Základy matematické analýzy

Primitivní funkce

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz   [2]daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

Primitivní funkce

Definice:

Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b).

Poznámka:

Ihned z definice plyne, že F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a, b) a tedy je i spojitá na (a, b).

Primitivní funkce

Příklad.

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).

Příklad.

Funkce $F(x) = \ln x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném intervalu $(a, b) \subset (0, +\infty)$.

Příklad.

Funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na libovolném intervalu (a, b).

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta:

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta:

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz.

Pokud F a G jsou funkce primitivní k f na intervalu (a, b), potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce $F - G$ je proto konstantní na intervalu (a, b).

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta:

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz.

Pokud F a G jsou funkce primitivní k f na intervalu (a, b), potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce $F - G$ je proto konstantní na intervalu (a, b).

Naopak, je-li $G(x) = F(x) + c$, pro libovolné $x \in (a, b)$, pak $G'(x) = F'(x)$. $\square$

Neurčitý integrál

Definice:

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Neurčitý integrál

Definice:

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka (Terminologie):

Najdeme-li k f primitivní funkci F v intervalu (a, b), zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Funkci f nazýváme **integrovanou funkcí**, x **integrační proměnnou** a c **integrační konstantou**. Úkolu určit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ říkáme „najít primitivní funkci k f“, nebo „vypočítat integrál z f“, nebo „integrovat f“.

Existence primitivní funkce

Poznámka:

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a, b), pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

Existence primitivní funkce

Poznámka:

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a, b), pak přímo z definice plyne
$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$
- Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a, b), potom opět přímo z definice plyne
$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Existence primitivní funkce

Poznámka:

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a, b), pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

- Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a, b), potom opět přímo z definice plyne

$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce):

Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Primitivní funkce elementárních funkcí...

Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku primitivních funkcí:

vzorec	interval, parametry
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$
$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\|x\| + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

. . . pokračování

vzorec	interval, parametry
$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg}(x) + C$	$x \in \left(k\pi,\ \pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce. $\square$

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce. $\square$

Poznámka:

Větu symbolicky zapisujeme a při výpočtech využíváme takto:

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f.$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte
$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x = 4\int x^2 \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int x^{-2/3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 4\cdot\frac{x^3}{3} - \ln|x| + \frac{x^{1/3}}{1/3} = \frac{4}{3}x^3 - \ln|x| + 3x^{1/3} + C.$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x &= \int \left(2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \int 4^x \mathrm{d}x + 2 \int 6^x \mathrm{d}x + \int 9^x \mathrm{d}x = \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.\end{aligned}$$

Hlavní body

Integrace per partes

Věta (Per partes):

Nechť funkce f je diferencovatelná v intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Integrace per partes

Věta (Per partes):

Nechť funkce f je diferencovatelná v intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Důkaz.

Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním

$$\left(fG - \int f'G\right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

Všimněte si, že ve výpočtu jsme použili pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí. $\square$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Jak si zapamatovat formuli?

$$\int fg = \left| \begin{matrix} f & \quad & g \\ & & \\ & & \end{matrix} \right| =$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Jak si zapamatovat formuli?

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ \downarrow & \downarrow \\ f' & G \end{array} \right| =$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Jak si zapamatovat formuli?

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ f' & G \end{array} \right| = fG$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Jak si zapamatovat formuli?

$$\int fg = \left| \begin{array}{ccc} f & & g \\ & & \\ f' & \color{blue}{\text{———}} & G \end{array} \right| = \color{red}{fG} - \color{blue}{\int f' G}.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{matrix} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$
$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Připomeňme, že výsledek můžeme snadno ověřit:

$$\big(- x \cos x + \sin x + C \big)' = - \cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$.

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$.

Nyní je potřeba per partes použít dvakrát.

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2 \int x e^x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} x & e^x \\ 1 & e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x =$$

$$= \left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x + C.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně:

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{arctg} x & 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Hlavní body

Substituce v neurčitém integrálu

Věta (O substituci I):

Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a, b),
2. φ je na intervalu (α, β) diferencovatelná,
3. $\varphi\big((\alpha, \beta)\big) \subset (a, b)$.

Pak funkce $f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big).$$

Substituce v neurčitém integrálu

Důkaz.

F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. □

Substituce v neurčitém integrálu

Důkaz.

F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. □

Poznámka:

Jedná se vlastně o „derivaci složené funkce naruby“.

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$.

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \mathrm{tg}\, x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \mathrm{tg}(x) \, \mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \mathrm{tg}(x) \,\mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Často se též substituce zapisuje jako $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x \,\mathrm{d}x$ a

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = -\ln|y| + C = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C.$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$. Potom $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \sin y\,\mathrm{d}y = \cos y + C = \cos\frac{1}{x} + C.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál
$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Pro substituci použijeme $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$, pro jejíž derivaci platí $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tudíž,

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y =$$
$$= 2\operatorname{arctg} y + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Věta (O substituci II):

Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C$$

Věta (O substituci II):

Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C$$

Důkaz.

Pomocí věty o derivaci inverzní funkce odvodíme, že

$$\begin{aligned}\Big(G\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)' &= G'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)} = \\ &= f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)} = f(x).\end{aligned}$$

□

Příklad.

Dokažte pomocí předchozí věty známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Příklad.

Dokažte pomocí předchozí věty známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu $(a,b) = (-1,1)$. Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha,\beta) := \big(-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\big).$$

Funkce $\sin$ je na intervalu (α, β) rostoucí s nenulovou derivací $\varphi'(t) = \cos t$. Dále

$$G(t) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t = \\ = \int \frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C.$$

Protože $t = \arcsin(x)$ uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C.$$

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Podobně jako v předchozím případě se lze zbavit odmocniny. Nyní je však integrand definován na $\mathbb{R}$. Zvolíme-li
$$\varphi(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$
pak
$$1 + \varphi(t)^2 = 1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} =$$
$$= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2.$$

Protože $\varphi'(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ dostáváme
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(t)^2}}\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t = t + C$$

Funkce φ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ a je monotónně rostoucí s nenulovou derivací. K dokončení příkladu je nutné nalézt její inverzi. Pokud $x = \varphi(t)$, pak

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0.$$

Odtud

$$e^t = \frac{1}{2}\left(2x \pm \sqrt{4x^2+4}\right) = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Smysl má pouze znaménko plus. Tudíž,

$$t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Uzavíráme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)}\mathrm{d}x.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci.

Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)}\mathrm{d}x.$$

  Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci.

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou" primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat" lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

  Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci.

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou" primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat" lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

- Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje **cvik a zkušenost**.

Poznámka:

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Poznámka:

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Příklad.

Vypočtěte $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$ a výsledek ověřte.

Pomocí substituce $y = x^2$,

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^y \mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Ověření,

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)' + 0 = \frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2} = xe^{x^2}.$$

Hlavní body

Racionální funkce

Definice:

Funkci r, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p a q jsou polynomy s reálnými koeficienty, nazýváme **racionální funkcí**.

Racionální funkce

Definice:

Funkci r, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p a q jsou polynomy s reálnými koeficienty, nazýváme **racionální funkcí**.

Nyní se budeme stručně zabývat otázkou jak nalézt primitivní funkci k racionální funkci, tedy výpočtem integrálu

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

První krok: dělení polynomu polynomem

Stačí uvažovat případ kdy stupeň polynomu p je ostře menší než stupeň polynomu q.

První krok: dělení polynomu polynomem

Stačí uvažovat případ kdy stupeň polynomu p je ostře menší než stupeň polynomu q.

Pokud tomu totiž tak není (tj. stupeň p je větší nebo rovno stupni q), pak lze polynom p vyjádřit ve tvaru

$$p(x) = u(x)q(x) + v(x),$$

kde u a v jsou polynomy a stupeň v je ostře menší než stupeň q. Tento rozklad lze získat dělením polynomu p polynomem q. Potom

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}x + \int \frac{v(x)}{q(x)}\mathrm{d}x.$$

Integrál z polynomu lze nalézt velmi snadno a druhý integrál už je námi požadovaného typu.

Příklad.

Jako příklad uvažme racionální funkci

$$r(x) = \frac{-x^4 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

Příklad.

Jako příklad uvažme racionální funkci

$$r(x) = \frac{-x^4 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

V tomto případě $p(x) = -x^4 + x + 1$ a $q(x) = x^2 + 1$. Stupeň polynomu p je ostře větší než stupeň q, $4 > 2$. Dělením polynomu polynomem dostáváme

$$\big(- x^4 + x + 1 \big) : \big(x^2 + 1 \big) = -x^2 + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Takže

$$\int r(x) \mathrm{d}x = - \int x^2 \mathrm{d}x + \int 1 \mathrm{d}x + \int \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \\ = -\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \big(x^2 + 1 \big) + C.$$

Druhý krok: rozklad na kořenové činitele

Věta:

Polynom q s reálnými koeficienty a s koeficientem a u největší mocniny lze rozložit do tvaru

$$q(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\ell_1} \cdots (x^2+\beta_r x+\gamma_r)^{\ell_r},$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ jsou *různé* reálné kořeny, $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ pro $i = 1, \ldots, r$ jsou různé kvadratické výrazy se záporným diskriminantem a kde $k_1, \ldots, k_s, \ell_1, \ldots, \ell_r$ jsou přirozená čísla.

Druhý krok: rozklad na kořenové činitele

Věta:

Polynom q s reálnými koeficienty a s koeficientem a u největší mocniny lze rozložit do tvaru

$$q(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\ell_1} \cdots (x^2+\beta_r x+\gamma_r)^{\ell_r},$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ jsou *různé* reálné kořeny, $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ pro $i = 1, \ldots, r$ jsou různé kvadratické výrazy se záporným diskriminantem a kde $k_1, \ldots, k_s, \ell_1, \ldots, \ell_r$ jsou přirozená čísla.

Poznámka:

Připomeňme, že diskriminant kvadratického výrazu ax^2+bx+c je číslo $D = b^2 - 4ac$.

Příklad.

Polynom $q(x) = x^4 - 1$ lze rozložit takto:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

Diskriminant posledního kvadratického výrazu je $D = -4$.
Zde tedy máme $s = 2$, $r = 1$, $k_1 = k_2 = 1$, $\ell_1 = 1$, $a = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 0$ a $\gamma_1 = 1$.

Příklad.

Polynom $q(x) = x^4 - 1$ lze rozložit takto:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

Diskriminant posledního kvadratického výrazu je $D = -4$.
Zde tedy máme $s = 2$, $r = 1$, $k_1 = k_2 = 1$, $\ell_1 = 1$, $a = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 0$ a $\gamma_1 = 1$.

Příklad.

Polynom $q(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ má kořeny 1, -1 a 2. Postupným vytýkáním kořenových činitelů dostáváme

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 1)(x^3 - 3x - 2) =$$
$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)^2.$$

Třetí krok: rozklad na parciální zlomky

Věta:

Nechť p a q jsou nenulové polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň p je ostře menší než stupeň q a q má rozklad jako v předchozí větě. Potom zlomek $\frac{p(x)}{q(x)}$ lze vyjádřit jako součet zlomků tvaru (nazývaných **parciální**, tj. částečné)

$$\frac{A_{i,k}}{(x-\alpha_i)^k} \quad \text{a} \quad \frac{B_{i,\ell}x + C_{i,\ell}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^\ell},$$

kde $1 \leq k \leq k_i$ a $1 \leq \ell \leq \ell_i$

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3-1}.$$

Jediným kořenem jmenovatele je $x = 1$,

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Hledáme A, B a C tak, aby pro všechna přípustná x platilo

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad .$$

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3-1}.$$

Jediným kořenem jmenovatele je $x = 1$,

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Hledáme A, B a C tak, aby pro všechna přípustná x platilo

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Odtud $A + B = 0$, $A - B + C = 0$ a $A - C = 1$. Řešením je

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{x^3}{x^4 - 1}.$$

Rozklad jmenovatele na kořenové činitele již známe. Hledaný rozklad má tedy tvar
$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1}.$$

Požadujeme platnost pro všechna přípustná x.

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x^3}{x^4 - 1}.$$

Rozklad jmenovatele na kořenové činitele již známe. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1}.$$

Požadujeme platnost pro všechna přípustná x.

Vynásobíme-li poslední rovnost jmenovatelem, dostaneme

$$\begin{aligned} x^3 &= A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (B_1 x + C_1)(x-1)(x+1) = \\ &= A_1(x^3+x^2+x+1) + A_2(x^3-x^2+x-1) + B_1(x^3-x) + C_1(x^2-1). \end{aligned}$$

Dva polynomy se rovnají právě když se rovnají jejich koeficienty. Porovnáním dostáváme

mocnina x	koeficient
x^3	$1 = A_1 + A_2 + B_1$
x^2	$0 = A_1 - A_2 + C_1$
x^1	$0 = A_1 + A_2 - B_1$
x^0	$0 = A_1 - A_2 - C_1$

Dva polynomy se rovnají právě když se rovnají jejich koeficienty. Porovnáním dostáváme

mocnina x	koeficient
x^3	$1 = A_1 + A_2 + B_1$
x^2	$0 = A_1 - A_2 + C_1$
x^1	$0 = A_1 + A_2 - B_1$
x^0	$0 = A_1 - A_2 - C_1$

Jedná se o soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé, jejím řešením je $A_1 = A_2 = \frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{2}$ a $C_1 = 0$. Celkem

$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}.$$

Čtvrtý krok: integrace parciálních zlomků

Po rozkladu na parciální zlomky stačí umět integrovat výrazy typu

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^\ell}\mathrm{d}x.$$

Čtvrtý krok: integrace parciálních zlomků

Po rozkladu na parciální zlomky stačí umět integrovat výrazy typu

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^\ell}\mathrm{d}x.$$

- První integrál vede buď na racionální funkci nebo logaritmus.

Čtvrtý krok: integrace parciálních zlomků

Po rozkladu na parciální zlomky stačí umět integrovat výrazy typu

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^\ell}\mathrm{d}x.$$

- První integrál vede buď na racionální funkci nebo logaritmus.
- U druhého lze kvadratický člen ve jmenovateli doplnit na čtverec, použít substituci a využít známých integrálů

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x) + C \quad \text{a} \quad \int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln(1+x^2) + C.$$

Podrobněji si tento poslední krok ukážeme na konkrétních příkladech.

Poznámka (Doplnění na čtverec):

Úpravu kvadratického polynomu

$$ax^2 + bx + c = a(x + A)^2 + B,$$

nazýváme „doplněním na čtverec“. Z nového tvaru lze snadno vyčíst souřadnice vrcholu paraboly.

Poznámka (Doplnění na čtverec):

Úpravu kvadratického polynomu

$$ax^2 + bx + c = a(x + A)^2 + B,$$

nazýváme „doplněním na čtverec“. Z nového tvaru lze snadno vyčíst souřadnice vrcholu paraboly.

Příklad.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 5 &= x^2 + 2x + 1 - 6 = (x+1)^2 - 6, \\ 2x^2 + 2x + 3 &= 2(x^2 + x) + 3 = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3 = \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Hlavní body

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{x^3}{x^4 - 1}$$

na intervalu $(1, +\infty)$.

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{x^3}{x^4 - 1}$$

na intervalu $(1, +\infty)$.

V předcházejícím příkladě jsme odvodili rozklad integrandu na parciální zlomky. Rovnou tedy dostáváme

$$\int \frac{x^3}{x^4 - 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4} \ln(x-1) + \frac{1}{4} \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x.$$

Kvadratický polynom ve jmenovateli dále rozložit nelze, neboť $D = -16$. Jmenovatel upravíme na čtverec a vytkneme konstantu,

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4 \cdot \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right),$$

a zavedeme substituci $y = \frac{x+1}{2}$. Tím dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + 1} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{2} \right) + C.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x.$$

Integrand se od minulého příkladu liší pouze čitatelem. Nyní nejprve v čitateli „vyrobíme" derivaci jmenovatele

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

V prvním integrálu provedeme substituci $y = x^2+2x+5$ a druhý už známe z předchozího příkladu (vede na arctg doplněním na čtverec). Celkem

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Na výraz tohoto typu můžeme také narazit po rozkladu na parciální zlomky. Výpočet tohoto integrálu je následující

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} x & \frac{x}{(x^2+1)^2} \\ 1 & -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \end{array} \right| = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C.$$

Příklad.

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

Příklad.

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

Můžeme rovnou začít úpravou na parciální zlomky. Rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{1+x^2}.$$

Po úpravě

$$(A+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + C = 1.$$

Ihned dostáváme $B = 0$ a $C = 1$, a poté $A = -1$, $E = 0$ a $D = 1$. Takže

$$\int \frac{1}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$