Test BI-ZMA č. 1, FIT ČVUT, ZS 2013/2014	Kruh a datum: 4. 11. 2013
Jméno a Příjmení: –	Body: –

Obsahem první písemky je materiál z prvních pěti cvičení a čtyř přednášek. Podrobnější informace ohledně písemky lze dohledat na EDUXu. V tomto dokumentu uvádím několik typických ukázkových příkladů i s řešením, které tématicky pokrývají látku z testů. Další příklady k procvičení lze nalézt v materiálech k cvičení a v elektronické cvičebnici MARAST. Doporučuji příklady zkusit nejprve vyřešit samostatně a teprve poté konzultovat řešení. Případné připomínky a dotazy adresujte na `tomas.kalvoda@fit.cvut.cz`.

[1.] Určete kolik členů se sčítá v následujícím součtu, udejte jak vypadá k-tý sčítanec (počítáno od prvního), zapište součet ve tvaru sumy a sečtěte,

$$-1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \cdots - \frac{64}{729}.$$

[2.] Nechť je posloupnost (a_n) zadána rekurentně:

$$a_n = 1 - a_{n-1}, \text{ pro přirozené } n \geq 2 \text{ a } a_1 = 1.$$

Rozhodněte, zda-li pro každé kladné přirozené n platí $a_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$.

[3.] Rozhodněte o monotonii posloupnosti (a_n), definované předpisem

$$a_n = \sqrt{n} - 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Své tvrzení dokažte.

[4.] Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2 - k^2}{4}.$$

[5.] Nalezněte definiční obor funkce dané předpisem

$$f(x) = \frac{\ln\left(4x - 3 - x^2\right)}{\sqrt[3]{x-2}}$$

[6.] Nechť f je reálná funkce reálné proměnné definovaná předpisem

$$f(x) := x^2 - 4x + 3, \quad x \in D_f := \langle 2, +\infty).$$

Ukažte, že f je prostá a nalezněte její inverzní funkci f^{-1}.

[7.] Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-2)(3-n)^2}{(1-n^3)(2-n)}.$$

[8.] Vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - n^2 2^{n+1}}{2^n - n^4}.$$

[9.] Vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2+3^n)}{\ln(9^n+2^n)}.$$

[10.] Vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-1}-n}{\sqrt[2]{n^2-1}-n}.$$

[11.] Vypočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{n^2+2n-3}{n^2+n-2}.$$

[12.] Rozhodněte o existenci limity
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{1+2^{-n}}.$$
Pokud existuje, udejte její hodnotu.

[13.] Rozhodněte o konvergenci číselné řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{1+3^k}.$$

[14.] Rozhodněte o konvergenci číselné řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sin k.$$

[15.] Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci číselné řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+3}.$$

***

Opravdu doporučuji nejdříve se nad příklady samostatně zamyslet a poté teprve svůj postup porovnat s řešením!

Řešení

[1.] k-tý člen má tvar

$$a_k = -\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, 7.$$

Členů v součtu je tedy 7. Součtem je

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = -\sum_{k=1}^{7} \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1 + \frac{2^7}{3^7}}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{1}{5}\frac{3^7 + 2^7}{3^6} = -\frac{463}{729}.$$

Jako dobré řešení by se počítal i předposlední výraz, mocniny není třeba dopočítávat.

[2.] Použijeme matematickou indukci.

a) Pro $n = 1$ platí podle definice $a_1 = 1$ a podle vzorce $\frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$. Rovnost mezi a_1 a vzorcem pro $k = 1$ platí.

b) Předpokládejme, že pro $n \geq 1$ platí explicitní vzorec. Ověřme jeho platnost pro $n + 1$,

$$a_{n+1} \overset{\text{def.}}{=} 1 - a_n \overset{\text{I.P.}}{=} 1 - \frac{1}{2}\big(1 - (-1)^n\big) = \frac{1}{2}\big(1 - (-1)^{n+1}\big).$$

Rovnost platí, a matematická indukce zaručuje platnost explicitního vyjádření a_n pro každé kladné přirozené n.

[3.] Posloupnost je rostoucí. O tom se můžeme přesvědčit přímo, pro každé $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n \ &\Leftrightarrow\ \sqrt{n+1} - 2^{-n-1} > \sqrt{n} - 2^{-n} \ \Leftrightarrow\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 2^{-n-1} - 2^{-n} \\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > -2^{-n-1}. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je očividně platná (kladné číslo je větší než záporné).

[4.] Musíme vhodně upravit sčítance, součet zjednodušit a nakonec využít znalosti vzorečku

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Konkrétně,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2 - k^2}{4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-2k+1}{4} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} 1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4} \cdot n = -\frac{n^2}{4}.$$

Alternativně též můžeme postupovat následovně,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2 - k^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 - \sum_{k=1}^{2} k^2\right) = \frac{1}{4}\left(-n^2\right) = -\frac{n^2}{4}.$$

[5.] Argument logaritmu musí být kladný, argument třetí odmocniny může být libovolný, ale ve jmenovateli nesmíme připustit nulu. Definiční obor je tvořen těmi reálnými x, která současně splní podmínky

$$4x - 3 - x^2 = -(x-1)(x-3) > 0 \quad \text{a} \quad x - 2 \neq 0.$$

Tudíž $D_f = (1,2) \cup (2,3)$.

[6.] Buďte $x, y \in D_f$ a předpokládejme, že $f(x) = f(y)$. Potom

$$x^2 - 4x = y^2 - 4y \;\Rightarrow\; (x-y)(x+y) - 4(x-y) = 0 \;\Rightarrow\; (x-y)(x+y-4) = 0.$$

Protože ale obě x i y jsou větší nebo rovno než 2, může tato situace nastat pouze v případě, že $x = y = 2$ nebo $x - y = 0$. V obou případech je však $x = y$. Funkce f je tedy prostá.

Protože $f(x) = (x-2)^2 - 1$ je oborem hodnot funkce f množina $H_f = \langle -1, +\infty)$. Buď $y \in H_f$ libovolné, hledejme $x \in D_f$ tak, aby $f(x) = y$. Zřejmě

$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 = y \;\Rightarrow\; (x-2)^2 = y + 1 \geq 0 \underset{x \geq 2}{\Longrightarrow} x - 2 = \sqrt{y+1} \;\Rightarrow\; x = 2 + \sqrt{y+1}.$$

Platí tedy $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$ pro $x \in D_{f^{-1}} = \langle -1, +\infty)$.

[7.] Nelze přímo použít větu o limitě podílu, výraz je neurčitého typu $\frac{+\infty}{+\infty}$. Upravíme-li však zlomek následovně,

$$\frac{(n^2-2)(3-n)^2}{(1-n^3)(2-n)} = \underbrace{\frac{n^4}{n^4}}_{1} \cdot \frac{\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n} - 1\right)^2}{\left(\frac{1}{n^3} - 1\right)\left(\frac{2}{n} - 1\right)},$$

pak již lze použít větu o limitě podílu/součinu/součtu a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-2)(3-n)^2}{(1-n^3)(2-n)} = \frac{(1-0)(0-1)^2}{(0-1)(0-1)} = 1.$$

[8.] Opět musíme výraz lehce upravit (vytkneme nejrychleji rostoucí členy)

$$\frac{e^n - n^2 2^{n+1}}{2^n - n^4} = \left(\frac{e}{2}\right)^n \frac{1 - 2n^2\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1 - \frac{n^4}{2^n}}.$$

Nyní $n^2\left(\frac{2}{e}\right)^n \to 0$, když $n \to +\infty$, protože (podílové kritérium)

$$\frac{(n+1)^2\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}}{n^2\left(\frac{2}{e}\right)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{2}{e} \to \frac{2}{e} < 1.$$

Zcela analogicky odvodíme $\frac{n^4}{2^n} \to 0$. Tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - n^2 2^{n+1}}{2^n - n^4} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n \frac{1 - 2n^2\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1 - \frac{n^4}{2^n}} = +\infty \cdot \frac{1-0}{1-0} = +\infty.$$

[9.] Upravme nejprve zlomek vytknutím nejrychleji rostoucích členů v argumentech logaritmu a následně využijme známých vlastností logaritmu,

$$\frac{\ln(2+3^n)}{\ln(9^n+2^n)} = \frac{\ln\left(3^n\cdot(1+2\cdot 3^{-n})\right)}{\ln\left(9^n\cdot(1+(2/9)^n)\right)} = \frac{n\ln 3+\ln(1+2\cdot 3^{-n})}{2n\ln 3+\ln(1+(2/9)^n)} = \frac{\ln 3+\frac{\ln(1+2\cdot 3^{-n})}{n}}{2\ln 3+\frac{\ln(1+(2/9)^n)}{n}}$$

Hledaným výsledkem je tedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2+3^n)}{\ln(9^n+2^n)} = \frac{\ln 3+\frac{0}{+\infty}}{2\ln 3+\frac{0}{+\infty}} = \frac{1}{2}.$$

[10.] Potřebujeme se zbavit odmocnin, což lze pomocí známého vzorečku

$$a-b=\frac{a^k-b^k}{\sum_{j=0}^{k-1}a^jb^{k-1-j}},$$

zde pro k rovno 2 a 3. Tedy

$$\frac{\sqrt[3]{n^3-1}-n}{n-\sqrt{n^2-1}} = \frac{n+\sqrt{n^2-1}}{(n^3-1)^{2/3}+\sqrt[3]{n^3-1}\cdot n+n^2}\cdot\frac{n^3-1-n^3}{n^2-n^2+1} =$$
$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\sqrt{1-1/n^2}}{(1-1/n^3)^{2/3}+\sqrt[3]{1-1/n^3}+1}\longrightarrow 0\cdot\frac{2}{3}=0.$$

[11.] Nejprve výraz upravíme

$$n\ln\frac{n^2+2n-3}{n^2+n-2} = n\ln\frac{(n-1)(n+3)}{(n-1)(n+2)} = n\ln\frac{n+2+1}{n+2} = \ln\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^n.$$

Protože ale

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n+2}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{-2} = e$$

je naší hledanou limitou

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n^2+2n-3}{n^2+n-2} = \ln e = 1.$$

[12.] Pro jmenovatel platí $\cos n\pi = (-1)^n$, $n\in\mathbb{Z}$. Označíme-li si naší posloupnost jako (a_n), pak vybráním podposloupností se sudými, resp. lichými, indexy dostáváme

$$a_{2n} = \frac{+1}{1+2^{-2n}}\longrightarrow 1,\quad \text{když } n\to\infty,$$
$$a_{2n+1} = \frac{-1}{1+2^{-2n-1}}\longrightarrow -1,\quad \text{když } n\to\infty.$$

Protože $1\neq -1$ limita v zadání nemůže existovat.

[13.] Vyšetříme absolutní konvergenci zadané řady. Protože

$$\frac{\left|(-1)^{k+1}\frac{2^{k+1}}{1+3^{k+1}}\right|}{\left|(-1)^k\frac{2^k}{1+3^k}\right|} = \frac{2^{k+1}}{1+3^{k+1}}\cdot\frac{1+3^k}{2^k} = 2\cdot\frac{1+3^k}{1+3^{k+1}} = 2\cdot\frac{3^{-k}+1}{3^{-k}+3}\to 2\cdot\frac{0+1}{0+3} = \frac{2}{3}<1,$$

podle d'Alembertova kritéria naše řada konverguje absolutně a proto i konverguje.

Alternativně můžeme postupovat pomocí srovnávacího kritéria. Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|(-1)^k \frac{2^k}{1+3^k}\right| \leq \frac{2^k}{0+3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty}(2/3)^k$ konverguje. Původní řada proto konverguje absolutně.

[14.] Podle srovnávacího kritéria řada konverguje, platí totiž

$$\left|2^{-k}\sin k\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

a řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

konverguje.

[15.] Jedná se o řadu se střídavými znaménky. Řada je totiž tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\, a_k, \quad a_k = \frac{k+1}{k^2+3} > 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ověříme podmínky Leibnizova kritéria, pro limitu platí

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{k^2+3} = 0$$

a posloupnost (a_k) je klesající, pro každé $k \in \mathbb{N}$ totiž platí

$$a_{k+1} < a_k \iff \frac{k+2}{k^2+2k+4} < \frac{k+1}{k^2+3} \iff k^3+2k^2+3k+6 < k^3+3k^2+6k+4 \iff 0 < k^2+3k-2.$$

Řada tedy podle Leibnizova kritéria konverguje. Absolutně ale nekonverguje, protože

$$\frac{k+1}{k^2+3} \geq \frac{k+1}{k^2+3k^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} > \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k}$$

a o řadě $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ víme, že diverguje.