Základy matematické analýzy

Další aplikace

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz
[2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

1. **aritmetická posloupnost** (a_n), tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

1. **aritmetická posloupnost** (a_n), tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

2. **geometrická posloupnost** (a_n), tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}, \quad q \neq 1.$$

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

1. **aritmetická posloupnost** (a_n), tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

2. **geometrická posloupnost** (a_n), tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Připomeňme, že číslo d se nazývá **diference** a q **kvocient**.

Sčítání členů posloupností

Dále známe součty některých číselných řad. Díky Taylorově větě například víme, že:

Sčítání členů posloupností

Dále známe součty některých číselných řad. Díky Taylorově větě například víme, že:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2,$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\pi^{2k} = \cos(\pi) = -1,$
- atp.

Nyní si ukážeme další způsoby sčítání číselných řad.

Příklad.

Sečtěte
$$\sum_{k=1}^{n} k\,2^k.$$

Příklad.

Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k\,2^k.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Příklad.

Sečtěte
$$\sum_{k=1}^{n} k\,2^k.$$

Označme
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Pro derivaci funkce f pak platí
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \left(\frac{x^{n+1} - x}{x - 1}\right)' =$$
$$= \frac{\big((n+1)x^n - 1\big)(x-1) - \big(x^{n+1} - x\big)}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Námi odvozený vztah platí pro $x \neq 1$. Dosazením $x = 2$ dostáváme

$$f'(2) = \sum_{k=1}^{n} k\, 2^{k-1} = n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 = (n-1)2^n + 1.$$

Námi odvozený vztah platí pro $x \neq 1$. Dosazením $x = 2$ dostáváme

$$f'(2) = \sum_{k=1}^{n} k\, 2^{k-1} = n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 = (n-1)2^n + 1.$$

Takže pro součet ze zadání platí (poslední rovnost stačí vynásobit číslem 2)

$$\sum_{k=1}^{n} k\, 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Poznámka:

Při výpočtu jsme odvodili rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

platnou pro každé $x \neq 1$.

Poznámka:

Při výpočtu jsme odvodili rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

platnou pro každé $x \neq 1$. Avšak limita pro $x \to 1$ obou výrazů existuje a proto pomocí l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} k = \lim_{x\to1} \frac{n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1}}{2(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)}{2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Odvodili jsme tedy součet aritmetické posloupnosti pomocí znalosti součtu geometrické posloupnosti.

Poznámka:

Všimněte si, že když definiční vztah

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

zderivujeme ne jednou, ale dvakrát, dostaneme

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{(n+1)nx^{n-1}(x-1)^2 - 2nx^{n+1} + 2(n+1)x^n - 2}{(x-1)^3}.$$

(Pozor na změnu „spodní meze“, $k = 2$!).

Poznámka:

Všimněte si, že když definiční vztah

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

zderivujeme ne jednou, ale dvakrát, dostaneme

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{(n+1)nx^{n-1}(x-1)^2 - 2nx^{n+1} + 2(n+1)x^n - 2}{(x-1)^3}.$$

(Pozor na změnu „spodní meze“, $k = 2$!).

Příklad.

Sečtěte $\sum_{k=1}^{n} k^2\, 2^k$.

Dosazením $x = 2$ do vztahu pro druhou derivaci f:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,2^{k-2} = 2^{n-1}(n^2 - 3n + 4) - 2.$$

Čili

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,2^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)2^k + \sum_{k=1}^{n} k\,2^k = 4\sum_{k=2}^{n} k(k-1)2^{k-2} + \sum_{k=1}^{n} k\,2^k =$$
$$= 2^{n+1}(n^2 - 3n + 4) - 8 + (n-1)2^{n+1} + 2 = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6.$$

Dosazením $x = 2$ do vztahu pro druhou derivaci f:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,2^{k-2} = 2^{n-1}(n^2 - 3n + 4) - 2.$$

Čili

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,2^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)2^k + \sum_{k=1}^{n} k\,2^k = 4\sum_{k=2}^{n} k(k-1)2^{k-2} + \sum_{k=1}^{n} k\,2^k =$$
$$= 2^{n+1}(n^2 - 3n + 4) - 8 + (n-1)2^{n+1} + 2 = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6.$$

Poznámka:

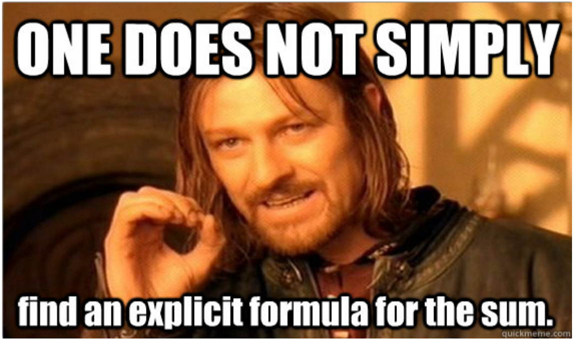
Podobně jako u předchozího příkladu lze limitním přechodem $x \to 1$ odvodit

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) \text{ a pak } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

- Jak vidíme, sčítání členů posloupnosti je obecně komplikovaná úloha.

- Jak vidíme, sčítání členů posloupnosti je obecně komplikovaná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n.

- Jak vidíme, sčítání členů posloupnosti je obecně komplikovaná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n.



Hlavní body

Landauova symbolika

Definice:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost (α_n) taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Landauova symbolika

Definice:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost (α_n) taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, právě když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Landauova symbolika

Definice:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost (α_n) taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, právě když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

- $a_n \sim b_n$: (a_n) a (b_n) se pro velká n chovají stejně.
- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$: (a_n) pro velká n neroste rychleji než (b_n).

Landauova symbolika

- Existují další symboly porovnávající další charakteristiky chování dvou posloupností. Podrobněji se jimi budete zabývat v BI-ZDM.

Landauova symbolika

- Existují další symboly porovnávající další charakteristiky chování dvou posloupností. Podrobněji se jimi budete zabývat v BI-ZDM.
- Uveďme ještě aspoň často používané o. Pokud máme (a_n) a (b_n), $b_n > 0$ pak

$$a_n = o(b_n) \quad \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Landauova symbolika

- Existují další symboly porovnávající další charakteristiky chování dvou posloupností. Podrobněji se jimi budete zabývat v BI-ZDM.
- Uveďme ještě aspoň často používané o. Pokud máme (a_n) a (b_n), $b_n > 0$ pak

$$a_n = o(b_n) \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Poznámka:

Pokud $b_n > 0$ pak lze definici přeformulovat do praktického tvaru

$$a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{posloupnost } \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ je omezená.}$$

Poznamenejme, že pokud existuje limita $\lim a_n/b_n$, pak je posloupnost (a_n/b_n) omezená.

Příklady

Příklad.

Platí

$$\begin{aligned} n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \sim n^2&, \\ 2n = \mathcal{O}(n^2)&, \\ n = \mathcal{O}(n^2)&, \\ 4n^2 = \mathcal{O}(n^2)&. \end{aligned}$$

Příklady

Příklad.

Platí

$$\begin{aligned} n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\ 2n &= \mathcal{O}(n^2), \\ n &= \mathcal{O}(n^2), \\ 4n^2 &= \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.

Příklady

Příklad.

Platí

$$
\begin{aligned}
n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\
2n &= \mathcal{O}(n^2), \\
n &= \mathcal{O}(n^2), \\
4n^2 &= \mathcal{O}(n^2).
\end{aligned}
$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.
- Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.

Hlavní body

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Je-li f rostoucí, pak

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k,\ k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k,\, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k,\ k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) \mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x) \mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k) \mathrm{d}x = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x) \mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k,\, k+1\rangle$ platí $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \le \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \le \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

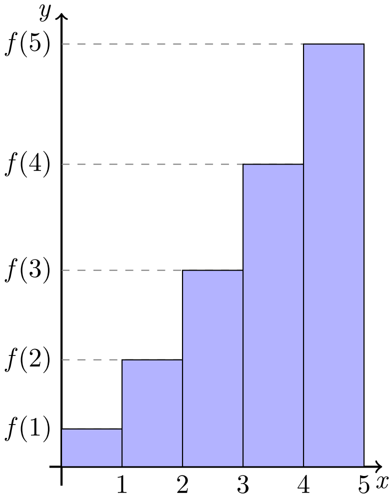
Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ dostaneme

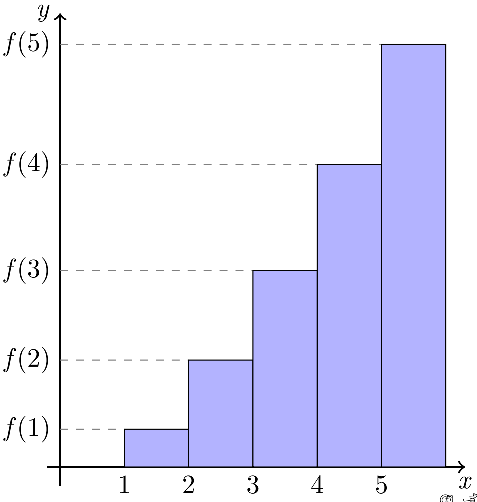
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odtud

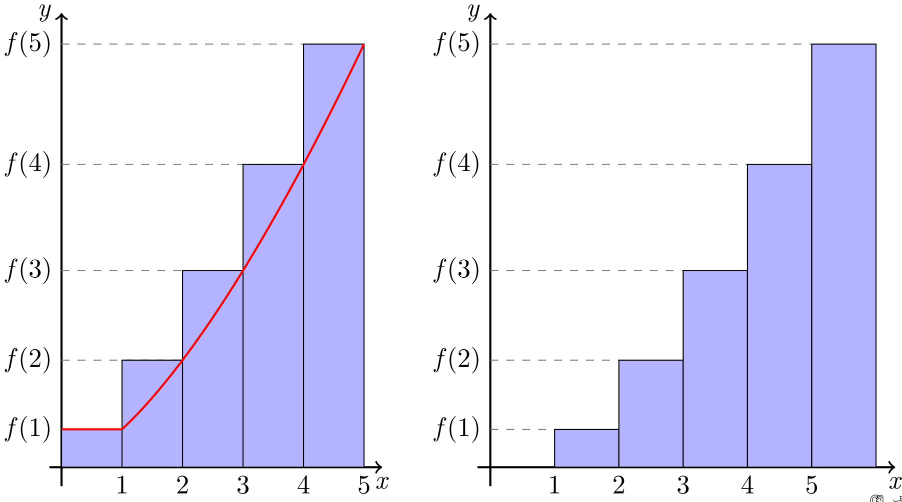
$$f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Geometrická interpretace odhadu

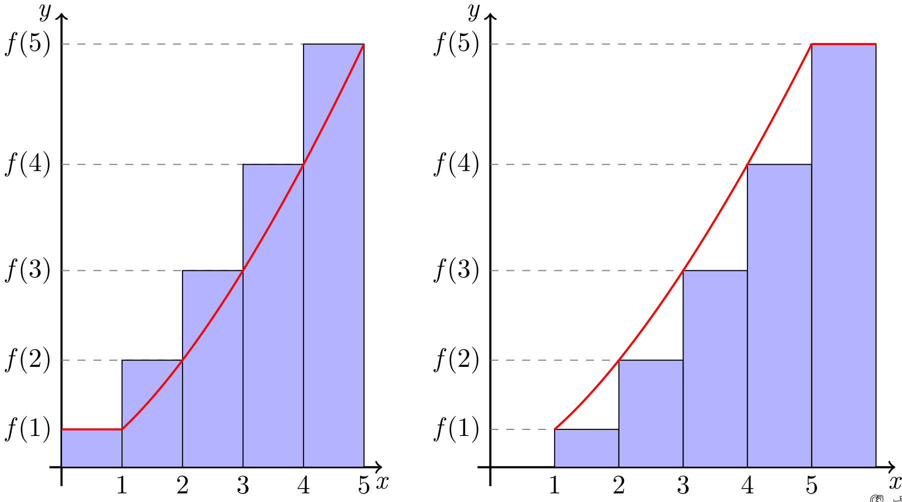




Geometrická interpretace odhadu



Geometrická interpretace odhadu



Příklad.

Pomocí odhadu (tj. aniž bychom součet počítali jako dříve) zjistěte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad.

Pomocí odhadu (tj. aniž bychom součet počítali jako dříve) zjistěte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, \mathrm{d}x \,\leq\, \sum_{k=1}^{n} k^2 \,\leq\, n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Pomocí odhadu (tj. aniž bychom součet počítali jako dříve) zjistěte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, \mathrm{d}x \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \;\leq\; n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Příklad.

Pomocí odhadu (tj. aniž bychom součet počítali jako dříve) zjistěte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \,\mathrm{d}x \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \;\leq\; n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká n je největším členem $\frac{1}{3}n^3$, přesněji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1, \quad \text{tj.} \quad a_n \sim \frac{1}{3}n^3.$$

Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Využijme šikovné úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Funkce $f(x) = \ln x$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí F k funkci f je funkce $F(x) = x\ln(x) - x + C$, tudíž

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \ln(n) + n\ln(n) - n + 1.$$

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq e^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/e^n)$.

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq e^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/e^n)$.

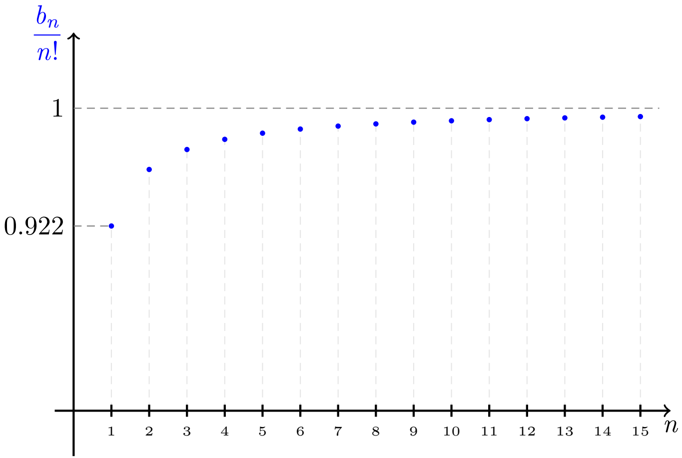
Poznámka:

Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že narozdíl od předchozího příkladu nám nyní nedává posloupnost (b_n) takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti (b_n) vyžaduje další práci. Pro úplnost uveďme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n} \sim n!.$$



$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Podle předchozí věty, pro $f(x) = \frac{1}{x}$ klesající na $\langle 1, +\infty)$ dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;\leq\; 1 + \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka:

Opět máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \;\leq\; 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu. Tato limita se označuje γ a nazývá se **Eulerova-Mascheroniova konstanta**. Její přibližná hodnota je $\gamma = 0.577218\ldots$.

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

- Přesný počet volání: $\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

- Přesný počet volání: $\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.
- Hrubý odhad:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} \big(\log_2 i + 1 \big) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \big(\log_2 (n-1) + 1 \big) =$$

$$= (n-1)\big(1 + \log_2(n-1)\big) \leq n(1 + \log_2 n) = \mathcal{O}(n \log_2 n).$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \,\mathrm{d}x.$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \, \mathrm{d}x.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x = (n-1) \log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2}$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \, \mathrm{d}x.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x = (n-1) \log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2}$$

dostáváme,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \sim n \log_2 n.$$

Integrální kritérium

Z předchozího odhadu sumy pomocí integrálu je patrné, že platí následující věta.

Integrální kritérium

Z předchozího odhadu sumy pomocí integrálu je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

Integrální kritérium

Z předchozího odhadu sumy pomocí integrálu je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Integrální kritérium

Z předchozího odhadu sumy pomocí integrálu je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1, \quad \text{a} \quad \int_1^n x^{-1}\mathrm{d}x = \ln n$$

platí

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{-1-\alpha}, \quad \alpha < -1,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = +\infty, \quad \alpha \geq -1.$$