Základy matematické analýzy

Číselné posloupnosti

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz
[2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

1 Definice pojmu posloupnosti

2 Důležité podmnožiny $\mathbb{R}$ a rozšířená reálná osa

3 Limita číselné posloupnosti

4 Vybrané posloupnosti

Definice (Posloupnost):

Zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$, jehož definiční obor je nekonečná množina, nazýváme **reálná posloupnost**.

Definice (Posloupnost):

Zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$, jehož definiční obor je nekonečná množina, nazýváme **reálná posloupnost**.

Poznámka (Terminologie):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a \subset \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-**tým členem posloupnosti** a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o **indexu**.

Definice (Posloupnost):

Zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$, jehož definiční obor je nekonečná množina, nazýváme **reálná posloupnost**.

Poznámka (Terminologie):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a \subset \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-**tým členem posloupnosti** a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o **indexu**.
2. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem (a_n).

Definice (Posloupnost):

Zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$, jehož definiční obor je nekonečná množina, nazýváme **reálná posloupnost**.

Poznámka (Terminologie):

1. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a \subset \mathbb{N}$, tj. $a(n)$, označujeme a_n a nazýváme n-**tým členem posloupnosti** a. O n samotném v tomto kontextu mluvíme jako o **indexu**.
2. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem (a_n).

- Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že zkoumaná posloupnost (a_n) je definovaná na celém $\mathbb{N}$. Lze ji totiž vždy „přečíslovat“.
- Pokud chceme explicitně vyznačit jakou množinu index probíhá, píšeme např.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{nebo} \quad (a_n)_{n\in J},$$

je-li indexovou množinou $J \subset \mathbb{N}$.

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovovanou předpisem $a(n) := (-1)^n$.

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovovanou předpisem $a(n) := (-1)^n$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$.

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovovanou předpisem $a(n) := (-1)^n$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big).$$

Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovovanou předpisem $a(n) := (-1)^n$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big).$$

- Oborem hodnot a je množina obsahující pouze **dva** prvky, $\{-1, 1\}$.

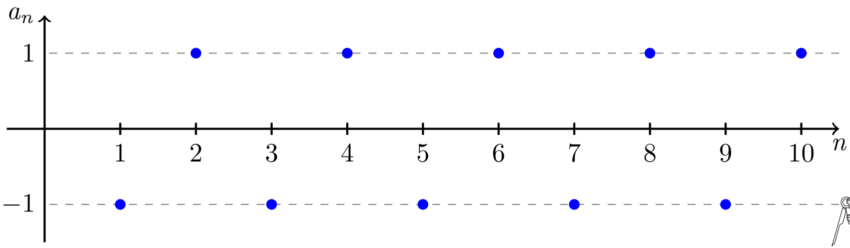
Příklad.

Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovovanou předpisem $a(n) := (-1)^n$.

- Například tedy platí $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$.
- Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big).$$

- Oborem hodnot a je množina obsahující pouze **dva** prvky, $\{-1, 1\}$.



Vlastnosti posloupností

Poznámka:

Podobně jako u funkcí se nám budou k popisu chování posloupností hodit následující pojmy.

- (a_n) je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Vlastnosti posloupností

Poznámka:

Podobně jako u funkcí se nám budou k popisu chování posloupností hodit následující pojmy.

- (a_n) je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- (a_n) je **neklesající** (resp. **nerostoucí**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$),

Vlastnosti posloupností

Poznámka:

Podobně jako u funkcí se nám budou k popisu chování posloupností hodit následující pojmy.

- (a_n) je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- (a_n) je **neklesající** (resp. **nerostoucí**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$),
- (a_n) je **monotonní** pokud je nerostoucí nebo neklesající.

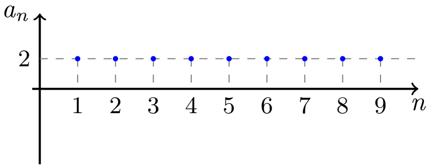
Příklad.

Diskutujte vlastnosti následujících posloupností.

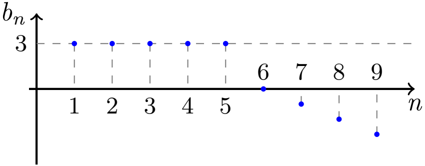
Příklad.

Diskutujte vlastnosti následujících posloupností.

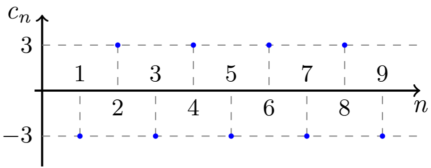
$$a_n = 2$$



$$b_n = \begin{cases} 3, & n \leq 5 \\ 6 - n, & n > 5 \end{cases}$$



$$c_n = 3(-1)^n$$

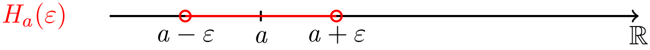


Hlavní body

1. Definice pojmu posloupnosti
2. Důležité podmnožiny $\mathbb{R}$ a rozšířená reálná osa
3. Limita číselné posloupnosti
4. Vybrané posloupnosti

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε**-okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a(\varepsilon)$.

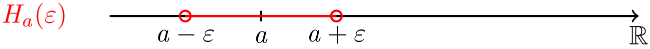


Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a(\varepsilon)$.

Poznámka:

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x-a| < \varepsilon$.



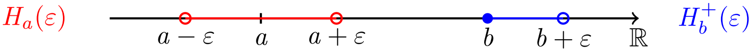
Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a(\varepsilon)$.

Poznámka:

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$.

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε-**okolím bodu** a **v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.



Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme **ε-okolím bodu a v $\mathbb{R}$** a značíme $H_a(\varepsilon)$.

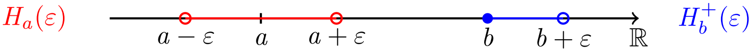
Poznámka:

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$, právě když platí nerovnost $|x - a| < \varepsilon$.

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, **ε-okolím bodu a v $\mathbb{R}$** a značíme $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.

Poznámka:

O množině $H_a^{\pm}(\varepsilon)$ někdy též mluvíme jako o **jednostranném** okolí, a o $H_a(\varepsilon)$ jako o **oboustranném** okolí.



Okolí a rozšířená reálná osa

Definice:

Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Okolí a rozšířená reálná osa

Definice:

Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu** $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_{+\infty}(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

Okolí a rozšířená reálná osa

Definice:

Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme **okolím bodu** $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_{+\infty}(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

- Není-li potřeba specifikovat velikost okolí, píšeme zkráceně H_a, $H_{+\infty}$, $H_{-\infty}$.
- Okolí bodu a jsme definovali pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$, avšak toto okolí je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$.

Hlavní body

1 Definice pojmu posloupnosti

2 Důležité podmnožiny $\mathbb{R}$ a rozšířená reálná osa

3 Limita číselné posloupnosti

4 Vybrané posloupnosti

Limita posloupnosti

Definice:

Řekneme, že reálná posloupnost (a_n) má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro každé okolí H_α bodu α lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než n_0 platí $a_n \in H_\alpha$. V symbolech

$$\big(\forall H_\alpha\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in H_\alpha\big).$$

Tuto skutečnost zapisujeme několika možnými způsoby:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \to \alpha.$$

Poznámky k definici limity

- Ekvivalentní definici dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.

Poznámky k definici limity

- Ekvivalentní definici dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.

- Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat:

  Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále $a_n \in H_\alpha$ znamená $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy:

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

Poznámky k definici limity

- Ekvivalentní definici dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.

- Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat:

  Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále $a_n \in H_\alpha$ znamená $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy:

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

- Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ dostáváme podmínku

$$\big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n > c\big).$$

Poznámky k definici limity

- Ekvivalentní definici dostaneme, zaměníme-li „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“. Význam také zůstane zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“.
- Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat:

  Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále $a_n \in H_\alpha$ znamená $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy:

$$\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).$$

- Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ dostáváme podmínku

$$\big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n > c\big).$$

- Udejte podmínku pro $\alpha = -\infty$.

Poznámky k definici limity

Poznámka:

- Dokázat tvrzení „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$“ znamená ke každému okolí H_α, určenému parametrem ε nebo c, nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n \in H_\alpha$ pro všechna $n > n_0$.

Poznámky k definici limity

Poznámka:

- Dokázat tvrzení „$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$“ znamená ke každému okolí H_α, určenému parametrem ε nebo c, nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n \in H_\alpha$ pro všechna $n > n_0$.
- Posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když v každém okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti (a_n) až na konečný počet výjimek.

Poznámky k definici limity

Poznámka:

- Dokázat tvrzení „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$“ znamená ke každému okolí H_α, určenému parametrem ε nebo c, nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $a_n \in H_\alpha$ pro všechna $n > n_0$.
- Posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když v každém okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti (a_n) až na konečný počet výjimek.
- K tomu aby $\lim a_n = \alpha$ ale nestačí, aby v každém okolí bodu α leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti (rozmyslete).

Věta (Jednoznačnost limity):

Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta (Jednoznačnost limity):

Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz sporem.

Předpokládejme, že (a_n) má dvě různé limity $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$. Potom existují dvě disjunktní okolí H_a a H_b, tj. $H_a \cap H_b = \emptyset$. Z definice limity ovšem máme k dispozici $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in H_a$ a pro všechna $n > m_0$ je $a_n \in H_b$. Tudíž pro $n > \max\{n_0,\ m_0\}$ platí

$$a_n \in H_a \cap H_b = \emptyset$$

což není možné. □

Elementární limity

Příklad.

Dokažte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Elementární limity

Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné.

Elementární limity

Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Elementární limity

Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Elementární limity

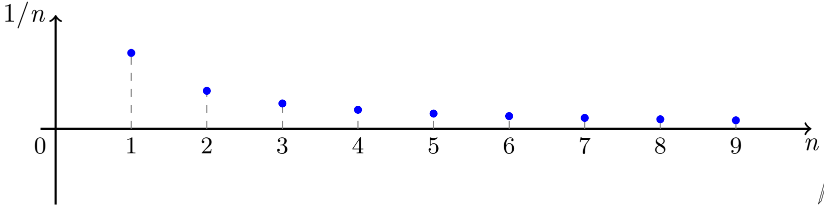
Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.



Elementární limity

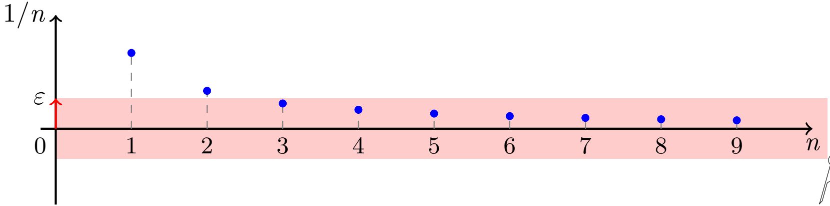
Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.



Elementární limity

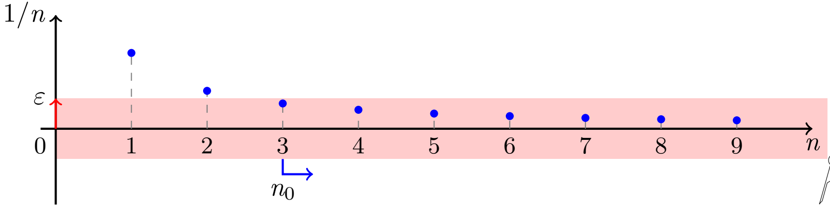
Příklad.

Dokažte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.



Elementární limity

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$ je rovna α.

Elementární limity

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$ je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Elementární limity

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$ je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad.

Limita posloupnosti $a_n = n^2$ je $+\infty$.

Elementární limity

Příklad.

Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$ je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad.

Limita posloupnosti $a_n = n^2$ je $+\infty$.

Buď $K > 0$ libovolné. Zvolíme-li přirozené $n_0 > \sqrt{K}$, pak pro každé $n > n_0 = \sqrt{K}$ platí $a_n = n^2 > K$.

Konvergence a divergence

Definice:

Buď (a_n) posloupnost. Pokud má limitu $\alpha \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Konvergence a divergence

Definice:

Buď (a_n) posloupnost. Pokud má limitu $\alpha \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

Příklad.

Na základě výsledků předchozích příkladů dostáváme:

- posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je konvergentní,
- libovolná konstantní posloupnost je konvergentní,
- posloupnost (n^2) je divergentní.

Výpočet limity

Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti (a_n) je úspěšné provedení dvou kroků:

1. Uhodni kandidáta na limitu, ozn. $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Pomocí definice dokaž, že $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$.

V příští přednášce si ukážeme další nástroje pro výpočet limit.

Výpočet limity

Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti (a_n) je úspěšné provedení dvou kroků:

1. Uhodni kandidáta na limitu, ozn. $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Pomocí definice dokaž, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

V příští přednášce si ukážeme další nástroje pro výpočet limit.

Velmi často je nám však hodnota limity (pokud vůbec existuje) **neznámá**. Typicky je její případná hodnota právě to, co hledáme. Vyvstává proto přirozená otázka:

> *Lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti (a_n) pouze na základě znalosti jejích členů?*

Na tuto otázku **kladně** odpovíme v následující přednášce.

Hlavní body

1 Definice pojmu posloupnosti

2 Důležité podmnožiny $\mathbb{R}$ a rozšířená reálná osa

3 Limita číselné posloupnosti

4 Vybrané posloupnosti

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n). Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti (a_n).

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\big(a_{k_n}\big)$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n). Posloupnost $\big(a_{k_n}\big)$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti (a_n).

Příklad.

Posloupnost (1) je vybraná z $\big((-1)^n\big)$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\left(a_{k_n}\right)$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n). Posloupnost $\left(a_{k_n}\right)$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti (a_n).

Příklad.

Posloupnost (1) je vybraná z $\left((-1)^n\right)$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

Poznámka (Význam (k_n)):

Členy posloupnosti (k_n) udávají, které členy vyberu z (a_n).

Další příklad

Příklad.

Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$.

- Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z (a_n). Ano, stačí volit rostoucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$.
- Posloupnost (2) není vybraná z (a_n). Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$, ale (k_n) není rostoucí.

Je důležité si povšimnout, že při výběru členů musíme zachovat jejich pořadí v původní posloupnosti. To je přesně vyjádřeno podmínkou na (k_n).

Přímo z definice ihned nahlédneme:

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z (a_n) má také limitu α.

Přímo z definice ihned nahlédneme:

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z (a_n) má také limitu α.

Příklad.

Platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)$ a již víme, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Přímo z definice ihned nahlédneme:

Věta (O limitě vybrané posloupnosti):

Nechť posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá podposloupnost vybraná z (a_n) má také limitu α.

Příklad.

Platí $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n!+n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)$ a již víme, že $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Důsledek:

Lze-li z posloupnosti (a_n) vybrat dvě podposloupnosti s **různými** limitami, pak limita původní posloupnosti (a_n) neexistuje.

Příklad.

Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Příklad.

Limita posloupnosti $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n - 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Potom obě vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1.$$

Příklad.

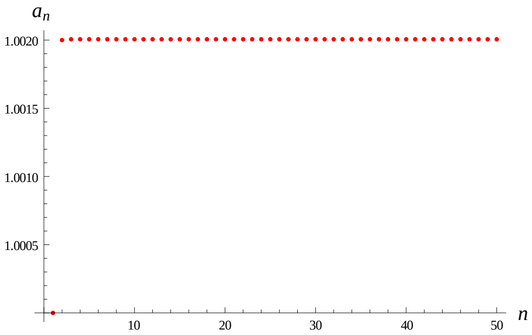
Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$

Příklad.

Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

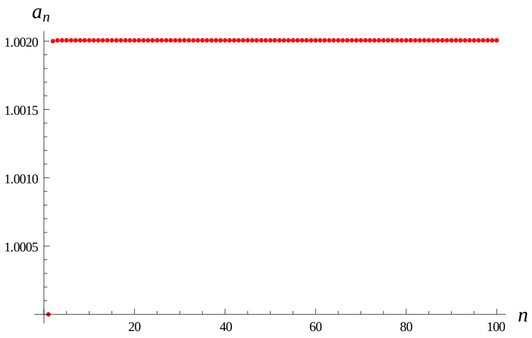
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$



Příklad.

Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

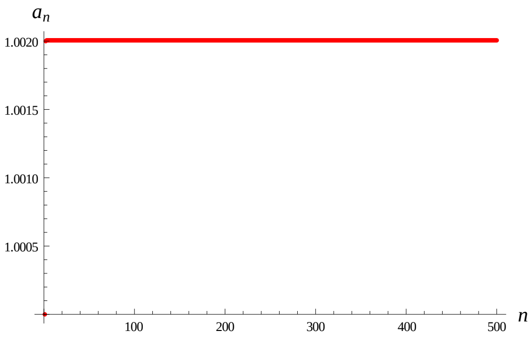
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$



Příklad.

Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

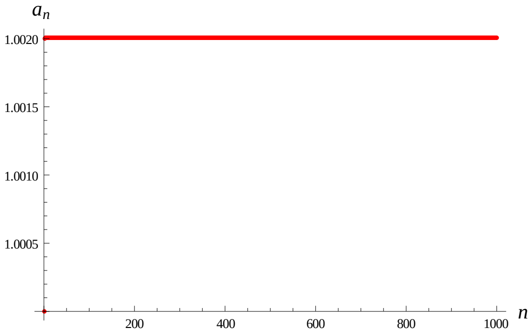
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$



Příklad.

Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

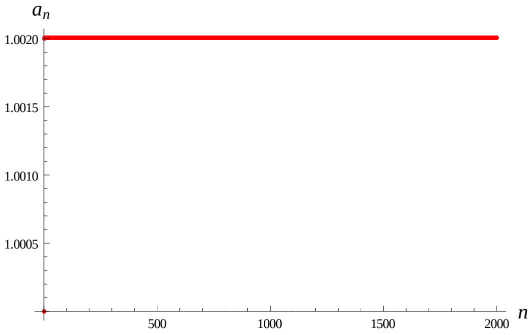
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$



Příklad.

Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$



Příklad.

Odhadování hodnoty limity posloupnosti výpočtem prvních několika členů (tj. dosazováním malých n, vykreslování konečného počtu členů na počítači) může vést ke špatným závěrům. Jako jednoduchý příklad uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{10^{3k-3}}.$$