Základy matematické analýzy

Úvodní přednáška

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz
[2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

Připomenutí: množina

Úmluva

Množinu budeme naivně chápat jako jednoznačně určenou sadu objektů.

Připomenutí: množina

Úmluva

Množinu budeme naivně chápat jako jednoznačně určenou sadu objektů.

Fakt, že x **je prvkem** množiny M značíme zkráceně $x \in M$. Pokud x **není prvkem** množiny M píšeme $x \notin M$.

Připomenutí: množina

Úmluva

Množinu budeme naivně chápat jako jednoznačně určenou sadu objektů.

Fakt, že x **je prvkem** množiny M značíme zkráceně $x \in M$. Pokud x **není prvkem** množiny M píšeme $x \notin M$.

Množinu můžeme popsat výčtem jejích prvků. K dispozici máme několik způsobů:

Připomenutí: množina

Úmluva

Množinu budeme naivně chápat jako jednoznačně určenou sadu objektů.

Fakt, že x **je prvkem** množiny M značíme zkráceně $x \in M$. Pokud x **není prvkem** množiny M píšeme $x \notin M$.

Množinu můžeme popsat výčtem jejích prvků. K dispozici máme několik způsobů:

- $M = \{a,\ b,\ c, \ldots\}$ představuje množinu obsahující prvky a, b, c a případně další prvky (které jsou zadané jistým pravidlem jež je patrné z prvních několika uvedených členů). Např. $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ značí množinu obsahující právě tři prvky 1, 2 a 3.

Připomenutí: množina

Úmluva

Množinu budeme naivně chápat jako jednoznačně určenou sadu objektů.

Fakt, že x **je prvkem** množiny M značíme zkráceně $x \in M$. Pokud x **není prvkem** množiny M píšeme $x \notin M$.

Množinu můžeme popsat výčtem jejích prvků. K dispozici máme několik způsobů:

- $M = \{a,\ b,\ c, \dots\}$ představuje množinu obsahující prvky a, b, c a případně další prvky (které jsou zadané jistým pravidlem jež je patrné z prvních několika uvedených členů). Např. $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ značí množinu obsahující právě tři prvky 1, 2 a 3.
- $M = \{x \in N \mid A(x)\}$ představuje množinu všech prvků x z množiny N pro něž je výrok $A(x)$ pravdivý. Např. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ je stejná množina jako množina B v předcházejícím bodě.

Připomenutí: operace s množinami

Množinu neobsahující žádné prvky nazýváme **prázdnou množinou** a značíme ji symbolem $\emptyset$.

Množina A je **podmnožinou** množiny B, v symbolech $A \subset B$, právě když každý prvek množiny A patří do množiny B.

Dvě množiny A a B jsou **shodné**, v symbolech $A = B$, právě když $A \subset B$ a současně $B \subset A$.

Připomenutí: operace s množinami

Množinu neobsahující žádné prvky nazýváme **prázdnou množinou** a značíme ji symbolem $\emptyset$.

Množina A je **podmnožinou** množiny B, v symbolech $A \subset B$, právě když každý prvek množiny A patří do množiny B.

Dvě množiny A a B jsou **shodné**, v symbolech $A = B$, právě když $A \subset B$ a současně $B \subset A$.

Mezi množinami zavádíme operaci průniku $\cap$ a sjednocení $\cup$.

- **Průnik** dvou množin je množina obsahující všechny objekty patřící současně do obou původních množin.
- **Sjednocení** dvou množina je množina obsahující všechny objekty patřící alespoň do jedné z původních množin.

Uspořádaná dvojice

Jsou-li x a y prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro jejich **uspořádanou dvojici**. Prvek x (resp. y) nazýváme **první** (resp. **druhou**) **složkou** uspořádané dvojice (x, y).

Uspořádaná dvojice

Jsou-li x a y prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro jejich **uspořádanou dvojici**. Prvek x (resp. y) nazýváme **první** (resp. **druhou**) **složkou** uspořádané dvojice (x, y).

Jsou-li (x, y) a (u, v) dvě uspořádané dvojice, pak definujeme **rovnost**

$$(x, y) = (u, v) \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x = u \text{ a } y = v.$$

Podobně definujeme uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Uspořádaná dvojice

Jsou-li x a y prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro jejich **uspořádanou dvojici**. Prvek x (resp. y) nazýváme **první** (resp. **druhou**) **složkou** uspořádané dvojice (x, y).

Jsou-li (x, y) a (u, v) dvě uspořádané dvojice, pak definujeme **rovnost**

$$(x, y) = (u, v) \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x = u \text{ a } y = v.$$

Podobně definujeme uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Poznámka:

Všimněte si, že $\{x, y\}$ je množina shodná s $\{y, x\}$, kdežto uspořádané dvojice (x, y) a (y, x) nejsou stejné (obecně). Přesto lze uspořádanou dvojici zavést pomocí množinových pojmů, např. dvojici (x, y) lze ztotožnit s $\big\{x, \{x, y\}\big\}$.

Kartézský součin

Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Tedy symbolicky

$$A \times B := \big\{(x, y) \,\big|\, x \in A \text{ a } y \in B\big\}.$$

Množina $A \times B$ se nazývá **kartézský součin** množin A a B.

Kartézský součin

Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Tedy symbolicky

$$A \times B := \big\{(x, y) \,\big|\, x \in A \text{ a } y \in B\big\}.$$

Množina $A \times B$ se nazývá **kartézský součin** množin A a B.

Příklad.

Pro $A = \{1, 4, 2\}$ a $B = \{\triangle, \to\}$ platí

$$A \times B = \big\{(1, \triangle), (1, \to), (4, \triangle), (4, \to), (2, \triangle), (2, \to)\big\}.$$

Kartézský součin

Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Tedy symbolicky

$$A \times B := \left\{(x, y) \,\middle|\, x \in A \text{ a } y \in B\right\}.$$

Množina $A \times B$ se nazývá **kartézský součin** množin A a B.

Příklad.

Pro $A = \{1, 4, 2\}$ a $B = \{\triangle, \rightarrow\}$ platí

$$A \times B = \left\{(1, \triangle), (1, \rightarrow), (4, \triangle), (4, \rightarrow), (2, \triangle), (2, \rightarrow)\right\}.$$

Poznámka:

- Pojmenován na počest René Descarta (latinsky *Renatus Cartesius*).
- $\times$ je nekomutativní operace, tj. $A \times B$ je obecně množina různá od $B \times A$.

Relace

Definice:

- **Relace** $\mathcal{R}$ mezi množinami A a B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.
- Je-li $A = B$, mluvíme o relaci **na množině** A.
- Je-li $(x, y) \in \mathcal{R}$, pak říkáme že x a y **jsou v relaci** $\mathcal{R}$ a zkráceně tento fakt zapisujeme $x\mathcal{R}y$.

Relace

Definice:

- **Relace** $\mathcal{R}$ mezi množinami A a B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.
- Je-li $A = B$, mluvíme o relaci **na množině** A.
- Je-li $(x, y) \in \mathcal{R}$, pak říkáme že x a y **jsou v relaci** $\mathcal{R}$ a zkráceně tento fakt zapisujeme $x\mathcal{R}y$.

- Pomocí relací můžeme přesně formalizovat „vztah“ mezi různými objekty. Reálné funkce reálné proměnné, kterými se budeme zabývat po zbytek semestru, jsou speciálním příkladem relací.

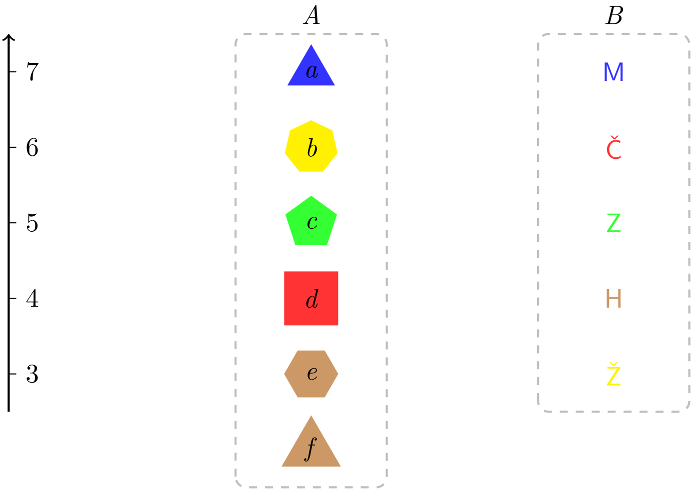
Relace

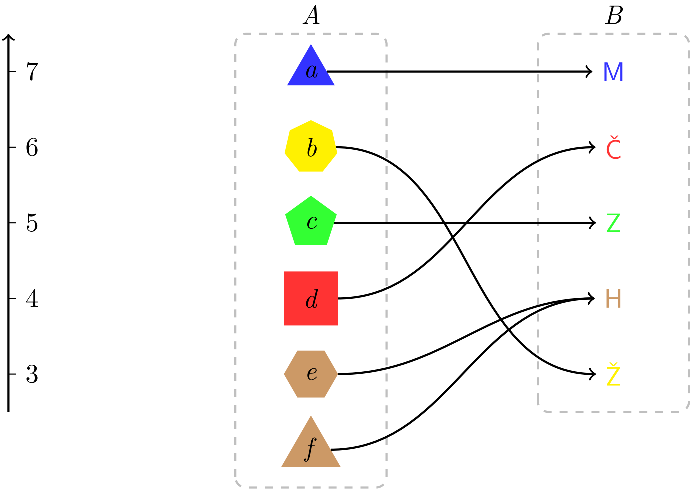
Definice:

- **Relace** $\mathcal{R}$ mezi množinami A a B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.
- Je-li $A = B$, mluvíme o relaci **na množině** A.
- Je-li $(x, y) \in \mathcal{R}$, pak říkáme že x a y **jsou v relaci** $\mathcal{R}$ a zkráceně tento fakt zapisujeme $x\mathcal{R}y$.

- Pomocí relací můžeme přesně formalizovat „vztah“ mezi různými objekty. Reálné funkce reálné proměnné, kterými se budeme zabývat po zbytek semestru, jsou speciálním příkladem relací.

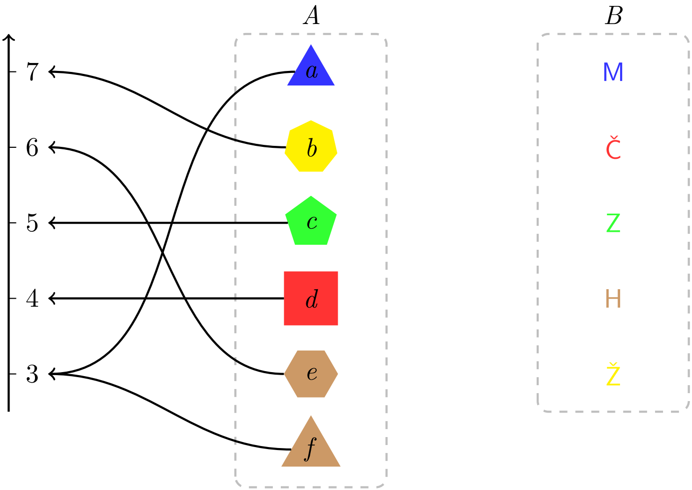
- Relace tvoří základ teorie podpírající relační databáze. Na FIT se s nimi setkáte v předmětu BI-DBS (Databázové systémy, 2. ročník).


7
6
5
4
3
A
a
b
c
d
e
f
B
M
Č
Z
H
Ž



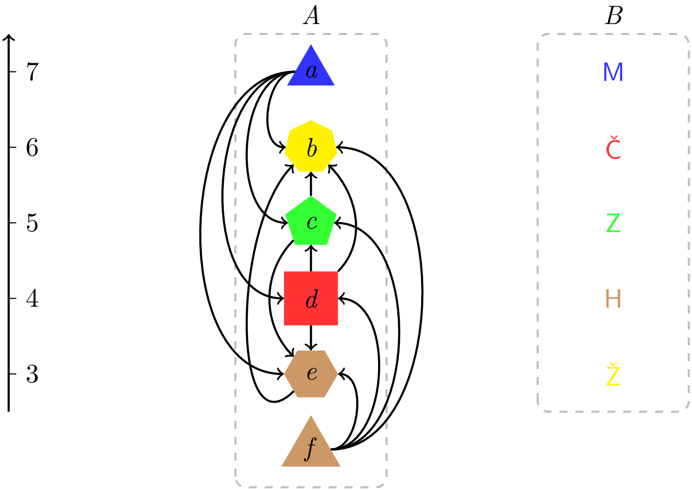
$x\,\mathcal{C}\,y$: x má barvu y

$$\mathcal{C} \subset A \times B, \quad \mathcal{C} = \Big\{(a, \mathsf{M}),\ (b, \check{\mathsf{Z}}),\ (c, \mathsf{Z}),\ (d, \check{\mathsf{C}}),\ (e, \mathsf{H}),\ (f, \mathsf{H})\Big\}$$



$x\mathcal{P}n$: x má n vrcholů

$$\mathcal{P} \subset A \times \mathbb{N}, \quad \mathcal{P} = \Big\{(a,3),\ (b,7),\ (c,5),\ (d,4),\ (e,6),\ (f,3)\Big\}$$



$x\mathcal{V}y$: x má méně vrcholů než y

$$\mathcal{V} \subset A \times A, \quad \mathcal{V} = \Big\{(a,b),\ (a,c),\ (a,d),\ (a,e), (c,b),\ (c,e)\ (d,b),\ (d,c),\ (d,e),\ (e,b),\ (f,b),\ (f,c),\ (f,d),\ (f,e)\Big\}$$

Relace

Podle toho jaké další požadavky na relaci naklademe, získáváme další důležité příklady relací. Mezi nejpoužívanější patří

- **ekvivalence**,
- **zobrazení**,
- **uspořádání**.

V následující části této přednášky se budeme věnovat zejména zobrazení.

Hlavní body

1. Relace
2. Zobrazení
3. Číselné množiny
4. Funkce
5. Důležité funkce
6. Matematická indukce

Zobrazení

Definice:

Zobrazení f z množiny A do množiny B je relace mezi množinami A a B s následující vlastností

- pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ tak, že xfy.

Toto zobrazení f značíme $f : A \to B$. Místo xfy píšeme $y = f(x)$ nebo $x \stackrel{f}{\mapsto} y$.

Zobrazení

Definice:

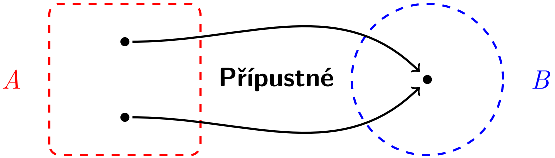
Zobrazení f z množiny A do množiny B je relace mezi množinami A a B s následující vlastností

- pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ tak, že xfy.

Toto zobrazení f značíme $f : A \to B$. Místo xfy píšeme $y = f(x)$ nebo $x \overset{f}{\mapsto} y$.

Poznámka:

„Nejvýše jedno“ znamená buď jedno nebo žádné.



Zobrazení

Definice:

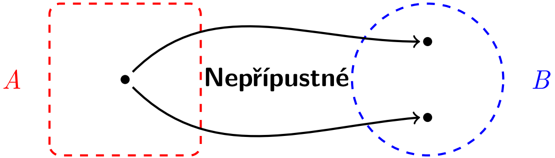
Zobrazení f z množiny A do množiny B je relace mezi množinami A a B s následující vlastností

- pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ tak, že xfy.

Toto zobrazení f značíme $f : A \to B$. Místo xfy píšeme $y = f(x)$ nebo $x \xmapsto{f} y$.

Poznámka:

„Nejvýše jedno" znamená buď jedno nebo žádné.



Terminologie spojená se zobrazením

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

Terminologie spojená se zobrazením

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x, nebo **obraz** x při zobrazení f.

Terminologie spojená se zobrazením

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x, nebo **obraz** x při zobrazení f.
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f.

Terminologie spojená se zobrazením

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x, nebo **obraz** x při zobrazení f.
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f.
- Množinu všech $x \in A$ takových, že existuje $y \in B$ splňujících $y = f(x)$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení f. Tedy

$$D_f = \left\{ x \in A \,\middle|\, \text{existuje } y \in B \text{ splňující } y = f(x) \right\}.$$

Terminologie spojená se zobrazením

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x, nebo **obraz** x při zobrazení f.
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f.
- Množinu všech $x \in A$ takových, že existuje $y \in B$ splňujících $y = f(x)$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení f. Tedy

$$D_f = \left\{ x \in A \,\middle|\, \text{existuje } y \in B \text{ splňující } y = f(x) \right\}.$$

- Množina všech obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí se H_f. Tedy

$$H_f = \left\{ y \in B \,\middle|\, \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x) \right\}.$$

Terminologie spojená se zobrazením

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek y nazýváme **hodnota** f v **bodě** x, nebo **obraz** x při zobrazení f.
- Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f.
- Množinu všech $x \in A$ takových, že existuje $y \in B$ splňujících $y = f(x)$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení f. Tedy

$$D_f = \left\{ x \in A \,\middle|\, \text{existuje } y \in B \text{ splňující } y = f(x) \right\}.$$

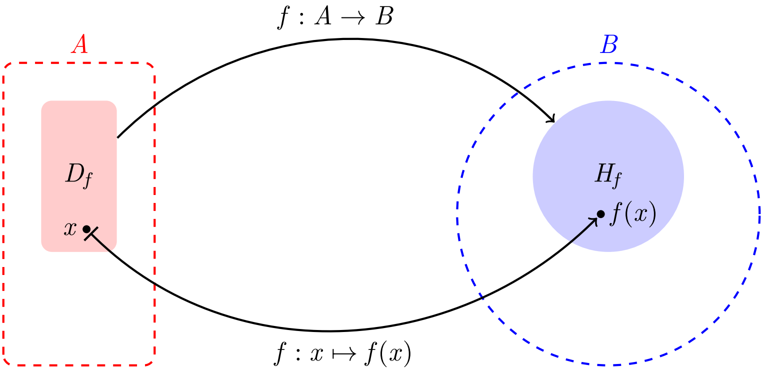
- Množina všech obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí se H_f. Tedy

$$H_f = \left\{ y \in B \,\middle|\, \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x) \right\}.$$

Buďte f a g dvě zobrazení z A do B. f a g jsou relace, tedy množiny. Podmínka jejich rovnosti $f = g$ je ekvivalentní podmínkám

$$D_f = D_g \quad \text{a současně} \quad f(x) = g(x) \text{ pro všechna } x \in D_f.$$

Zobrazení: ilustrace



Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : A \to B$ s $D_g := M$, kde $M \subset D_f$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení** f **na množinu** M. Zapisujeme $g = f\big|_M$.

Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : A \to B$ s $D_g := M$, kde $M \subset D_f$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení f na množinu M**. Zapisujeme $g = f\big|_M$.
- Množinu

$$f(S) := \Big\{ y \in B \,\Big|\, \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y \Big\},$$

kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny S při zobrazení f**.

Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : A \to B$ s $D_g := M$, kde $M \subset D_f$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení** f **na množinu** M. Zapisujeme $g = f\big|_M$.
- Množinu

  $$f(S) := \Big\{ y \in B \,\Big|\, \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y \Big\},$$

  kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny** S **při zobrazení** f.
- Je-li $N \subset B$, potom množinu

  $$f^{-1}(N) := \Big\{ x \in D_f \,\Big|\, \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y \Big\}$$

  nazveme **vzorem množiny** N při zobrazení f.

Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : A \to B$ s $D_g := M$, kde $M \subset D_f$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení f na množinu M**. Zapisujeme $g = f\big|_M$.
- Množinu

  $$f(S) := \left\{ y \in B \,\middle|\, \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y \right\},$$

  kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny S při zobrazení f**.
- Je-li $N \subset B$, potom množinu

  $$f^{-1}(N) := \left\{ x \in D_f \,\middle|\, \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y \right\}$$

  nazveme **vzorem množiny N** při zobrazení f.

Poznámka:

Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(N)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (viz dále).

Složené zobrazení

Definice:

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : A \to C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

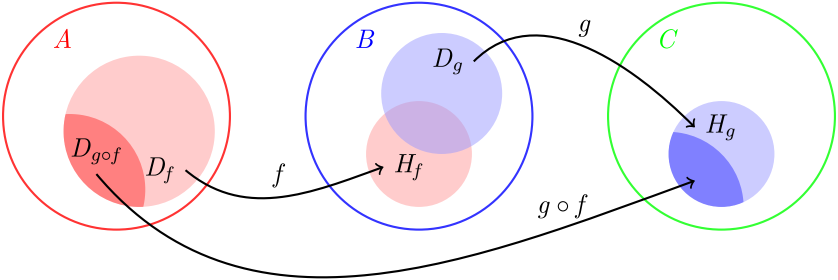
pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \big\{x \in D_f \,\big|\, f(x) \in D_g\big\}.$$

Poznámka:

Tedy $D_{g \circ f} \subset D_f$. I v případě, že $D_f \neq \emptyset$ a $D_g \neq \emptyset$ může nastat situace $D_{g \circ f} = \emptyset$.

Složené zobrazení: ilustrace



Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x, y \in D_f$, $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$.

Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x, y \in D_f$, $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$.

- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.

Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x, y \in D_f$, $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté a na.

Příklad (Identické zobrazení).

Buď A množina. Zobrazení $\mathrm{id}_A : A \to A$ definované předpisy

$$D_{\mathrm{id}_A} := A \quad \text{a} \quad \mathrm{id}_A(x) := x,\ x \in D_{\mathrm{id}_A},$$

nazýváme **identické zobrazení**.

Zobrazení id_A je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní.

Inverzní zobrazení

Definice:

Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H_f lze přiřadit právě jedno y z množiny D_f tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení f a značíme f^{-1}.

Inverzní zobrazení

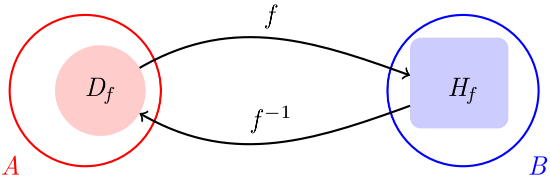
Definice:

Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H_f lze přiřadit právě jedno y z množiny D_f tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení f a značíme f^{-1}.

Poznámka:

Z definice ihned plyne, že $f^{-1} : B \to A$ a dále

$$D_{f^{-1}} = H_f, \qquad H_{f^{-1}} = D_f,$$
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{D_f}, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{H_f}.$$



Hlavní body

Číselné množiny

Známé číselné množiny označujeme v této přednášce následovně:

- **přirozená** čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- **celá** čísla $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
- **racionální** čísla $\mathbb{Q}$,
- **reálná** čísla $\mathbb{R}$,
- **komplexní** čísla $\mathbb{C}$.

Platí inkluze $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Nejvíce se budeme pohybovat v množině reálných čísel. Připomeňme proto její základní vlasnosti. . . .

Reálná čísla

Mezi reálnými čísly existují dvě významné binární operace (tj. zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Reálná čísla

Mezi reálnými čísly existují dvě významné binární operace (tj. zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Připomeňme speciálně, že rovnice $a + x = b$ má jediné řešení $x = b - a$.

Reálná čísla

Mezi reálnými čísly existují dvě významné binární operace (tj. zobrazení) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Připomeňme speciálně, že rovnice $a + x = b$ má jediné řešení $x = b - a$.

Analogicky rovnice $a \cdot x = b$ má pro $a \neq 0$ jediné řešení $x = \frac{b}{a}$.

Reálná čísla: uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje relace **uspořádaní** na $\mathbb{R}$:

$$a < b \quad \text{(číslo } a \text{ je menší než číslo } b\text{)},$$

resp.

$$a \leq b \quad \text{(číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b\text{)}.$$

Reálná čísla: uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje relace **uspořádaní** na $\mathbb{R}$:

$$a < b \quad \text{(číslo } a \text{ je menší než číslo } b\text{)},$$

resp.

$$a \leq b \quad \text{(číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b\text{)}.$$

Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že

$$\begin{aligned} a < b,\ c > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \\ a < b,\ c < 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c. \end{aligned}$$

Reálná čísla: uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje relace **uspořádaní** na $\mathbb{R}$:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že

$$\begin{aligned} a < b,\ c > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \\ a < b,\ c < 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c. \end{aligned}$$

Poznámka:

- Zdvojená šipka znamená **implikaci**, kterou čteme: Jestliže jsou splněny podmínky vlevo, pak platí tvrzení vpravo.
- O upořádání se podrobněji dozvíte v předmětu BI-MLO.

Reálná čísla: intervaly

Pomocí uspořádání definujeme také speciální podmnožiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**, pro $a, b \in \mathbb{R}$ klademe:

otevřený interval	$(a, b) = \big\{ x \in \mathbb{R} \,\big|\, a < x < b \big\}$,
uzavřený interval	$\langle a, b \rangle = \big\{ x \in \mathbb{R} \,\big|\, a \leq x \leq b \big\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval	$\langle a, b) = \big\{ x \in \mathbb{R} \,\big|\, a \leq x < b \big\}$,
analogicky	$(a, b\rangle = \big\{ x \in \mathbb{R} \,\big|\, a < x \leq b \big\}$.

Reálná čísla: intervaly

Pomocí uspořádání definujeme také speciální podmnožiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**, pro $a, b \in \mathbb{R}$ klademe:

otevřený interval	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
uzavřený interval	$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval	$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
analogicky	$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

A neomezené intervaly

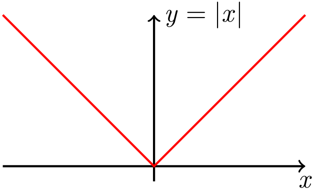
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad \text{atd.}$$

Ve všech těchto intervalech je a tzv. **počáteční** bod a b tzv. **koncový** bod intervalu.

Vzdálenost reálných čísel

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla a předpisem

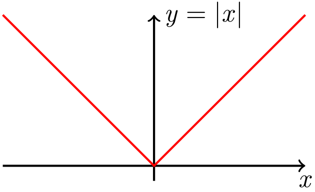
$$|a| := \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



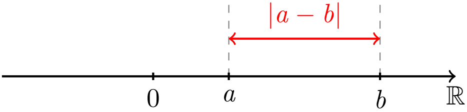
Vzdálenost reálných čísel

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla a předpisem

$$|a| := \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Vzdálenost dvou čísel $a, b \in \mathbb{R}$ je rovna $\left|a - b\right| = \left|b - a\right|$.



Vlastnosti absolutní hodnoty

Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0\,.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.

Vlastnosti absolutní hodnoty

Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \ b \neq 0\,.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti.

Mají-li obě čísla a a b stejné znaménko, dostáváme z definice absolutní hodnoty rovnost. Předpokládejme, že $a > 0$ a $b < 0$.

- Je-li $a + b \geq 0$, pak $|a+b| = a + b < a - b = |a| + |b|$.
- Je-li $a + b < 0$, pak $|a+b| = -a - b < a - b = |a| + |b|$. $\square$

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická." Nelze ji popsat nijak jednoduše.

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.

- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.
- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.
- Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry.“

Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.
- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.
- Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry.“
- Objasněme tento požadavek na následujícím příkladu.

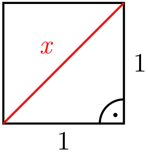
Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$.

Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$.

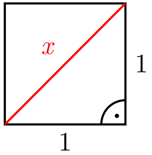
- Motivací této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.



Příklad.

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$.

- Motivací této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.

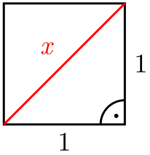


- Pokud řešení existuje, nemůže jím být racionální číslo. Toto tvrzení dokážeme **sporem**.

Příklad.

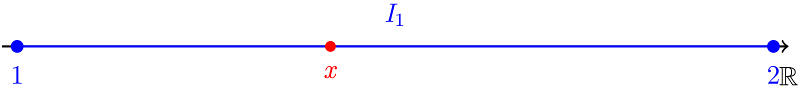
Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$.

- Motivací této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.

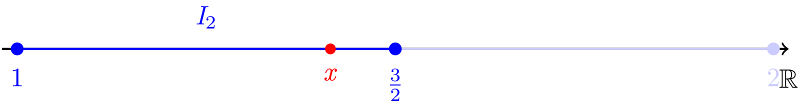


- Pokud řešení existuje, nemůže jím být racionální číslo. Toto tvrzení dokážeme **sporem**.

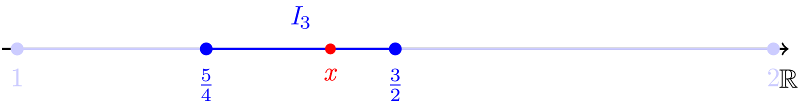
- Nyní ukážeme jak lze dospět k existenci (iracionálního) řešení x.



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.

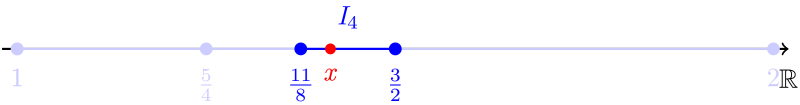


- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.

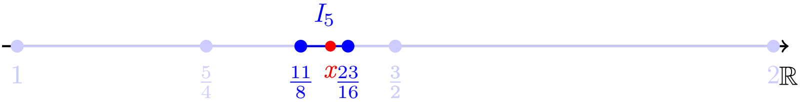


- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, že $\mathbb{R}$ nemá díry v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, že $\mathbb{R}$ nemá díry v tomto případě znamená, že
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$



- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu I_1 zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, že $\mathbb{R}$ nemá díry v tomto případě znamená, že
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.

Přesněji, pokud jsou I_n, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

$I_n \supset I_{n+1}, \; n = 1, 2, \ldots,$

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Hlavní body

Reálná funkce reálné proměnné

Definice:

Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Reálná funkce reálné proměnné

Definice:

Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka:

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** nazýváme množinu všech reálných x pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

Reálná funkce reálné proměnné

Definice:

Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka:

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** nazýváme množinu všech reálných x pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

Příklad.

Uvažme výraz $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem je množina

$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Takto definovaná funkce je dána relací

$$f = \left\{ \left(x, \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \langle 0, 1) \cup (1, +\infty) \right\}.$$

Graf funkce

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \Big\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\Big|\, x \in D_f \Big\}.$$

Graf funkce

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_f \right\}.$$

- x je hodnota **nezávisle** proměnné znázorňovaná zpravidla na vodorovné ose a $f(x)$ je hodnota funkce f v bodě x (též hodnota **závislé** proměnné), která se znázorňuje na svislé ose.

Graf funkce

Grafem funkce f nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_f \right\}.$$

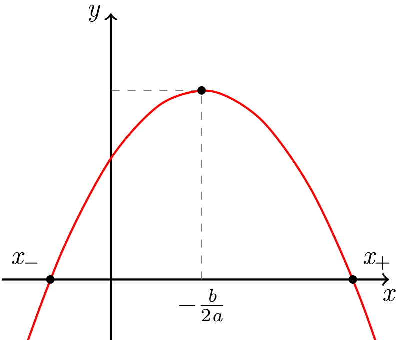
- x je hodnota **nezávisle** proměnné znázorňovaná zpravidla na vodorovné ose a $f(x)$ je hodnota funkce f v bodě x (též hodnota **závislé** proměnné), která se znázorňuje na svislé ose.
- Graf funkce f je podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, který teď chápeme jako rovinu s vyznačeným počátkem (bodem $(0, 0)$) a s vodorovnou souřadnou osou

$$\left\{ (x, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\},$$

  a svislou souřadnou osou

$$\left\{ (0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Graf funkce: příklad paraboly



Připomeňme graf paraboly

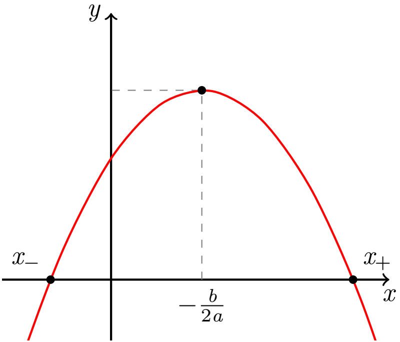
$$y = ax^2 + bx + c.$$

Reálné kořeny

$$x_\pm = \frac{1}{2a}\Big(- b \pm \sqrt{D}\Big),$$

pokud $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

Graf funkce: příklad paraboly



Připomeňme graf paraboly

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Reálné kořeny

$$x_\pm = \frac{1}{2a}\Big(- b \pm \sqrt{D}\Big),$$

pokud $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

Mathematica

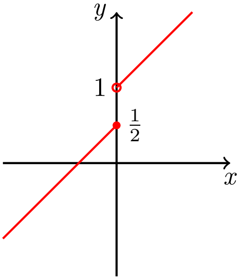
Vykreslit graf funkce f na intervalu (a, b) můžete pomocí příkazu:

```
Plot[f[x], {x,a,b}, Options]
```

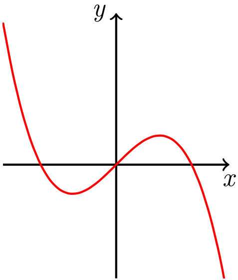
Všimněte si hranatých závorek u argumentů. Funkci definujeme `f[x_] = x`^{2}.

Příklad.

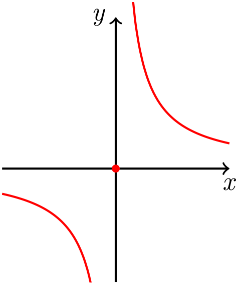
Která z následujících funkcí ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) je prostá, na, či bijektivní?



$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$f(x) = x\left(1 - x^2\right)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Definice:

Funkce f se nazývá

- **rostoucí na intervalu** I, jestliže

$$\text{pro každé } x, y \in I \text{ splňující } x < y \text{ platí } f(x) < f(y),$$

- **klesající na intervalu** I, jestliže

$$\text{pro každé } x, y \in I \text{ splňující } x < y \text{ platí } f(x) > f(y).$$

Je-li funkce buď rostoucí nebo klesající na intervalu I, pak se nazývá **monotonní** na intervalu I.

Definice:

Funkce f se nazývá

- **rostoucí na intervalu** I, jestliže

  pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) < f(y)$,

- **klesající na intervalu** I, jestliže

  pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) > f(y)$.

Je-li funkce buď rostoucí nebo klesající na intervalu I, pak se nazývá **monotonní** na intervalu I.

Každá monotónní funkce je prostá.

Definice:

Funkce f se nazývá

- **rostoucí na intervalu** I, jestliže

  pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) < f(y)$,

- **klesající na intervalu** I, jestliže

  pro každé $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) > f(y)$.

Je-li funkce buď rostoucí nebo klesající na intervalu I, pak se nazývá **monotonní** na intervalu I.

Každá monotónní funkce je prostá.

Příklad.

Příkladem rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ je lichá mocnina (a také lichá odmocnina). Funkce $f(x) = x^2$ není na $\mathbb{R}$ ani rostoucí ani klesající, ale je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Hlavní body

Elementární funkce

Mezi elementární funkce patří:

- Polynomy,
- Exponenciální funkce,
- Trigonometrické funkce,
- Funkce inverzní k předchozím,
    - Speciálně odmocniny, logaritmy,
- Součty, součiny a podíly předchozích funkcí,
    - Speciálně racionální lomené funkce,
- Složení předchozích funkcí.

Mocniny a odmocniny

- Definujeme **přirozenou mocninu** vztahy

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ členů}}, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},$$

$$x^0 := 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mocniny a odmocniny

- Definujeme **přirozenou mocninu** vztahy

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ členů}}, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},$$
$$x^0 := 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Dále pro záporná celá čísla n klademe

$$x^n := \frac{1}{x^{-n}} \quad \text{pro } x \neq 0,$$

- Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

jako reálné řešení rovnice $x^n = a$. Podrobněji:

- Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

jako reálné řešení rovnice $x^n = a$. Podrobněji:

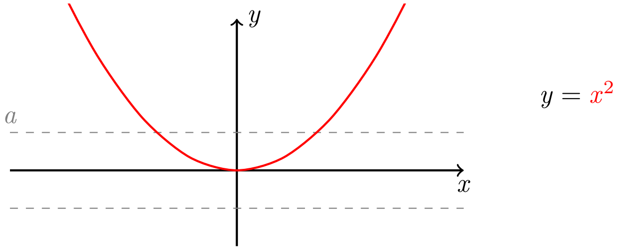
- Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, **sudé**, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice má reálné řešení jen pro $a \geq 0$.

- Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

jako reálné řešení rovnice $x^n = a$. Podrobněji:

- Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, **sudé**, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice má reálné řešení jen pro $a \geq 0$.

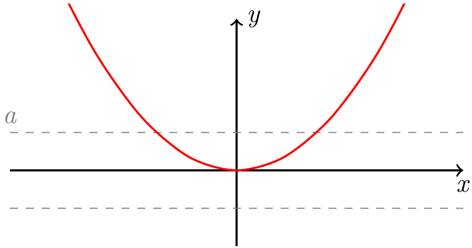


- Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

jako reálné řešení rovnice $x^n = a$. Podrobněji:

- Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, **sudé**, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice má reálné řešení jen pro $a \geq 0$.

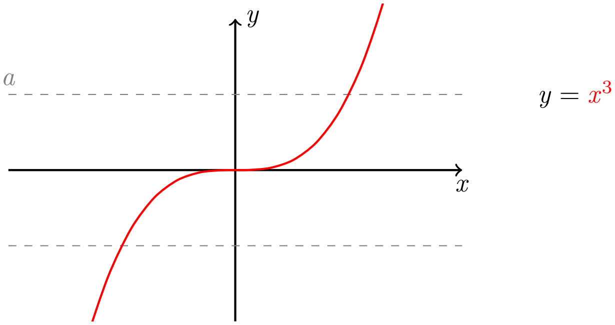


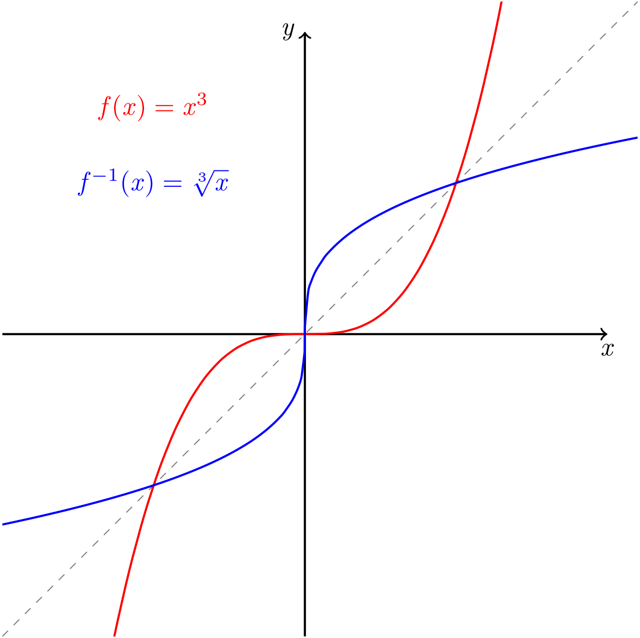
$y = x^2$

Pro $a > 0$ jsou tato řešení dvě, neboť $x^{2k} = (-x)^{2k}$. Sudou odmocninu $\sqrt[2k]{a}$ definujeme jako nezáporné řešení. Je proto $\sqrt{x^2} = |x|$ a nikoli x, protože nevíme, jestli je x kladné nebo záporné.

Je-li $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$, **liché**, pak rovnice $x^{2k-1} = a$ má jediné řešení, které značíme $\sqrt[2k-1]{a}$. Například $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Je-li $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, **liché**, pak rovnice $x^{2k-1} = a$ má jediné řešení, které značíme $\sqrt[2k-1]{a}$. Například $\sqrt[3]{-8} = -2$.




y
$f(x) = x^3$
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
x

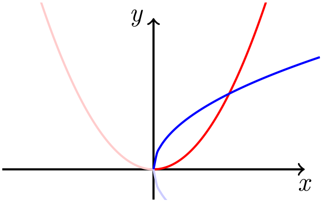
- Vzhledem k této terminologii je lichá odmocnina $f^{-1}(y) = \sqrt[2k+1]{y}$ inverzní funkcí k liché mocnině $f(x) = x^{2k+1}$. Protože $H_f = \mathbb{R}$ (to ale vůbec není zřejmé) je $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

- Vzhledem k této terminologii je lichá odmocnina $f^{-1}(y) = \sqrt[2k+1]{y}$ inverzní funkcí k liché mocnině $f(x) = x^{2k+1}$. Protože $H_f = \mathbb{R}$ (to ale vůbec není zřejmé) je $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

- Sudé mocniny $g(x) = x^{2k}$ nejsou na $\mathbb{R}$ prosté. Ale zúžíme-li definiční obor na interval $\langle 0, +\infty)$ pak funkce $h = g\big|_{\langle 0,+\infty)}$ je již na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí a tedy prostá. Inverzní funkce $h^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ má definiční obor interval $\langle 0, +\infty)$, protože $H_h = \langle 0, +\infty)$, a je na tomto intervalu rostoucí.

- Vzhledem k této terminologii je lichá odmocnina $f^{-1}(y) = \sqrt[2k+1]{y}$ inverzní funkcí k liché mocnině $f(x) = x^{2k+1}$. Protože $H_f = \mathbb{R}$ (to ale vůbec není zřejmé) je $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

- Sudé mocniny $g(x) = x^{2k}$ nejsou na $\mathbb{R}$ prosté. Ale zúžíme-li definiční obor na interval $\langle 0, +\infty)$ pak funkce $h = g\big|_{\langle 0,+\infty)}$ je již na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí a tedy prostá. Inverzní funkce $h^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ má definiční obor interval $\langle 0, +\infty)$, protože $H_h = \langle 0, +\infty)$, a je na tomto intervalu rostoucí.



- Doposud definované mocniny mají následující vlastnosti:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

pro taková a, b, x, aby výrazy vlevo i vpravo byly definované.

- Doposud definované mocniny mají následující vlastnosti:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

pro taková a, b, x, aby výrazy vlevo i vpravo byly definované.

- Definici mocniny x^a můžeme rozšířit na všechna $a \in \mathbb{R}$ (později ukážeme jak to lze udělat), ale obecně jen pro $x > 0$ a pro $a > 0$ pro $x \geq 0$. Tato obecná mocnina má stejné vlastnosti jak byly uvedeny výše.

- Doposud definované mocniny mají následující vlastnosti:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

pro taková a, b, x, aby výrazy vlevo i vpravo byly definované.

- Definici mocniny x^a můžeme rozšířit na všechna $a \in \mathbb{R}$ (později ukážeme jak to lze udělat), ale obecně jen pro $x > 0$ a pro $a > 0$ pro $x \geq 0$. Tato obecná mocnina má stejné vlastnosti jak byly uvedeny výše.

- Poznamenejme ještě, že často používáme zápis $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.

Exponenciální a logaritmické funkce

- V předcházejícím bodu jsme mluvili o obecné mocnině jako o funkci $x \mapsto x^a$, tj. s proměnným základem.

Exponenciální a logaritmické funkce

- V předcházejícím bodu jsme mluvili o obecné mocnině jako o funkci $x \mapsto x^a$, tj. s proměnným základem.
- Můžeme také považovat základ za konstantní a exponent za proměnný.

Exponenciální a logaritmické funkce

- V předcházejícím bodu jsme mluvili o obecné mocnině jako o funkci $x \mapsto x^a$, tj. s proměnným základem.
- Můžeme také považovat základ za konstantní a exponent za proměnný.

Definice:

Pro $b > 0$ se funkce typu $x \mapsto b^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazývá **exponenciální funkce**.

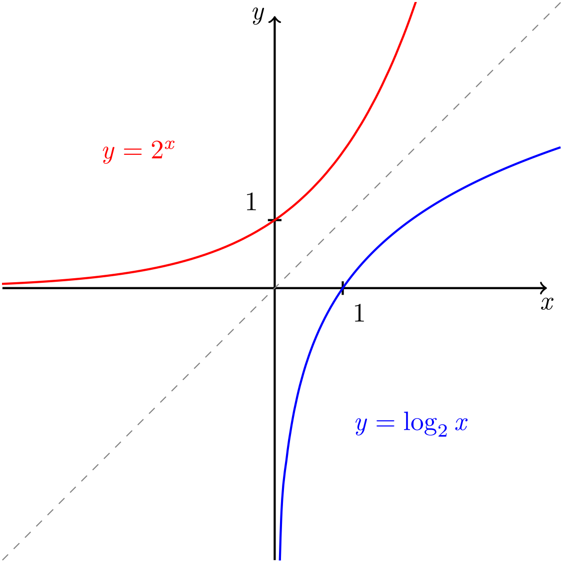
Exponenciální a logaritmické funkce

- V předcházejícím bodu jsme mluvili o obecné mocnině jako o funkci $x \mapsto x^a$, tj. s proměnným základem.
- Můžeme také považovat základ za konstantní a exponent za proměnný.

Definice:

Pro $b > 0$ se funkce typu $x \mapsto b^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazývá **exponenciální funkce**.

Pro $b > 1$ je funkce $f(x) = b^x$ rostoucí na $\mathbb{R}$ a je $H_f = (0, +\infty)$ (to také není zřejmé). Existuje proto inverzní funkce, která se nazývá logaritmická o základu b – označení $\log_b$.



y
$y = 2^x$
1
1
x
$y = \log_2 x$

Platí tedy

$$b^x = y \iff x = \log_b y \quad (b > 1,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0).$$

Funkce $\log_b$ je definovaná a rostoucí (stále $b > 1$) na intervalu $(0, +\infty)$.

Platí tedy

$$b^x = y \iff x = \log_b y \quad (b > 1,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0).$$

Funkce $\log_b$ je definovaná a rostoucí (stále $b > 1$) na intervalu $(0, +\infty)$.

Její vlastnosti jsou odvozeny z vlastností exponenciální funkce:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y\,, \quad x, y > 0\,,$$

(tato vlastnost se dříve používala pro násobení na tzv. logaritmickém pravítku)

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y\,, \quad \log_b(x^c) = c \cdot \log_b x\,, \quad x, y > 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

Platí tedy

$$b^x = y \iff x = \log_b y \quad (b > 1,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0).$$

Funkce $\log_b$ je definovaná a rostoucí (stále $b > 1$) na intervalu $(0, +\infty)$.

Její vlastnosti jsou odvozeny z vlastností exponenciální funkce:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y\,, \quad x, y > 0\,,$$

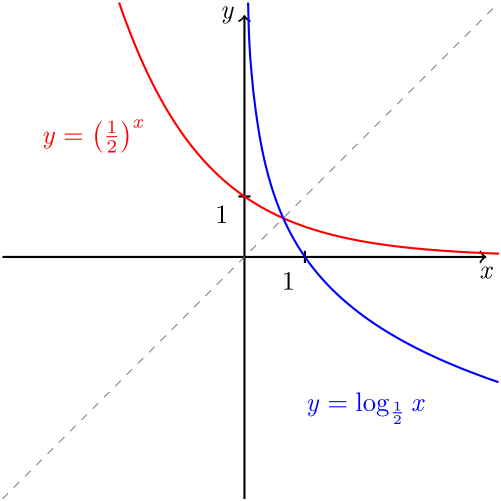
(tato vlastnost se dříve používala pro násobení na tzv. logaritmickém pravítku)

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y\,, \quad \log_b(x^c) = c \cdot \log_b x\,, \quad x, y > 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že zcela zvláštní místo v matematice má exponenciální funkce se základem e (**Eulerovo** číslo, $e = 2.718\ldots$, je iracionální) o níž bude řeč později. Inverzní funkce k ní se nazývá **přirozený logaritmus** a značí se $\ln$.

Je-li základ exponenciální funkce $b \in (0,1)$, pak funkce $x \mapsto b^x$ je klesající na $\mathbb{R}$ a inverzní funkce k ní (opět $\log_b$) je definovaná a klesající na intervalu $(0,+\infty)$.

Je-li základ exponenciální funkce $b \in (0,1)$, pak funkce $x \mapsto b^x$ je klesající na $\mathbb{R}$ a inverzní funkce k ní (opět $\log_b$) je definovaná a klesající na intervalu $(0,+\infty)$.



Občas je užitečný převodní vztah mezi exponenciálními funkcemi o různých základech: Pro $a, b > 0$, $a \neq 1 \neq b$, $x \in \mathbb{R}$, je

$$b^x = a^{x \log_a b},$$

jak snadno nahlédneme řešením rovnice $b^x = a^y$ vzhledem k neznámé y je

$$y = \log_a b^x = x \log_a b\,.$$

Občas je užitečný převodní vztah mezi exponenciálními funkcemi o různých základech: Pro $a, b > 0$, $a \neq 1 \neq b$, $x \in \mathbb{R}$, je

$$b^x = a^{x \log_a b},$$

jak snadno nahlédneme řešením rovnice $b^x = a^y$ vzhledem k neznámé y je

$$y = \log_a b^x = x \log_a b.$$

Podobně (pro stejné hodnoty a, b, x jako výše)

$$\log_a x = (\log_a b)(\log_b x).$$

Občas je užitečný převodní vztah mezi exponenciálními funkcemi o různých základech: Pro $a, b > 0$, $a \neq 1 \neq b$, $x \in \mathbb{R}$, je

$$b^x = a^{x \log_a b},$$

jak snadno nahlédneme řešením rovnice $b^x = a^y$ vzhledem k neznámé y je

$$y = \log_a b^x = x \log_a b.$$

Podobně (pro stejné hodnoty a, b, x jako výše)

$$\log_a x = (\log_a b)(\log_b x).$$

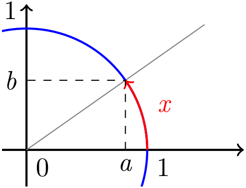
Ještě poznamenejme, že funkce $x \mapsto x^x$ není ani mocninná ani exponenciální, protože má jak proměnný základ, tak exponent. V souladu s předcházejícím je definovaná takto $x^x = e^{x \ln x}$.

Goniometrické funkce

Funkce **sinus** ($\sin$) a **kosinus** ($\cos$) se zpravidla definují pomocí souřadnic (a, b) bodu v rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ležícího na kružnici o středu v počátku $(0, 0)$ a poloměru 1.

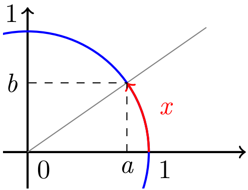
Goniometrické funkce

Funkce **sinus** ($\sin$) a **kosinus** ($\cos$) se zpravidla definují pomocí souřadnic (a, b) bodu v rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ležícího na kružnici o středu v počátku $(0, 0)$ a poloměru 1.



Goniometrické funkce

Funkce **sinus** ($\sin$) a **kosinus** ($\cos$) se zpravidla definují pomocí souřadnic (a, b) bodu v rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ležícího na kružnici o středu v počátku $(0, 0)$ a poloměru 1.



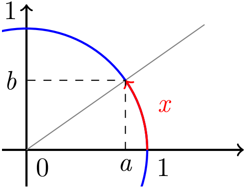
Označíme-li x délku kruhového oblouku od bodu $(1, 0)$ do bodu (a, b) (x je velikost příslušného úhlu v tzv. obloukové míře), pak klademe

$$\cos x := a\,, \ \sin x := b\,.$$

Tím jsou definovány funkce $\cos$ a $\sin$ pro $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (2π je délka příslušné kružnice).

Goniometrické funkce

Funkce **sinus** ($\sin$) a **kosinus** ($\cos$) se zpravidla definují pomocí souřadnic (a, b) bodu v rovině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ležícího na kružnici o středu v počátku $(0, 0)$ a poloměru 1.



Z Pythagorovy věty (zde $a^2 + b^2 = 1$) ihned plyne veleznámý vztah

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

Označíme-li x délku kruhového oblouku od bodu $(1, 0)$ do bodu (a, b) (x je velikost příslušného úhlu v tzv. obloukové míře), pak klademe

$$\cos x := a\,,\ \sin x := b\,.$$

Tím jsou definovány funkce $\cos$ a $\sin$ pro $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (2π je délka příslušné kružnice).

Funkce sinus a kosinus lze 2π-periodicky rozšířit, tj. klademe

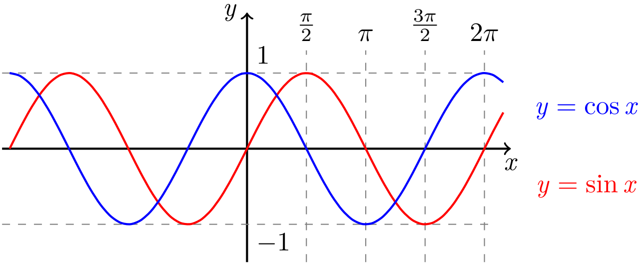
$$\cos x = \cos(x - 2k\pi) \;, \quad \sin x = \sin(x - 2k\pi)$$

pro $x \in \langle 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce sinus a kosinus lze 2π-periodicky rozšířit, tj. klademe

$$\cos x = \cos(x - 2k\pi)\ , \quad \sin x = \sin(x - 2k\pi)$$

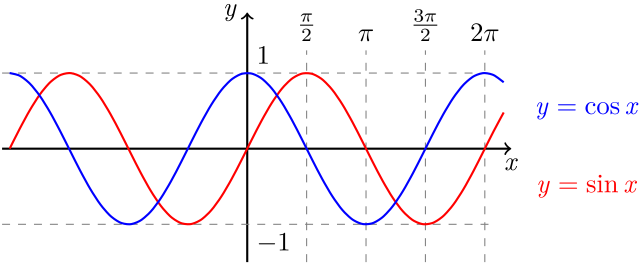
pro $x \in \langle 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



Funkce sinus a kosinus lze 2π-periodicky rozšířit, tj. klademe

$$\cos x = \cos(x - 2k\pi)\ , \quad \sin x = \sin(x - 2k\pi)$$

pro $x \in \langle 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



Poznámka:

Je dobré znát hodnoty funkcí sinus a kosinus aspoň pro několik dalších význačných úhlů: $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/4$.

Ještě budeme používat funkce **tangens** (tg) a **kotangens** (cotg), které mají periodu π a definujeme je pomocí podílů

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \qquad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right),$$

$$\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}\,, \qquad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \big(k\pi, (k+1)\pi\big)\,.$$

Hlavní body

Matematická indukce

Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných kladnými přirozenými indexy $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Důkaz se provede ve dvou krocích:

Matematická indukce

Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných kladnými přirozenými indexy $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Důkaz se provede ve dvou krocích:

i) Dokaž první tvrzení, zde T_1.

Matematická indukce

Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných kladnými přirozenými indexy $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Důkaz se provede ve dvou krocích:

i) Dokaž první tvrzení, zde T_1.

ii) Pro libovolné přirozené n dokaž tzv. **indukční krok**:

$$\text{pokud platí } T_n, \text{ pak platí } T_{n+1}.$$

Matematická indukce

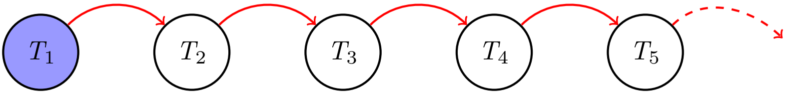
Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných kladnými přirozenými indexy $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Důkaz se provede ve dvou krocích:

i) Dokaž první tvrzení, zde T_1.

ii) Pro libovolné přirozené n dokaž tzv. **indukční krok**:

$$\text{pokud platí } T_n, \text{ pak platí } T_{n+1}.$$

Schéma indukce:



Binomická věta

Platí tzv. **binomická věta**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Binomická věta

Platí tzv. **binomická věta**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz provedeme indukcí:

Binomická věta

Platí tzv. **binomická věta**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz provedeme indukcí:

Pro $n = 1$ je

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &= a + b, \\ \mathrm{PS} &= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b. \end{aligned}$$

Vzpomeňte, že klademe $a^0 = 1$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Provedeme indukční krok

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[a^{k+1}b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}\right] \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right]a^j b^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j}.
\end{aligned}
$$

neboť z definice kombinačního čísla lze dokázat (vzpomeňte Pascalův trojúhelník), že

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$$

pro $j = 1, \ldots, n$.