# Základy matematické analýzy

## Složitost algoritmů

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz [2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

# Hlavní body

**Definice:**

Relaci $\mathcal{R}$ na množině $M$ splňující

**Definice:**

Relaci $\mathcal{R}$ na množině $M$ splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,

**Definice:**

Relaci $\mathcal{R}$ na množině $M$ splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,
2. (antisymetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$ pak i $x = y$,

**Definice:**

Relaci $\mathcal{R}$ na množině $M$ splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,
2. (antisymetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$ pak i $x = y$,
3. (tranzitivita): pokud pro $x, y, z \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, pak platí $x\mathcal{R}z$,

**Definice:**

Relaci $\mathcal{R}$ na množině $M$ splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,
2. (antisymetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$ pak i $x = y$,
3. (tranzitivita): pokud pro $x, y, z \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, pak platí $x\mathcal{R}z$,

nazýváme **uspořádáním** na množině $\mathcal{R}$.

**Definice:**

Relaci $\mathcal{R}$ na množině $M$ splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,
2. (antisymetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$ pak i $x = y$,
3. (tranzitivita): pokud pro $x, y, z \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, pak platí $x\mathcal{R}z$,

nazýváme **uspořádáním** na množině $\mathcal{R}$.

**Poznámka:**

Relaci $\mathcal{R}$, jež je uspořádáním, většinou značíme symbolem $\leq$.

**Příklad.**

Je-li $M$ množina reálných čísel a $x\mathcal{R}y$ znamená „$x$ je menší nebo rovno $y$“, pak $\mathcal{R}$ představuje uspořádání na množině $\mathbb{R}$.

**Příklad.**

Je-li $M$ množina reálných čísel a $x\mathcal{R}y$ znamená „$x$ je menší nebo rovno $y$“, pak $\mathcal{R}$ představuje uspořádání na množině $\mathbb{R}$.

**Poznámka:**

- Rozmyslete splnění všech požadavků!

**Příklad.**

Je-li $M$ množina reálných čísel a $x\mathcal{R}y$ znamená „$x$ je menší nebo rovno $y$“, pak $\mathcal{R}$ představuje uspořádání na množině $\mathbb{R}$.

**Poznámka:**

- Rozmyslete splnění všech požadavků!
- Toto uspořádání je tzv. **úplné**. Pro každé $x, y \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ nebo $y\mathcal{R}x$.

**Příklad.**

Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když $m$ dělí $n$. Tato relace $\mathcal{R}$ na $M$ je uspořádáním.

**Příklad.**

Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když $m$ dělí $n$. Tato relace $\mathcal{R}$ na $M$ je uspořádáním.

Ověřme potřebné vlastnosti

**Příklad.**

Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \dots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když $m$ dělí $n$. Tato relace $\mathcal{R}$ na $M$ je uspořádáním.

Ověřme potřebné vlastnosti

1. (reflexivita): Pro každé $n \in M$ platí, že $n$ dělí $n$, tedy $n\mathcal{R}n$.

**Příklad.**

Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když $m$ dělí $n$. Tato relace $\mathcal{R}$ na $M$ je uspořádáním.

Ověřme potřebné vlastnosti

1. (reflexivita): Pro každé $n \in M$ platí, že $n$ dělí $n$, tedy $n\mathcal{R}n$.
2. (antisimetrie): Uvažme $n, m \in M$ tak, že $n$ dělí $m$ a $m$ dělí $n$, pak existují $k, \ell \in M$ splňující
   $$m = k \cdot n \quad \text{a} \quad n = \ell \cdot m.$$
   Tudíž $m = (k\ell) \cdot m$, což může nastat pouze v případě $k = \ell = 1$. Proto $m = n$.

**Příklad.**

Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když $m$ dělí $n$. Tato relace $\mathcal{R}$ na $M$ je uspořádáním.

Ověřme potřebné vlastnosti

1. (reflexivita): Pro každé $n \in M$ platí, že $n$ dělí $n$, tedy $n\mathcal{R}n$.
2. (antisimetrie): Uvažme $n, m \in M$ tak, že $n$ dělí $m$ a $m$ dělí $n$, pak existují $k, \ell \in M$ splňující
$$m = k \cdot n \quad \text{a} \quad n = \ell \cdot m.$$
Tudíž $m = (k\ell) \cdot m$, což může nastat pouze v případě $k = \ell = 1$. Proto $m = n$.
3. (tranzitivita): Podobně, pokud $n$ dělí $m$ a $m$ dělí $k$, pak $n$ dělí $k$.

# Hlavní body

# Třídění

- **Vstup**: množina $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a úplné uspořádání $\leq$ mezi jejími prvky. Velikostí vstupu rozumíme jednoduše počet prvků vstupu.

- **Výstup**: uspořádaná $n$-tice $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$, kde $(k_1, \ldots, k_n)$ je permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$ a $x_{k_1} \leq \cdots \leq x_{k_n}$.

- **Elementární operace**: porovnání dvou prvků.

# Bublinkový algoritmus (Bubble sort)

```
procedure bubbleSort(A : array of length n)
  for k in n-1 to 1 do
    sorted = true
    for i in 1 to k do
      if A[i] > A[i+1] then
        swap( A[i], A[i+1])
        sorted = false
      end if
    end for
    if sorted then return A
  end for
  return A
end procedure
```

- Celkový počet porovnání může být nejhůře

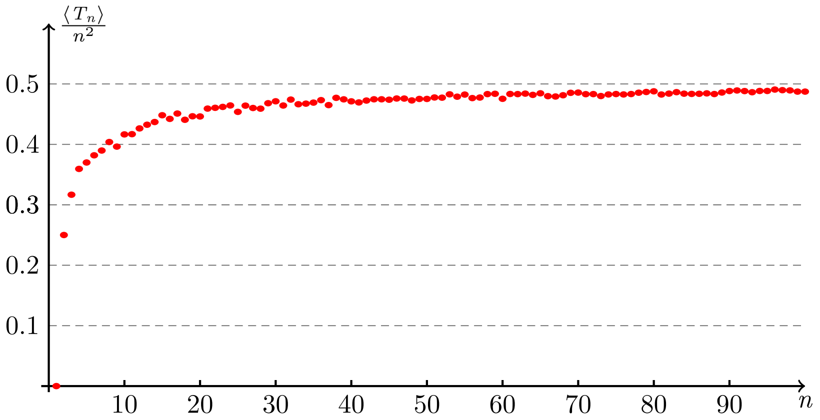
$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}.$$

- Pokud je na vstupu již setříděný seznam, pak algoritmus provede $(n-1)$ porovnání (nejlepší varianta).

**Poznámka (Složitost Bubble sort):**

Můžeme tedy shrnout, že pro složitost Bubble sort platí

$$T_n=\mathcal{O}(n^2).$$




**Poznámka (Ilustrace složitosti Bubble sort):**

Pro každé $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ jsme 20-krát setřídili náhodně permutovanou množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ a vypočetli tak střední hodnotu $\langle T_n \rangle$. Na grafu je pak vynesen poměr $\frac{\langle T_n \rangle}{n^2}$.

# Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n\}$.

# Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyberme náhodně prvek ze seznamu (nazývaný **pivot**).

# Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyberme náhodně prvek ze seznamu (nazývaný **pivot**).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.

# Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyberme náhodně prvek ze seznamu (nazývaný **pivot**).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.

# Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyberme náhodně prvek ze seznamu (nazývaný **pivot**).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
- Spoj uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoji uspořádaný druhý seznam.

# Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Vyberme náhodně prvek ze seznamu (nazývaný **pivot**).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
- Spoj uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoji uspořádaný druhý seznam.

Algoritmus probíhá rekurentně. Uspořádání dvouprvkového seznamu je jednoduché.

Ozačme nyní $T_n$ **průměrný počet porovnání** pro uspořádání seznamu délky $n$ pomocí algoritmu Quick sort.

Ozačme nyní $T_n$ **průměrný počet porovnání** pro uspořádání seznamu délky $n$ pomocí algoritmu Quick sort.

Pokud je pivot $r$-tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak

$$T_n = n - 1 + T_{r-1} + T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0 = T_1 = 0.$$

Ozačme nyní $T_n$ **průměrný počet porovnání** pro uspořádání seznamu délky $n$ pomocí algoritmu Quick sort.

Pokud je pivot $r$-tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak

$$T_n = n - 1 + T_{r-1} + T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0 = T_1 = 0.$$

Sečtením těchto vztahů pro $r = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{r=1}^{n} T_n = \sum_{r=1}^{n} (n-1) + \sum_{r=1}^{n} \big( T_{r-1} + T_{n-r} \big) \quad \Longrightarrow \quad nT_n = n(n-1) + 2 \sum_{r=1}^{n-1} T_r.$$

Ozačme nyní $T_n$ **průměrný počet porovnání** pro uspořádání seznamu délky $n$ pomocí algoritmu Quick sort.

Pokud je pivot $r$-tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak

$$T_n = n - 1 + T_{r-1} + T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0 = T_1 = 0.$$

Sečtením těchto vztahů pro $r = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{r=1}^{n} T_n = \sum_{r=1}^{n} (n-1) + \sum_{r=1}^{n} \big(T_{r-1} + T_{n-r}\big) \quad \Longrightarrow \quad nT_n = n(n-1) + 2\sum_{r=1}^{n-1} T_r.$$

Poslední rovnost vyjádřeme pro $k-1$ místo $k$ a oba vztahy odečtěme (zbavíme se tím součtu vpravo):

$$kT_k = k(k-1) + 2\sum_{r=1}^{k-1} T_r,$$

$$(k-1)\,T_{k-1} = (k-1)(k-2) + 2\sum_{r=1}^{k-2} T_r,$$

odečtením: $kT_k - (k-1)\,T_{k-1} = k(k-1) - (k-1)(k-2) + 2\,T_{k-1}.$

Odvodili jsme tedy vztah

$$kT_k - (k+1)\,T_{k-1} = 2k - 2.$$

Odvodili jsme tedy vztah

$$kT_k - (k+1)\,T_{k-1} = 2k - 2.$$

Vydělením číslem $k(k+1)$ dostáváme

$$\frac{T_k}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k} = \frac{2k-2}{k(k+1)}.$$

Odvodili jsme tedy vztah

$$kT_k - (k+1)\,T_{k-1} = 2k - 2.$$

Vydělením číslem $k(k+1)$ dostáváme

$$\frac{T_k}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k} = \frac{2k-2}{k(k+1)}.$$

Konečně, sečtením těchto rovností pro $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n+1} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \\ &\leq 2\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = 2\big(1 + \ln(n)\big). \end{aligned}$$

Uzavíráme

$$T_n = \mathcal{O}\big(n \ln(n)\big).$$