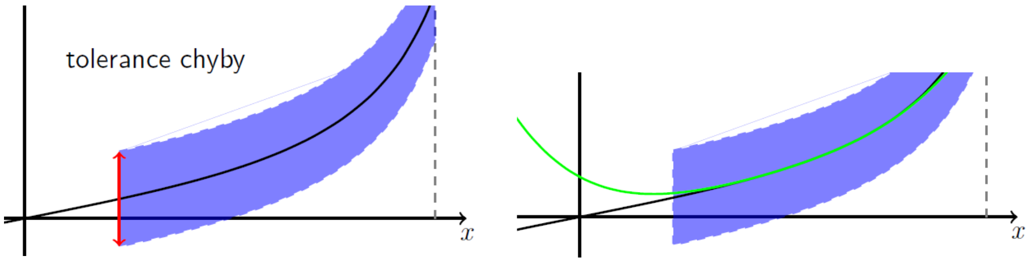
Aplikace

Taylorovy polynomy a řady

- Tečna je lokální aproximace lineární funkcí



- Proto aproximujeme na intervalu



Definice polynomu

Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}$ a reálná čísla $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Definice terminologie polynomu

1. Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme číslo n **stupněm polynomu** p.
2. Jsou-li všechny koeficienty a_k, $k = 0, \dots, n$ nulové, nazýváme p **nulovým polynomem** a jeho stupeň nedefinujeme.

Známé příklady polynomů

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně.

2. **Kvadratická** funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ parametry) je polynomem druhého stupně.

- Polynomy přinášejí velkou výhodu – k vyhodnocování funkčních hodnot stačí jednoduché operace (sčítání, násobení)

Tečna funkce jako lineární aproximace

1. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar
$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$
Je to přímka nejvíce připomínající funkci f v okolí bodu a.

2. Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce
$$g(x) := f(a) + f'(a)(x-a).$$
Pro funkce f a g platí
$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$
(Mají stejnou funkční hodnotu a stejný „sklon“ v bodě a.)

Tj. **funkce** f a její **tečna v bodě** a mají stejnou 0. a 1. derivaci v bodě a.

Polynom vyššího stupně

- Chceme:

Nechť funkce f má derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Taylorův polynom

Definice Taylorova polynomu

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci Potom existuje právě jeden polynom $T_{n,a}$ stupně nejvýše n takový, že
$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$
Tento má tvar
$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
a nazýváme ho n-**tým Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a.

Postup řešení příkladů

- Podle stupně Taylorova polynomu vytvoříme počet derivací

- Dosadíme bod (hodnotu), ve kterém Taylorův polynom je, do vzorce pro výpočet Taylorova polynomu

Příklad Cvičení 9.5

Pro funkci $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ nalezněte 5. Taylorův polynom v bodě 0.

Řešení. Pro účely derivování upravíme $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. Nyní snadno napočteme prvních pět derivací:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},\ f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5},\ f^{(5)}(x) = -\frac{120}{(x+1)^6}.$$

Po dosazení $x = 0$, dostaneme následující Taylorův polynom:

$$T_5(x) = 2 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5.$$

Chyba aproximace

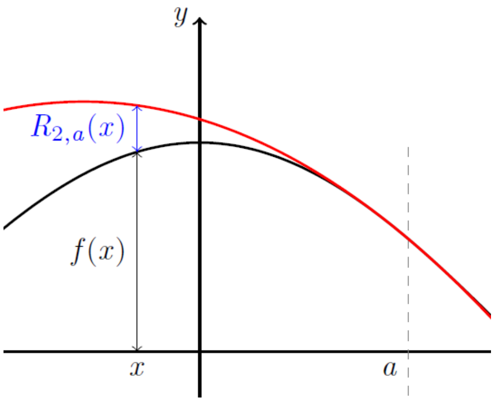
Zbytek v Taylorově vzorci

Definice zbytku v Taylorově vzorci (chyba aproximace)

Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme n-**tým zbytkem** v Taylorově vzorci.



Nechť funkce f má v jistém okolí H_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Peanův tvar zbytku

Důsledek

Za stejných předpokladů jako v předchozí větě lze Taylorův vzorec vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n,$$

kde $\lim_{x \to 0} \omega_n(x) = 0$. Výraz $\omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n$ se nazývá **Peanův tvar** zbytku.

Věta (O nejlepší aproximaci)

Nechť funkce f má v jistém okolí bodu 0 konečnou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n funkce f v bodě 0. Potom existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \setminus \{0\}.$$

Poznámka

Výraz $|f(x) - Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x.

Poznámka

Pokud $T_{n-1} \neq T_n$, pak pro jisté okolí H_0 podle předchozí věty platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - T_{n-1}(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \setminus \{0\}.$$

Tedy, každý další Taylorův polynom aproximuje funkci f lépe než předchozí.

Taylorova věta

Taylorova věta

Nechť existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ lze pro každé $x \in H_0$ zapsat ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a 0. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Tato Věta nám dává velmi důležitou informaci o zbytku v Taylorově vzorci. Umožňuje **odhadovat** chybu mezi původní funkcí a jejím Taylorovým polynomem.

Příklad

Určete, jaké chyby se dopustíme, když pro výpočet čísla $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ použijeme hodnotu Taylorova polynomu funkce e^x třetího stupně v bodě 0 vyhodnoceného v bodě $x = \frac{1}{2}$,

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Dosazením dostaneme funkční hodnotu Taylorova polynomu v $x = \frac{1}{2}$:

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48} = 1.6458\bar{3}.$$

Toto číslo nám samo o sobě nic neříká. Je nutné odhadnout chybu.

Podle **Taylorovy věty** platí $(f(x) = e^x)$ rovnost

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right),$$

kde zbytek je tvaru

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\xi}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

O čísle ξ pouze víme, že leží v intervalu $(0, \frac{1}{2})$. Navíc umíme odhadnout velikost čísla e, platí nerovnost $e < 4$ (zdůvodněte!).
Celkem tedy

$$0 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{4^{1/2}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192} = 0.005208\bar{3}.$$

Příklad Cvičení 9.9

Odhadněte chybu ve výpočtu $\sin x$ pomocí polynomu $x - \frac{x^3}{6}$ pro $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Nápověda: Ukažte, že $x - \frac{x^3}{6}$ jsou první dva nenulové členy Taylorova polynomu pro funkci $\sin x$, a rozdíl odhadněte pomocí Lagrangeova tvaru zbytku.

Řešení. Snadno ověříme, že $x - \frac{x^3}{6}$ je skutečně 3-tí Taylorův polynom (zaznělo i na přednášce), přitom $T_3(x) = T_4(x)$. Pro absolutní hodnotu Lagrangeova zbytku po T_4 máme

$$|R_4(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5\right| = \left|\frac{\cos \xi}{5!}x^5\right| \le \frac{1}{2^5\, 5!} \approx 0.000260417$$

pro všechna $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Příklad Cvičení 9.11

Příklad 9.11: Jak velké n musíte zvolit, aby chyba při výpočtu $f(x) = \ln(1+x)$ pomocí n-tého Taylorova polynomu funkce f v bodě 0 na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$ byla menší než 10^{-6}? Vypočtěte i příslušný Taylorův polynom.

Řešení. Nejprve musíme nalézt příslušný Taylorův polynom. Pro derivace funkce f platí

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Z toho již nahlédneme, že

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\cdot(k-1)!}{(1+x)^k} \quad \text{a} \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Navíc $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$. n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě 0 proto je

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Pro absolutní hodnotu chyby po n-tém Taylorově polynomu platí

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

Je-li $x \in \langle 0, 1/2\rangle$, pak jistě

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(1+0)^{n+1}} \cdot \frac{1/2^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}.$$

První n, které splňuje $\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)} < 10^{-6}$ je $n = 15$.

Funkce jako limita Taylorových polynomů

Příklad exponenciály

Připomenutí

Již jsme spočetli, že pro každé reálné x a přirozené n platí

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Dále známe tvar zbytku, lze ho vyjádřit jako

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_{n,x}}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde $\xi_{n,x}$ leží mezi 0 a x, tudíž $\xi_{n,x} < |x|$. Z monotonie e^x pak plyne odhad

$$0 < e^{\xi_{n,x}} < e^{|x|}.$$

Horní odhad tedy nezávisí na n (v tomto případě)!

Závěr

- Z věty o sevřené posloupnosti (10. prezentace 30/42)

Pro libovolné reálné x platí

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Mocninná řada

Definice mocninné řady

Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

závisející na reálném parametru x nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Poznámka

Uvažme pro jednoduchost $c = 0$.

- Je-li například $x = 2$, pak máme číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k$,
- je-li $x = \frac{1}{3}$, pak máme číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$.

Tímto způsobem je definována jistá funkce, která každému reálnému x přiřadí součet zadané číselné řady, pokud existuje. Jaký je definiční obor této funkce?

Poloměr konvergence

Věta (O poloměru konvergence)

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

konverguje absolutně pro $x \in (c-R, c+R)$ a diverguje pro $|c-x| > R$

Další vlastnosti týkající se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad R = \frac{1}{L}. \tag{1}$$

- Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (1).
- Předchozí věta říká, že tato mocninná řada (1) konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$. **Neříká nic** o konvergenci pro $x = R$ a $x = -R$.
- Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

Věta Cauchy-Hadamard

Ke každé mocninné řadě tvaru (1) existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že řada absolutně konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$.

- Poloměr konvergence ale vždy **nemusí** jít spočítat pomocí limity podílů uvedených v předešlé větě (tato limita nemusí existovat).

Příklad

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorově řadě v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Platí $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k-1}}$, $x \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Proto $f^{(k)}(0) = k!$.
- Pro poloměr konvergence máme

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní.

- Řada konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní x.
- Rovnost

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

platí pro $x \in (-1, 1)$. Řadu v tomto případě umíme přímo sečíst, není potřeba vyšetřovat zbytek v Taylorově vzorci.

Vzorce

$$\begin{array}{lcll}
e^x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & x \in \mathbb{R} \\
\hline
\sin x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} & x \in \mathbb{R} \\
\hline
\cos x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} & x \in \mathbb{R} \\
\hline
\ln(1+x) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k & x \in (-1, 1\rangle \\
\hline
\operatorname{arctg} x & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} & x \in \langle -1, 1\rangle
\end{array}$$

Příklad

Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce $\sin$ pro všechna reálná x s přesností 10^{-8}.

Díky periodicitě a periodicitě funkce $f = \sin$ stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro x z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Podle Taylorovy věty pro Taylorův polynom stupně $2n+2$ se středem v 0 platí

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\frac{f^{(2n+3)}(\xi_{n,x})}{(2n+3)!} x^{2k+3}}_{R_{2n+2}(x)}.$$

Indexy u symbolu $\xi_{n,x}$ nám připomínají, že tento závisí na x a n.

Protože derivace lichého řádu funkce $\sin$ je – až na střídající se znaménko – funkce $\cos$, můžeme zbytek pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ odhadnout:

$$\left|R_{2n+2}(x)\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!} |x|^{2n+3} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

n	a_n
1	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2	$4.7 \cdot 10^{-3}$
3	$1.6 \cdot 10^{-4}$
4	$3.6 \cdot 10^{-6}$
5	$5.7 \cdot 10^{-8}$
6	$6.7 \cdot 10^{-10}$

Pro každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se hodnota $\sin(x)$ liší od výrazu

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

nejvýše o 10^{-8}.

Primitivní funkce

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární
- Víme, že primitivní funkce existuje, ale nemůžeme jí vyjádřit pomocí konečného počtu operací
- Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu

Neurčitý integrál

Primitivní funkce

Definice Primitivní funkce

Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b).

Poznámka

Ihned z definice plyne, že F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a, b) a tedy je i spojitá na (a, b).

Příklady

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).

Funkce $F(x) = \ln x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném intervalu $(a, b) \subset (0, +\infty)$.

Funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na libovolném intervalu (a, b).

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

- Konstanta musí být uvedena

Neurčitý integrál

Definice Neurčitého integrálu

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka (Terminologie

Najdeme-li k f primitivní funkci F v intervalu (a, b), zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Funkci f nazýváme **integrovanou funkcí**, x **integrační proměnnou** a c **integrační konstantou**. Úkolu určit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ říkáme „najít primitivní funkci k f“, nebo „vypočítat integrál z f“, nebo „integrovat f“.

Existence primitivní funkce

Poznámka

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a, b), pak přímo z definice plyne
$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$
- Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a, b), potom opět přímo z definice plyne
$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Vzorce primitivních funkcí

$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z},\ n \leq -2$
$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty),\ \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\|x\| + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}(x) + C$	$x \in \left(k\pi,\ \pi + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Základní pravidla pro integrování

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Poznámka

Větu symbolicky zapisujeme a při výpočtech využíváme takto:

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f.$$

Integrace Per partest

Věta (Per partes)

Nechť funkce f je diferencovatelná v intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Příklad

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Věta o substituci v neurčitém integrálu

Substituce v neurčitém integrálu

Věta (O substituci 1)

Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a, b),
2. φ je na intervalu (α, β) diferencovatelná,
3. $\varphi\big((\alpha, \beta)\big) \subset (a, b)$.

Pak funkce $f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big).$$

Příklad

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \mathrm{tg}(x) \,\mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Často se též substituce zapisuje jako $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x \,\mathrm{d}x$ a

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = -\ln|y| + C = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C.$$

Substituce 2

Věta (O substituci 2)

Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C$$

Příklad

Dokažte pomocí předchozí věty známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha, \beta) := \big(-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\big).$$

Funkce $\sin$ je na intervalu (α, β) rostoucí s nenulovou derivací $\varphi'(t) = \cos t$. Dále

$$G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{\cos t}{\cos t} \mathrm{d}t = \int 1 \, \mathrm{d}t = t + C.$$

Protože $t = \arcsin(x)$ uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin(x) + C.$$

Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

  $$\int e^{-x^2} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

  Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci.

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

- Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje **cvik a zkušenost**.

Poznámka

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Integrace racionálních funkcí

Racionální funkce

Definice Racionální funkce

Funkci r, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p a q jsou polynomy s reálnými koeficienty, nazýváme **racionální funkcí**.

Nyní se budeme stručně zabývat otázkou jak nalézt primitivní funkci k racionální funkci, tedy výpočtem integrálu

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Dělením polynomu polynomem

- Lze, pokud je čitatel větší nebo roven jmenovateli

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \mathrm{d}x = \int u(x) \mathrm{d}x + \int \frac{v(x)}{q(x)} \mathrm{d}x.$$

Integrál z polynomu lze nalézt velmi snadno a druhý integrál už je námi požadovaného typu.

Příklad

Jako příklad uvažme racionální funkci

$$r(x) = \frac{-x^4 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

V tomto případě $p(x) = -x^4 + x + 1$ a $q(x) = x^2 + 1$. Stupeň polynomu p je ostře větší než stupeň q, $4 > 2$. Dělením polynomu polynomem dostáváme

$$\left(-x^4 + x + 1\right) : \left(x^2 + 1\right) = -x^2 + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Takže

$$\int r(x) \mathrm{d}x = -\int x^2 \mathrm{d}x + \int 1 \mathrm{d}x + \int \frac{x}{x^2 + 1} \mathrm{d}x = \\ = -\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 1\right) + C.$$

Rozklad na kořenové činitele

Příklady

Polynom $q(x) = x^4 - 1$ lze rozložit takto:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Polynom $q(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ má kořeny 1, -1 a 2. Postupným vytýkáním kořenových činitelů dostáváme

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 1)(x^3 - 3x - 2) =$$
$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)^2.$$

Rozklad na parciální zlomky

Postup řešení příkladů

- Čitatel musí být menší než jmenovatel
- Rozložit jmenovatel na kořenové činitele
- Napsat obecný tvar rozkladu

$$\frac{A_{i,k}}{(x - \alpha_i)^k} \quad \text{a} \quad \frac{B_{i,\ell}x + C_{i,\ell}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^\ell}$$

- Zpět roznásobit na společný jmenovatel
- Sestavit rovnice, porovnat koeficienty u polynomů
- Vyřešit soustavu rovnic

Příklad

Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3 - 1}.$$

Jediným kořenem jmenovatele je $x = 1$,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Hledáme A, B a C tak, aby pro všechna přípustná x platilo

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{(A + B)x^2 + (A - B + C)x + A - C}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

Odtud $A + B = 0$, $A - B + C = 0$ a $A - C = 1$. Řešením je

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

Příklad

Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{x^3}{x^4-1}.$$

Rozklad jmenovatele na kořenové činitele již známe. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1}.$$

Požadujeme platnost pro všechna přípustná x.

Vynásobíme-li poslední rovnost jmenovatelem, dostaneme

$$\begin{aligned} x^3 &= A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (B_1x+C_1)(x-1)(x+1) = \\ &= A_1(x^3+x^2+x+1) + A_2(x^3-x^2+x-1) + B_1(x^3-x) + C_1(x^2-1). \end{aligned}$$

Dva polynomy se rovnají právě když se rovnají jejich koeficienty. Porovnáním dostáváme

mocnina x	koeficient
x^3	$1 = A_1 + A_2 + B_1$
x^2	$0 = A_1 - A_2 + C_1$
x^1	$0 = A_1 + A_2 - B_1$
x^0	$0 = A_1 - A_2 - C_1$

Jedná se o soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé, jejím řešením je $A_1 = A_2 = \frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{2}$ a $C_1 = 0$. Celkem

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}.$$

Integrace parciálních zlomků

- U lineárních parciálních zlomků vede integrál na racionální funkci nebo logaritmus
- U kvadratických zlomků lze doplnit na čtverec, použít substituci a využít známé integrály

Poznámka (Doplnění na čtverec)

Úpravu kvadratického polynomu

$$ax^2 + bx + c = a(x+A)^2 + B,$$

nazýváme „doplněním na čtverec“. Z nového tvaru lze snadno vyčíst souřadnice vrcholu paraboly.

Příklad

$$x^2 + 2x - 5 = x^2 + 2x + 1 - 6 = (x+1)^2 - 6,$$

$$2x^2 + 2x + 3 = 2(x^2 + x) + 3 = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3 = \\ = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}.$$

Příklad

Vypočtěte neurčitý integrál
$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x.$$

Kvadratický polynom ve jmenovateli dále rozložit nelze, neboť $D = -16$. Jmenovatel upravíme na čtverec a vytkneme konstantu,

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4 \cdot \left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right),$$

a zavedeme substituci $y = \frac{x+1}{2}$. Tím dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + 1} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Riemannův integrál

Supremum a Infium

Připomenutí: Minimum a maximum množiny

Poznámka

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Poznámka

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem/maximem, neboť $0, 1 \notin M$.

Supremum

Definice Supremum

Buď A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A, značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$, (α je **horní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$. (α je nejmenší dolní závora A)

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Infium

Definice Infium

Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A, značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$. (α je největší dolní závora A)

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Věta

Buď A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) a supremum ($\sup A$).

Příklad

Pro interval $J = (-2, 1\rangle$ platí

$$\max J = 1, \qquad \sup J = 1, \qquad \min J \text{ neexistuje}, \qquad \inf J = -2.$$

Značení

Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množině $M \subset D_f$ klademe

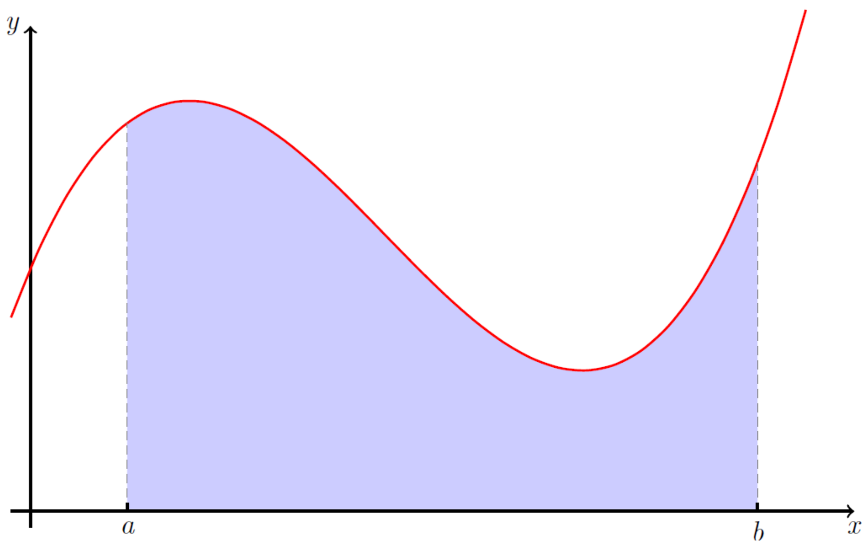
$$\begin{aligned} \inf_M f &= \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \sup_M f &= \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $M \subset D_f$ uzavřený omezený interval. Potom klademe

$$\begin{aligned} \max_M f &= \max_{x \in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \min_M f &= \min_{x \in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Připomeňme, že tato $\min$ a $\max$ existují díky spojitosti f a uzavřenosti M.

Konstrukce Riemannova integrálu



Dělení intervalu <a, b>

Definice Dělení intervalu

Buď dán interval $\langle a, b\rangle$. Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b\rangle$. Bodům x_k, $k = 1, 2, \dots, n-1$, říkáme **dělící body intervalu** $\langle a, b\rangle$. Intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ říkáme k**-tý částečný interval** intervalu $\langle a, b\rangle$ při dělení σ. Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, n,$$

nazýváme **normou dělení** σ.

Horní a dolní součet

Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b\rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu J. Označme

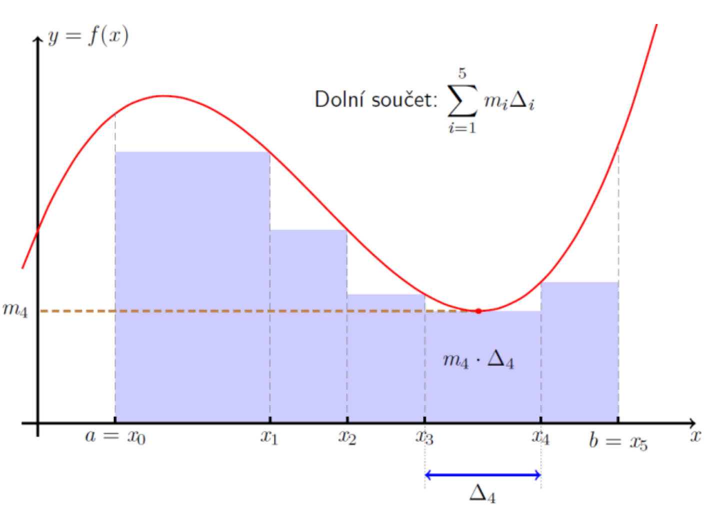
$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f.$$

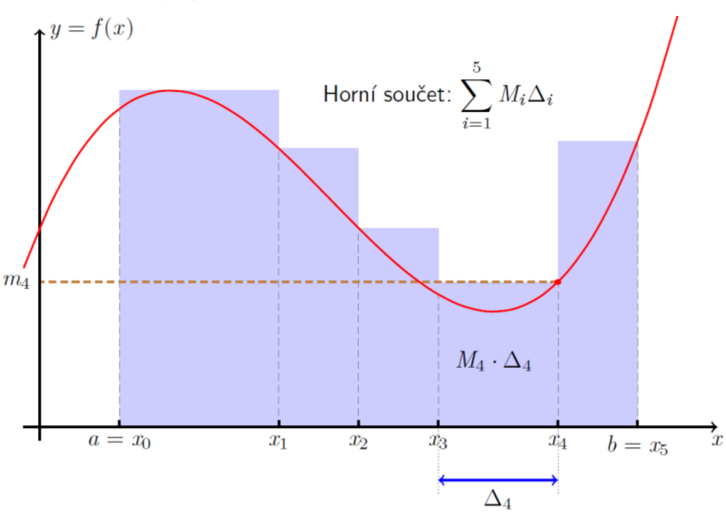
pro každé $i = 1, 2, \dots, n$.

Potom součty

$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(\sigma, f)\Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(\sigma, f)\Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **součtem funkce** f při dělení σ.





Horní a dolní integrál

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b\rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J.

Definice Horního a dolního integrálu

Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu** J a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu)

Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Pokud je navíc (σ_n) normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ potom limity

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definice integrálního součtu

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce f při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma) \leq \mathcal{J}(\sigma) \leq S(\sigma).$$

Riemannův integrál funkce f spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n),$$

kde (σ_n) je libovolná normální posloupnost dělení.

Vlastnosti Riemannova integrálu

Věta (Aditivita integrálu)

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b\rangle$) platí

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Multiplikativita integrálu)

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Nerovnosti mezi integrály)

Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Newtonova formule

Poznámka

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožnuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Věta (Newtonovy formule)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ s primitivní funkcí F. Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Příklad

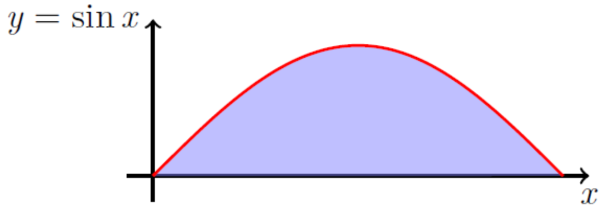
Spočítejte integrál

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $-\cos x$. Proto

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce $\sin$ je tedy 2 (v daných jednotkách plochy).



Per Partes pro určitý integrál

Věta

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

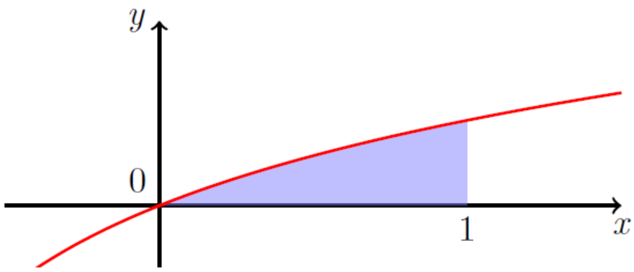
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

Příklad

Vypočtěte
$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Derivujeme $\ln(1+x)$ a integrujeme 1,

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(2) - \Big[x - \ln|1+x|\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$



Substituce pro určitý integrál

Poznámka

Zavádíme následující značení

- $\displaystyle\int_a^a f := 0,$
- pro $a > b$ klademe $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Věta (O substituci)

Nechť pro funkce f a φ platí

1. φ a její derivace φ' jsou spojité na $\langle\alpha,\beta\rangle$,
2. f je spojitá na $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$.

Potom
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

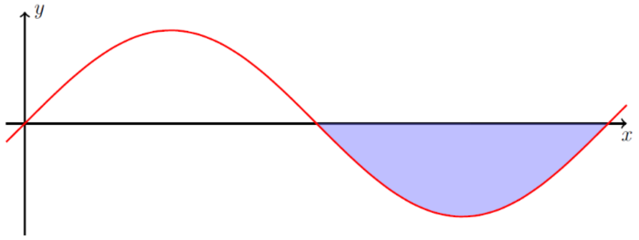
Příklad

Vypočtěte integrál
$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}}\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y=\varphi(x)=\frac{1}{2}+e^{-x}$. Potom
$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}}\mathrm{d}x = -\int_{3/2}^{1} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \Big[\ln|y|\Big]_1^{3/2} = \ln\frac{3}{2}.$$

Poznámky

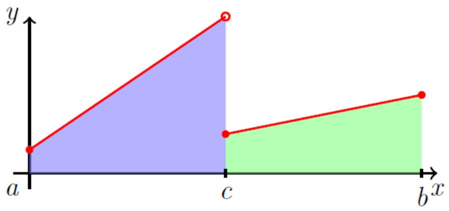
Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:
$$\int_0^{\pi}\sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi}\sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi}\sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Nespojité funkce

Předpokládejme, že pro funkci f na intervalu $\langle a,b\rangle$ platí
- existuje $c\in(a,b)$ tak, že f je spojitá na $\langle a,c)$ i $(c,b\rangle$,
- existují jednostranné limity funkce f v bodě c.

Potom můžeme počítat její Riemannův integrál následujícím způsobem
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Příklad

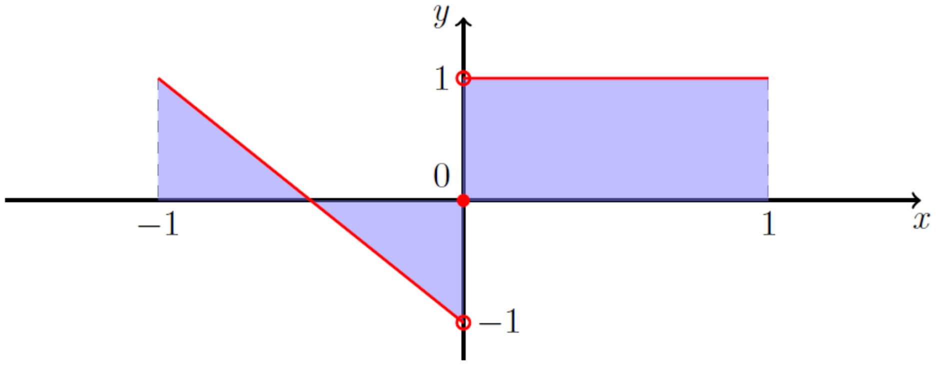
Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x) = |x| - x + \mathrm{sgn}(x)$

Funkce f není spojitá v bodě 0:

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0_-} f(x) = -1.$$

Takže

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-2x-1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1\mathrm{d}x = -\left[x^2 + x\right]_{-1}^{0} + 1 = 1.$$



Poznámka (Zobecněný Riemannův integrál)

Pokud máme funkci f spojitou na neomezeném intervalu, např. $\langle 0, +\infty)$, můžeme definovat **zobecněný Riemannův integrál** předpisem

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

v případě, že příslušná limita existuje a je konečná.

Příklad

Vypočtěte integrál

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{1}^{a} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{a} = 1 - \frac{1}{a}, \quad \Rightarrow \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Integrace sudých a lichých funkcí

Věta

Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$
2. Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$
3. Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T, pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Příklad

Vypočítejte integrály
$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 3x^2 - x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} xe^{x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 3x^2 - x)\mathrm{d}x = 3\cdot 2\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = 3\cdot 2\cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 16.$$

$$\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou π a navíc sudá, proto

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 4.$$

Použití integrálu

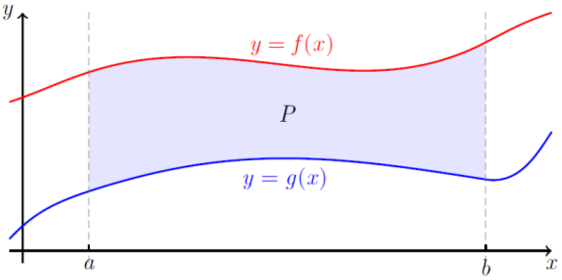
Výpočet ploch a objemů rotačních těles

Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Věta

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$



Postup řešení příkladů

- Nalézt průsečíky grafů (slouží jako rozsah integrálu)
- Porovnat z intervalu, která funkce je větší
- Použít vzorec

Příklad MARAST (726)

Vypočítejte obsah útvaru omezeného parabolou $4y = x^2$ a přímkou danou rovnicí $4x + 2y + 6 = 0$.

Obsah útvaru omezeného parabolou $4y = x^2$ a přímkou danou rovnicí $4x + 2y + 6 = 0$, tj. $y = -2x - 3$, je dán rozdílem jejich určitých integrálů. Je ovšem třeba určit průsečíky těchto křivek.

x-ové souřadnice průsečíků křivek $2y = -4x - 6$ a $4y = x^2$ jsou řešení rovnice $0 = x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$. Přičemž $\frac{x^2}{4} \leq -2x - 3$ na $\langle -6, -2\rangle$. Tudíž

$$O = \int_{-6}^{-2} (-2x - 3) - \frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 - 3x - \frac{x^3}{12}\right]_{-6}^{-2} =$$

$$= \left(-4 + 6 + \frac{8}{12}\right) - \left(-36 + 18 + \frac{216}{12}\right) = 20 - \frac{208}{12} =$$

$$= 3 - \frac{4}{12} = \frac{8}{3}.$$

Příklad

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

$$S = 2\int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Výpočet objemu rotačního tělesa

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak objem V rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x je

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

Postup řešení příkladů

- Nalézt průsečíky grafů (slouží jako rozsah integrálu)
- Porovnat z intervalu, která funkce je větší
- Použít vzorec

Příklad MARAST (727)

Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy omezené grafy funkcí $f(x) = 9$ a $g(x) = (x-2)^2$.

Objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy omezené grafy funkcí $f(x) = 9$ a $g(x) = (x-2)^2$ je dán rozdílem objemů těles vzniklých rotací daných funkcí a omezených průsečíky daných funkcí. Průsečíky f a g jsou -1 a 5.

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_{-1}^{5} 9^2 - \left((x-2)^2\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_{-1}^{5} 9^2 - (x-2)^4 \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\pi\left(81x - \frac{(x-2)^5}{5}\right)\right]_{-1}^{5} = \pi\left(81\cdot 6 - \frac{(5-2)^5 - (-1-2)^5}{5}\right) =$$
$$= \pi\left(468 - \frac{3^5 + 3^5}{5}\right) = \pi\left(486 - \frac{486}{5}\right) = \pi\left(389 - \frac{1}{5}\right).$$

Objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy omezené grafy funkcí f a g je $\pi\left(389 - \frac{1}{5}\right)$.

Obsah pláště rotačního tělesa

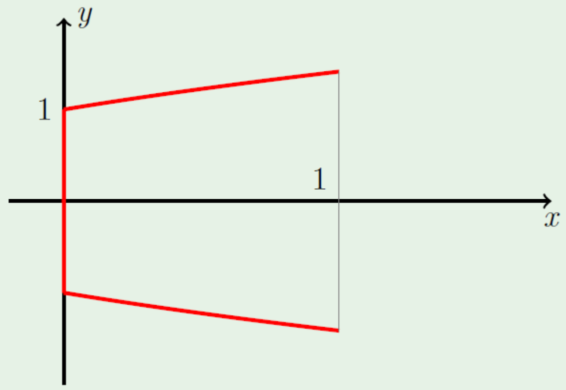
Věta

Nechť funkce f je diferencovatelná na $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$ je funkce spojitá na tomto intervalu. Pak obsah pláště P rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

Příklad

Vypočtěte povrch rotačně symetrické nádoby s průřezem



Kde stěna je udána grafem funkce $f(x) = \sqrt{x+1}$ nad intervalem $\langle 0, 1\rangle$

Nezapomeňme započítat i podstavu

$$S = \pi + 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4(x+1)}}\mathrm{d}x.$$

Integrand lze po několika přímočarých operacích zjednodušit na

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{5+4x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\frac{1}{4}(5+4x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(27-5^{3/2}\right).$$

Takže povrch nádoby je

$$S = \pi + \frac{\pi}{6}\left(27-5^{3/2}\right).$$

Délka křivky

Definice

Buďte f a g dvě spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = \big(f(t),\, g(t)\big), \quad t \in \langle a, b\rangle,$$

nazýváme křivkou v $\mathbb{R}^2$.

Poznámka

Symbol v definici představuje uspořádanou dvojici dvou reálných čísel (bod v $\mathbb{R}^2$). Zobrazení F tedy každému $t \in \langle a, b\rangle$ přiřadí $F(t)$, bod v rovině $\mathbb{R}^2$.

Příklad

Jako příklad uvažme kružnici, kdy $\langle a, b\rangle = \langle 0, 2\pi\rangle$ a $F(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

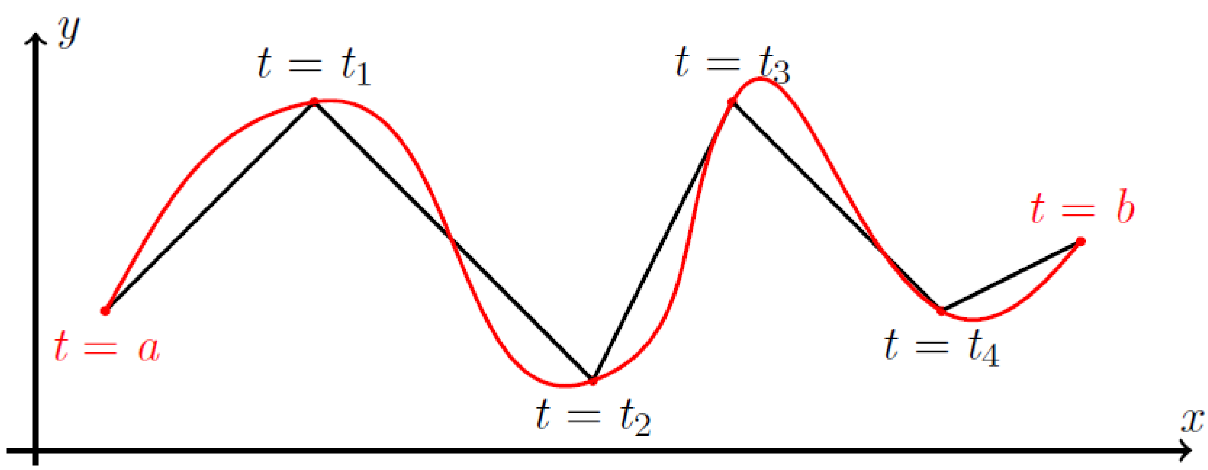
Délka grafu funkce

Definice

Pro křivku F v $\mathbb{R}^2$ a rozdělení $\sigma = \{a = t_0,\, t_1, \dots,\, t_n = b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ položme

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big)^2 + \big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)^2}.$$

Toto číslo nazýváme **délkou lomené čáry** aproximující křivku F při rozdělení σ.



Věta

Je-li F křivka v $\mathbb{R}^2$, $F(t) = \big(f(t),\, g(t)\big)$ a funkce f a g jsou spojitě diferencovatelné na $\langle a, b\rangle$, pak pro libovolnou normální posloupnost rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje konečná limita

$$L = \lim_{n\to\infty} \ell(\sigma_n) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Číslo L nazýváme **délkou křivky** F.

Poznámka (Délka grafu funkce)

Graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze chápat jako křivku

$$F(x) = \big(x,\, f(x)\big), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Je-li f diferencovatelná, pak pro **délku grafu funkce** f platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

Vypočtěte délku úseku paraboly $y = x^2$ mezi body $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Jedná se o délku grafu funkce $f(x) = x^2$ definované na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Takže pomocí per partes odvodíme

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[x\sqrt{1 + 4x^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sqrt{5} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Po vyjádření L a substituci dostáváme

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\Big(2 + \sqrt{5}\Big),$$

kde jsme dále použili již vypočtený neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 + 1}\Big) + C.$$

Celková změna a okamžitá změna

Poznámka

Uvažme funkci f diferencovatelnou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Derivaci $f'(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, interpretujeme jako okamžitou změnu f v čase t. Celková změna f mezi okamžiky $t = a$ a $t = b$ je dána

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t.$$

Příklad

Označuje-li $x(t)$ polohu bodu pohybujícího se po přímce v čase $t \in \mathbb{R}$, pak $x'(t)$ představuje jeho okamžitou rychlost v čase t a změna polohy mezi časy 0 a 1 je

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 x'(t)\mathrm{d}t.$$

Okamžitá změna rychlosti, $x''(t)$, se nazývá zrychlení.

Gaussovský filtr, vyhlazování

Další aplikace

Složitost

Uspořádání

Složitost jednoduchých třídících algoritmů