Základy matematické analýzy

Věty o posloupnostech

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz   [2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

1 Kritéria konvergence

2 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

3 Věty o limitách

4 Nerovnosti a limity

Připomenutí

Poznámka (Axiom úplnosti):

Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\langle a_n, b_n \rangle \supset \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Připomenutí

Poznámka (Axiom úplnosti):

Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\langle a_n, b_n \rangle \supset \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice:

Bod $x \in \mathbb{R}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti (a_n) právě, když v **každém** okolí H_x bodu x leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n).

Hromadný bod

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti?

Hromadný bod

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti?

- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, pak α je zřejmě hromadným bodem (a_n).
- I když má posloupnost právě jeden hromadný bod, limita posloupnosti nemusí existovat.

Hromadný bod

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti?

- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, pak α je zřejmě hromadným bodem (a_n).
- I když má posloupnost právě jeden hromadný bod, limita posloupnosti nemusí existovat.

Příklad.

- Posloupnost (a_n) zadaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}, \end{cases}$$

má hromadný bod 0, ale nemá limitu.

Hromadný bod

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti?

- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, pak α je zřejmě hromadným bodem (a_n).
- I když má posloupnost právě jeden hromadný bod, limita posloupnosti nemusí existovat.

Příklad.

- Posloupnost (a_n) zadaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché,} \end{cases}$$

  má hromadný bod 0, ale nemá limitu.
- Bod 0 je hromadným bodem i limitou posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Hromadný bod

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti?

- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, pak α je zřejmě hromadným bodem (a_n).
- I když má posloupnost právě jeden hromadný bod, limita posloupnosti nemusí existovat.

Příklad.

- Posloupnost (a_n) zadaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}, \end{cases}$$

  má hromadný bod 0, ale nemá limitu.
- Bod 0 je hromadným bodem i limitou posloupnosti $\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Narozdíl od limit může mít zadaná posloupnost více hromadných bodů. Např. posloupnost $\big((-1)^n\big)$ má hromadné body 1 a -1.

Bolzanova-Weierstrassova věta

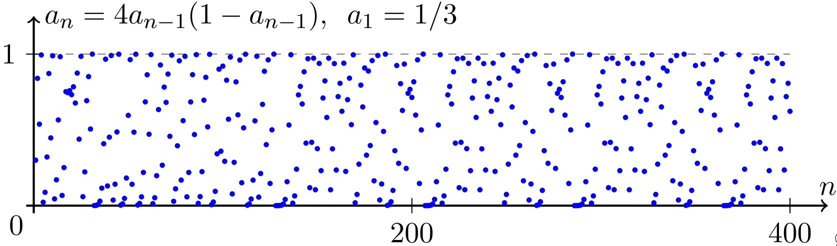
- Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Bolzanova-Weierstrassova věta

- Každá konvergentní posloupnost je omezená.
- Opak neplatí. Má každá omezená posloupnost aspoň hromadný bod?

Bolzanova-Weierstrassova věta

- Každá konvergentní posloupnost je omezená.
- Opak neplatí. Má každá omezená posloupnost aspoň hromadný bod?
- Představíme-li si omezenou a chaoticky se chovající posloupnost (a_n), může být překvapivé, že odpověď na otázku výše je **kladná**.



Věta (Bolzano-Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Věta (Bolzano-Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Důkaz.

Buď (a_n) omezená posloupnost.

Věta (Bolzano-Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Důkaz.

Buď (a_n) omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti (a_n). Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n), označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$.

Věta (Bolzano-Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Důkaz.

Buď (a_n) omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti (a_n). Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n), označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$.
Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů (a_n) a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n \to \infty} (c_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Věta (Bolzano-Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Důkaz.

Buď (a_n) omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti (a_n). Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n), označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$.
Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů (a_n) a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do **každého** z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$.

Věta (Bolzano-Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Důkaz.

Buď (a_n) omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1\rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti (a_n). Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1\rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1\rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n), označme ho $\langle b_2, c_2\rangle$.
Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů (a_n) a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do **každého** z intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$. Protože délky intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$ konvergují k nule, lze pro libovolné okolí H_x nalézt n dostatečně velké na to, aby celý interval $\langle b_n, c_n\rangle$ patřil do H_x. Proto lze v H_x nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) a x je tedy hromadným bodem (a_n). □

Limita monotonní posloupnosti

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Limita monotonní posloupnosti

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost (a_n) neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).

Limita monotonní posloupnosti

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost (a_n) neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že (a_n) je neklesající a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty má posloupnost (a_n) hromadný bod, označme ho x.

Limita monotonní posloupnosti

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost (a_n) neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že (a_n) je neklesající a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty má posloupnost (a_n) hromadný bod, označme ho x. Buď H_x libovolné okolí bodu x.

Limita monotonní posloupnosti

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost (a_n) neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že (a_n) je neklesající a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty má posloupnost (a_n) hromadný bod, označme ho x. Buď H_x libovolné okolí bodu x. Potom existuje jisté a_{n_0} patřící do H_x. Do tohoto okolí ale musí patřit všechna a_n s $n > n_0$, protože pro ně nutně platí $a_n \leq x$. □

Příklad (Limita posloupnosti harmonických čísel).

Zkoumejme limitu posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad (Limita posloupnosti harmonických čísel).

Zkoumejme limitu posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Tato posloupnost je očividně rostoucí. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme z ní posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \cdots + \frac{1}{2^j+2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost (b_n), a tedy i (a_n), není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka.

Věta (Bolzano-Cauchy):

Posloupnost (a_n) je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka.

Věta (Bolzano-Cauchy):

Posloupnost (a_n) je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má (a_n) limitu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka.

Věta (Bolzano-Cauchy):

Posloupnost (a_n) je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má (a_n) limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka.

Věta (Bolzano-Cauchy):

Posloupnost (a_n) je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má (a_n) limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže pro libovolné $n, m > n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti. $\square$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť (a_n) splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť (a_n) splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť (a_n) splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{n_0}(1)$.
Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti.
Posloupnost (a_n) je proto omezená.

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť (a_n) splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{n_0}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost (a_n) je proto omezená. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti (a_n).

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť (a_n) splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{n_0}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost (a_n) je proto omezená. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti (a_n).
Buď $H_x(\varepsilon/2)$ okolí bodu x. Pro $\varepsilon/2$ existuje n_0 tak, že pokud $m, n > n_0$ pak platí $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Určitě ale existuje $m > n_0$ tak, že $a_m \in H_x(\varepsilon/2)$. Tudíž pro $n > n_0$ je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \leq |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

Poznámka (Podílové kritérium):

Na tomto místě je vhodné připomenout postačující podmínku pro konvergenci probíranou na cvičení a to tzv. **podílové kritérium**. Buď (a_n) posloupnost **kladných** čísel a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

označme její hodnotu symbolem q. Potom

- pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Poznámka (Podílové kritérium):

Na tomto místě je vhodné připomenout postačující podmínku pro konvergenci probíranou na cvičení a to tzv. **podílové kritérium**. Buď (a_n) posloupnost **kladných** čísel a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

označme její hodnotu symbolem q. Potom

- pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Příklad.

Vypočtěte $\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!}$.

Poznámka (Podílové kritérium):

Na tomto místě je vhodné připomenout postačující podmínku pro konvergenci probíranou na cvičení a to tzv. **podílové kritérium**. Buď (a_n) posloupnost **kladných** čísel a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

označme její hodnotu symbolem q. Potom

- pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Příklad.

Vypočtěte $\lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!}$.
Protože

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10}{n+1} = 0$$

je původní zkoumaná limita rovna taktéž 0.

Hlavní body

1 Kritéria konvergence

2 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

3 Věty o limitách

4 Nerovnosti a limity

Definice operací na $\overline{\mathbb{R}}$

Definice:

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, v závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,
- $a < +\infty$: $\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Definice operací na $\overline{\mathbb{R}}$

Definice:

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, v závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,
- $a < +\infty$: $\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Poznámka:

Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě že výraz na pravé straně je definován. Klademe $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Nedefinovány zůstávají výrazy

$$\pm\infty - \pm\infty, \quad \pm\infty + \mp\infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0} \text{ pro } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Hlavní body

1 Kritéria konvergence

2 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

3 Věty o limitách

4 Nerovnosti a limity

Věta:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Věta:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Platí

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= a + b, \\ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= a - b, \\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= a \cdot b, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b}, \end{aligned}$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Poznámka:

Všimněte si, že aby podíl $\frac{a}{b}$ byl definován, musí být $b \neq 0$. Odtud již plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $b_n \neq 0$. Má tedy smysl zkoumat limitu posloupnosti (a_n/b_n).

Příklad.

Vypočtěte

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3}$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}$.

Věta:

Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\alpha|,$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

Věta:

Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\alpha|,$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

Věta:

Nechť (a_n) je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n+5} - n.$$

Hlavní body

1 Kritéria konvergence

2 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

3 Věty o limitách

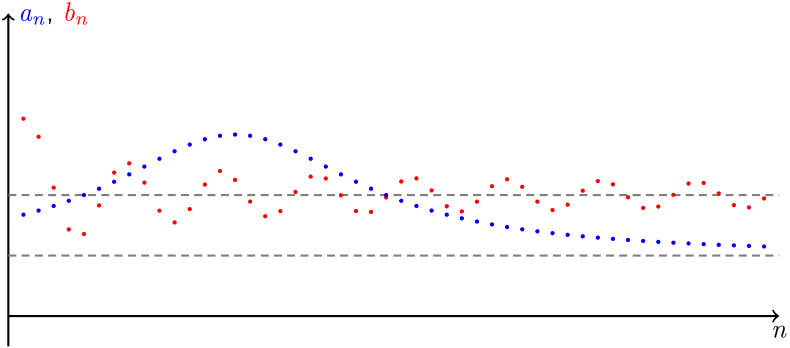
4 Nerovnosti a limity

Věta:

Nechť reálné posloupnosti (a_n) a (b_n) mají limity v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud

$$\lim a_n < \lim b_n$$

potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ platí $a_n < b_n$.



Důsledek:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Důsledek:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Důkaz.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\lim a_n > \lim b_n$. Potom podle předchozí věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > b_n$. To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností (a_n) a (b_n). $\square$

Důsledek:

Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Důkaz.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\lim a_n > \lim b_n$. Potom podle předchozí věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > b_n$. To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností (a_n) a (b_n). $\square$

Poznámka:

Všimněte si, že neostrost nerovnosti je zde důležitá. Například, pro $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$ platí ostrá nerovnost $a_n > b_n$ pro každé přirozené n, ale $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

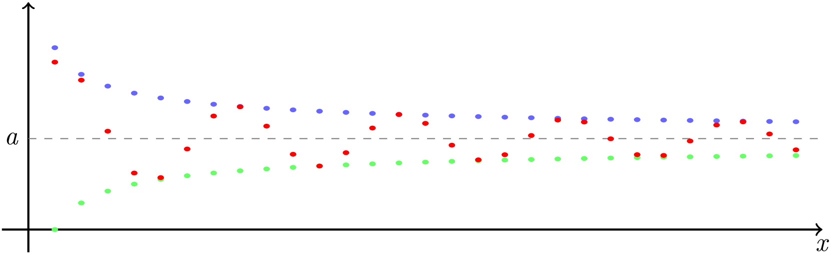
Věta o sevřené posloupnosti

Věta (O sevřené posloupnosti):

Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou reálné posloupnosti pro které platí

1. $\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0\big)\big(a_n \le b_n \le c_n\big)$
2. posloupnosti (a_n) a (c_n) mají stejnou limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Potom existuje limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim b_n = \alpha$.



Důkaz.

Buď H_α okolí bodu α. Existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > m_0$ patří jak a_n tak c_n do H_α. Pro $n > \max\{n_0, m_0\}$ do tohoto okolí musí patřit i b_n, protože $a_n \leq b_n \leq c_n$. Proto má posloupnost (b_n) limitu rovnou α. $\square$

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Funkce $\sin$ má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1\rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ je podle předchozí věty

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$