Základy matematické analýzy

Využití posloupností

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz [2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

1. Příklady
2. Rekurentně zadané posloupnosti
3. Číselné řady
4. Eulerovo číslo e
5. Exponenciální funkce

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$.

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Příklad.

Platí
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$.

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- **Případ** $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$
V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- **Případ** $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$
V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

- **Případ** $0 < a < 1$: Z předchozí bodu plyne $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, tudíž podle věty o limitě podílu platí
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém“ pořadí:

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= \big(1\cdot n\big)\cdot\big(2\cdot(n-1)\big)\cdot\big(3\cdot(n-2)\big)\cdots\big(n\cdot 1\big) =\\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém“ pořadí:

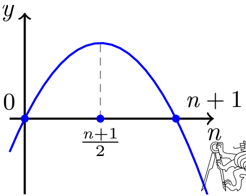
$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= \big(1\cdot n\big)\cdot\big(2\cdot(n-1)\big)\cdot\big(3\cdot(n-2)\big)\cdots\big(n\cdot 1\big) =\\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$

Z grafu paraboly $f(x) = x(n+1-x)$ je zřejmé, že

$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n$$

a proto $(n!)^2 \geq n^n$. Konečně, $2n$-tá odmocnina dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$



Příklad (!!!).

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti (a^n) platí:

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Příklad (!!!).

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti (a^n) platí:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

- **Jednoduché případy**: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $\big((-1)^n\big)$ neexistuje.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)$ je tedy klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim_{n \to +\infty} \left|a^n\right|$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)$ je tedy klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|a^n\right|$.

Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to+\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)$ je tedy klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|a^n\right|$.

Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to+\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Případ** $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)$ je rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)$ je tedy klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim_{n\to+\infty} \left|a^n\right|$.

Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to+\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Případ** $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)$ je rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim_{n\to+\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí

$$L = \lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to+\infty} a^n = a \cdot L.$$

Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$.

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right) = \left(\left(a^2\right)^n\right)$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right) = \left(\left(a^2\right)^n\right)$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)$ snadno spočteme

$$\lim_{n \to +\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n \to +\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right) = \left(\left(a^2\right)^n\right)$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

  Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to+\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to+\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

  Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n$, tedy neexistuje.

Shrnutí

posloupnost	limita
(n^a)	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$\left(\sqrt[n]{n}\right)$	1
$\left(\sqrt[n]{a}\right)$ pro $a > 0$	1
$\left(\sqrt[n]{n!}\right)$	$+\infty$
$\left(a^n\right)$	$\begin{cases} 0, & \lvert a \rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$

Hlavní body

Poznámka:

Doposud jsme se v příkladech setkávali pouze s explicitině zadanými posloupnostmi, tj. pro dané n bylo a_n explicitně dáno pomocí vzorce obsahujícího pouze n. Pokud je n-tý člen posloupnosti zadán pomocí předcházejících členů, nazýváme danou posloupnost **rekurentní**. Rekurentní posloupnost nemusí být možné převést na explicitně zadanou.

Poznámka:

Doposud jsme se v příkladech setkávali pouze s explicitině zadanými posloupnostmi, tj. pro dané n bylo a_n explicitně dáno pomocí vzorce obsahujícího pouze n. Pokud je n-tý člen posloupnosti zadán pomocí předcházejících členů, nazýváme danou posloupnost **rekurentní**. Rekurentní posloupnost nemusí být možné převést na explicitně zadanou.

Příklad.

Uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \text{ pro } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Poznámka:

Doposud jsme se v příkladech setkávali pouze s explicitině zadanými posloupnostmi, tj. pro dané n bylo a_n explicitně dáno pomocí vzorce obsahujícího pouze n. Pokud je n-tý člen posloupnosti zadán pomocí předcházejících členů, nazýváme danou posloupnost **rekurentní**. Rekurentní posloupnost nemusí být možné převést na explicitně zadanou.

Příklad.

Uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \text{ pro } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Nejprve si všimněme, že kdyby limita posloupnosti existovala (označme ji a), pak z definičního vztahu plyne

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 2} = \sqrt{a + 2}.$$

Tento vztah je v $\overline{\mathbb{R}}_+$ splněn buď pro $a = 2$ nebo $a = +\infty$. První možnost by nastala v případě omezenosti (a_n), druhá v případě neomezenosti.

Pokusme se nejprve ukázat, že (a_n) je monotónní. Zřejmě $a_n > 0$, $n \geq 1$, a tedy

$$a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \iff a_n^2 < a_n + 2 \iff 0 < (2 - a_n)(a_n + 1) \iff a_n < 2.$$

Posloupnost roste, právě když $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tuto nerovnost můžeme dokázat matematickou indukcí:

Pokusme se nejprve ukázat, že (a_n) je monotónní. Zřejmě $a_n > 0$, $n \geq 1$, a tedy

$$a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \iff a_n^2 < a_n + 2 \iff 0 < (2 - a_n)(a_n + 1) \iff a_n < 2.$$

Posloupnost roste, právě když $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tuto nerovnost můžeme dokázat matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$: $a_n = 1 < 2$ platí z definice.

Pokusme se nejprve ukázat, že (a_n) je monotónní. Zřejmě $a_n > 0$, $n \geq 1$, a tedy

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad &\iff \quad a_n^2 < a_n + 2 \quad \iff \quad 0 < (2 - a_n)(a_n + 1) \\ &\iff \quad a_n < 2. \end{aligned}$$

Posloupnost roste, právě když $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tuto nerovnost můžeme dokázat matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$: $a_n = 1 < 2$ platí z definice.
2. Předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, platí $a_n < 2$: Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \overset{\text{I.P.}}{<} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Pokusme se nejprve ukázat, že (a_n) je monotónní. Zřejmě $a_n > 0$, $n \geq 1$, a tedy

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad &\iff \quad a_n^2 < a_n + 2 \quad \iff \quad 0 < (2 - a_n)(a_n + 1) \\ &\iff \quad a_n < 2. \end{aligned}$$

Posloupnost roste, právě když $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tuto nerovnost můžeme dokázat matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$: $a_n = 1 < 2$ platí z definice.
2. Předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, platí $a_n < 2$: Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \overset{\text{I.P.}}{<} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Závěr: Ukázali jsme, že posloupnost (a_n) je rostoucí a shora omezená. Má tedy konečnou limitu, která je nutně rovna 2.

Hlavní body

Číselná řada

Definice:

Formální výraz typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**.

Číselná řada

Definice:

Formální výraz typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě.

Číselná řada

Definice:

Formální výraz typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě. **Součtem** konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

Příklad.

Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Příklad.

Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \qquad \text{(platí pro lib. } q \neq 1)$$

Takže pro $|q| < 1$ dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. Píšeme také

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Následující větu lze použít k vyvrácení konvergence řady.

Věta (Nutná podmínka konvergence):

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, potom pro limitu sčítanců platí $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.

Následující větu lze použít k vyvrácení konvergence řady.

Věta (Nutná podmínka konvergence):

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, potom pro limitu sčítanců platí $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.

Důkaz.

Označme $S \in \mathbb{R}$ součet naší konvergentní řady. Pro libovolné kladné celé n platí

$$0 \leq |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože $S = \lim_{n \to +\infty} s_n$ dostáváme z věty o sevřené posloupnosti $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. $\square$

Předchozí podmínka je pouze nutná, jak demonstruje následující příklad.

Příklad.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, pro $k = 1, 2, \ldots$. Víme již, že platí

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$. Zkoumaná řada diverguje.

Bolzanovo-Cauchyovo kritérium

Věta (Bolzano-Cauchy):

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Bolzanovo-Cauchyovo kritérium

Věta (Bolzano-Cauchy):

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Důkaz.

Jedná se pouze o použití Bolzanova-Cauchyova kritéria konvergence na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů. $\square$

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta:

Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta:

Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Důkaz.

Použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéra pro konvergenci řady. Buď $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konvergentní řada. Potom pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\left|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tedy konverguje. □

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď (a_n) monotónní posloupnost kladných členů konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

konverguje.

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď (a_n) monotónní posloupnost kladných členů konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Důkaz.

Důkaz tohoto kritéria vynecháváme (jedná se o speciální případ Dirichletova kritéria). □

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď (a_n) monotónní posloupnost kladných členů konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Důkaz.

Důkaz tohoto kritéria vynecháváme (jedná se o speciální případ Dirichletova kritéria). $\square$

Příklad.

Podle Leibnizova kritéria je řada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergentní. Ale není absolutně konvergentní. Z dřívější přednášky již víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

Věta (Srovnávací kritérium):

Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí odhad $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

Věta (Srovnávací kritérium):

Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí odhad $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

Důkaz.

Opět použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu předchozí věty. Tvrzení opět plyne z odhadu založeném na trojúhelníkové nerovnosti,

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots b_{n+p}. \quad \square$$

Věta (d'Alembertovo kritérium):

Buďte $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro všechna $k \in \mathbb{N}$ od jistého $k_0 \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Věta (d'Alembertovo kritérium):

Buďte $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro všechna $k \in \mathbb{N}$ od jistého $k_0 \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Důkaz.

Nechť tedy pro každé $k \geq k_0$ platí odhad $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$.

Věta (d'Alembertovo kritérium):

Buďte $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro všechna $k \in \mathbb{N}$ od jistého $k_0 \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Důkaz.

Nechť tedy pro každé $k \geq k_0$ platí odhad $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$. Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Věta (d'Alembertovo kritérium):

Buďte $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro všechna $k \in \mathbb{N}$ od jistého $k_0 \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Důkaz.

Nechť tedy pro každé $k \geq k_0$ platí odhad $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$. Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Už ale víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $|q| < 1$. Podle srovnávacího kritéria tedy konverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

- K splnění podmínky d'Alembertova kritéria například stačí, když

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q < 1.$$

- K splnění podmínky d'Alembertova kritéria například stačí, když

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q < 1.$$

- Podobným způsobem můžeme dále nahlédnout, že pokud všechna a_k jsou kladná a

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q > 1$$

pro $k \geq k_0$, potom řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

diverguje.

Příklad (Desetiný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Příklad (Desetiný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Příklad (Desetiný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje, její součet je $\frac{10}{9}$.

Hlavní body

Definice Eulerova čísla

Uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Definice Eulerova čísla

Uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Jedná se o řadu nezáporných členů pro něž platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada konverguje.

Poznámka:

Konvergenci této řady můžeme ukázat i přímo. Posloupnost jejích částečných součtů[a]

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

je monotónní a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Tímto postupem získáváme i horní odhad hodnoty její limity. Součet zkoumané řady tedy leží mezi čísly 1 a 3.

[a] Do konce této přednášky bude symbol s_n vyhrazen pro tento součet.

Definice (Eulerovo číslo):

Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

konverguje, její součet značíme e a nazýváme **Eulerovým číslem**.

Alternativní vyjádření Eulerova čísla

Při výpočtech limit často narazíme na potřebu vypočíst limitu posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Alternativní vyjádření Eulerova čísla

Při výpočtech limit často narazíme na potřebu vypočíst limitu posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lemma:

Posloupnost (a_n) konverguje a její limita je e. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Alternativní vyjádření Eulerova čísla

Při výpočtech limit často narazíme na potřebu vypočíst limitu posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lemma:

Posloupnost (a_n) konverguje a její limita je e. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Častá chyba

Pozor, ačkoliv v limitě

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

výraz v závorce konverguje k 1, $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, a konstantní posloupnost 1^n konverguje k 1, **není tato limita rovna** 1!

Pomocí binomické věty a úpravou kombinačních čísel upravíme výraz pro a_n,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Odtud ihned plyne odhad $a_n < s_n < 3$.

Pomocí binomické věty a úpravou kombinačních čísel upravíme výraz pro a_n,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Odtud ihned plyne odhad $a_n < s_n < 3$.

Dále lze výraz výše odhadnout následovně

$$a_n < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) = a_{n+1}.$$

Při odhadu jsme zvětšili každý výraz v závorce a přidali jeden kladný člen.

Pomocí binomické věty a úpravou kombinačních čísel upravíme výraz pro a_n,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Odtud ihned plyne odhad $a_n < s_n < 3$.

Dále lze výraz výše odhadnout následovně

$$a_n < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) = a_{n+1}.$$

Při odhadu jsme zvětšili každý výraz v závorce a přidali jeden kladný člen.

Posloupnost (a_n) je tedy monotónní (rostoucí) a omezená. Označme její limitu a.

Pro $m > n$ máme odhad

$$a_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right)$$

Pro $m > n$ máme odhad

$$a_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right)$$

Odtud limitním přechodem $m \to \infty$ dostáváme nerovnost

$$a \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Pro $m > n$ máme odhad

$$a_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right)$$

Odtud limitním přechodem $m \to \infty$ dostáváme nerovnost

$$a \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Uzavíráme, že pro každé n platí nerovnost

$$a_n < s_n \leq a.$$

Podle věty o limitě sevřené posloupnosti získáváme kýženou rovnost $a = e$. Tím je důkaz lemmatu dokončen.

Uvažme dále posloupnost

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Uvažme dále posloupnost

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

- Protože platí rovnost $b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, je limita posloupnosti (b_n) také rovna e.

Uvažme dále posloupnost

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

- Protože platí rovnost $b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, je limita posloupnosti (b_n) také rovna e.

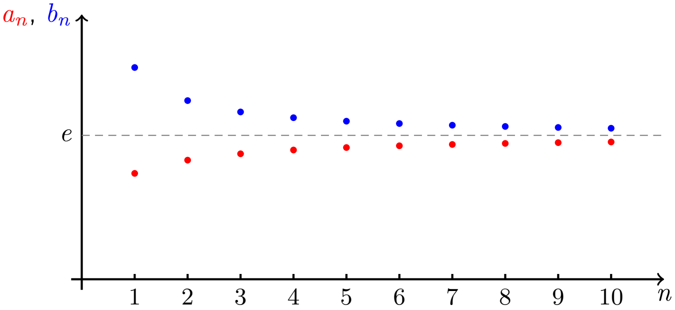
- Dále lze ukázat, že posloupnost (b_n) je klesající.

Poznámka:

Z vlastností posloupností (a_n) a (b_n) je zřejmé, že nerovnosti

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

platí pro každé kladné přirozené n. Jinak řečeno $e \in (a_n, b_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tato vlastnost nám umožňuje získat přibližnou hodnotu čísla e a **znát chybu**, které se dopustíme nahradíme-li e hodnotou některého členu a_n, či b_n pro konkrétní n.



n	a_n	b_n
1	2.0000000	4.0000000
2	2.2500000	3.3750000
3	2.3703704	3.1604938
4	2.4414062	3.0517578
5	2.4883200	2.9859840
6	2.5216264	2.9418974
7	2.5464997	2.9102854
8	2.5657845	2.8865076
9	2.5811748	2.8679720
10	2.5937425	2.8531167

Poznámka:

Vidíme, že posloupnosti nekonvergují k e příliš rychle ($e \approx 2.7182818$).

Poznámka (Rychlost konvergence (a_n) a (b_n) k e):

Skutečně, pro délku intervalu (a_n, b_n) platí

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) \cdot b_n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot b_n > \\ &> \frac{e}{n+1} > \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy ani po výpočtu a_{1000} a b_{1000} neznáme cifru na **třetím** místě za desetinnou čárkou v Eulerově čísle e.

Lemma (Odhad chyby při výpočtu e pomocí řady):

Pro rozdíl e od s_n (definice pomocí řady) platí

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Lemma (Odhad chyby při výpočtu e pomocí řady):

Pro rozdíl e od s_n (definice pomocí řady) platí

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Důkaz.

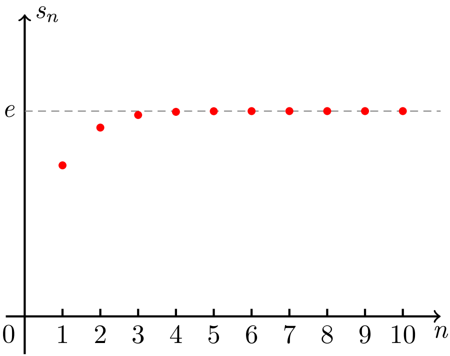
Pro $n \geq 1$ platí odhad

$$e - s_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!} \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^{k-1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pro $k \geq 2$ je totiž $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. □

Poznámka:

Prvních deset členů posloupnosti s_n. Výpočet je proveden s přesností na 8 cifer. Uvádíme i grafické znázornění.



n	s_n
1	2.0000000
2	2.5000000
3	2.6666667
4	2.7083333
5	2.7166667
6	2.7180556
7	2.7182540
8	2.7182788
9	2.7182815
10	2.7182818

Hlavní body

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

1. Klademe $a^0 := 1$.

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

1. Klademe $a^0 := 1$.
2. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$ a $a \neq 0$, definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$.

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

1. Klademe $a^0 := 1$.
2. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$ a $a \neq 0$, definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$.
3. Je-li $q \in \mathbb{N}$ a $a > 0$ položíme $a^{\frac{1}{q}} := b$, kde $b^q = a$, $b > 0$ (takové b existuje zřejmě právě jedno).

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

1. Klademe $a^0 := 1$.
2. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$ a $a \neq 0$, definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$.
3. Je-li $q \in \mathbb{N}$ a $a > 0$ položíme $a^{\frac{1}{q}} := b$, kde $b^q = a$, $b > 0$ (takové b existuje zřejmě právě jedno).
4. Konečně, pro $p \in \mathbb{Z}$, kladné $q \in \mathbb{N}$ a $a > 0$ klademe

$$a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Stále platí pravidla $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ a $(a^r)^s = a^{rs}$ pro $a > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$, a monotonie.

Zbývá ukázat, jak definovat a^x i pro iracionální x.

Zbývá ukázat, jak definovat a^x i pro iracionální x.

Lemma:

Pro dané iracionální x existují posloupnosti (α_n) a (β_n) takové, že $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, (α_n) je rostoucí, (β_n) je klesající a obě mají limitu x.

Zbývá ukázat, jak definovat a^x i pro iracionální x.

Lemma:

Pro dané iracionální x existují posloupnosti (α_n) a (β_n) takové, že $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, (α_n) je rostoucí, (β_n) je klesající a obě mají limitu x.

Důkaz.

Posloupnosti požadovaných vlastností zřejmě zkonstruujeme jako kraje smršťujících se uzavřených intervalů obsahujících x. Vizte diskuzi o Axiomu úplnosti. $\square$

Definice:

Pro iracionální x a $a > 0$ položíme

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n},$$

kde (α_n) a (β_n) jsou posloupnosti z předchozího Lemmatu.

Definice:

Pro iracionální x a $a > 0$ položíme

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n},$$

kde (α_n) a (β_n) jsou posloupnosti z předchozího Lemmatu.

Poznámka (Korektnost definice):

Všimněte si, že pro racionální r a s splňující $r < s$ a kladné $a > 1$ platí

$$a^r \leq a^s.$$

Odtud plyne, že (a^{α_n}) je rostoucí, (a^{β_n}) je klesající a platí $a^{\alpha_n} \leq a^{\beta_n}$ pro každé n. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existují konečné limity

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} \leq \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n}.$$

Dále lze ukázat, že tyto limity jsou shodné a nezávisí na volbě posloupností (α_n), (β_n). Případ $a < 1$ se ověří podobně.

Poznámka:

Pro $a > 0$ je funkce $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f_a(x) := a^x$ s $D_{f_a} = \mathbb{R}$

- rostoucí pokud $a > 1$,
- klesající pokud $0 < a < 1$,
- konstantní pokud $a = 1$.

Vyjma posledního případu je $H_f = (0, +\infty)$. Stále platí $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ a $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$.

Poznámka:

Pro $a > 0$ je funkce $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f_a(x) := a^x$ s $D_{f_a} = \mathbb{R}$

- rostoucí pokud $a > 1$,
- klesající pokud $0 < a < 1$,
- konstantní pokud $a = 1$.

Vyjma posledního případu je $H_f = (0, +\infty)$. Stále platí $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ a $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$.

Věta:

- Nechť (b_n) konverguje k $b \in \mathbb{R}$ a nechť $a > 0$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = a^b.$$

- Nechť posloupnost kladných čísel (a_n) konverguje k $a \in \mathbb{R}^+$ a $b \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^b = a^b.$$

Logaritmus

Definice:

Buď $0 < a \neq 1$, pak inverzní funkci k funkci f_a nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$. Platí

- $D_{\log_a} = (0, +\infty)$, $H_{\log_a} = \mathbb{R}$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $x, y > 0$,
- $\log_a\left(x^y\right) = y \log_a(x)$, $x > 0$ a $y \in \mathbb{R}$.

Logaritmus

Definice:

Buď $0 < a \neq 1$, pak inverzní funkci k funkci f_a nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$. Platí

- $D_{\log_a} = (0, +\infty)$, $H_{\log_a} = \mathbb{R}$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $x, y > 0$,
- $\log_a\left(x^y\right) = y \log_a(x)$, $x > 0$ a $y \in \mathbb{R}$.

Věta:

Pro $a > 0$, $a \neq 1$ a posloupnost (b_n) kladných čísel konvergující k $b \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\lim_{n \to +\infty} \log_a b_n = \log_a b.$$

Exponenciála a přirozený logaritmus

Definice:

Funkci $x \mapsto e^x$ nazýváme **exponenciální funkcí**, logaritmus o základu e nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme $\ln = \log_e$.

Exponenciála a přirozený logaritmus

Definice:

Funkci $x \mapsto e^x$ nazýváme **exponenciální funkcí**, logaritmus o základu e nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme $\ln = \log_e$.

Poznámka:

Exponenciální funkce a přirozený logaritmus jsou jedny z nejdůležitějších funkcí vůbec. Všimněte si, že přímo z jejich definice plyne pro $a > 0$ důležitý vztah $a = e^{\ln a}$ a proto

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Věta:

Je-li (a_n) posloupnost splňující $\lim |a_n| = +\infty$, pak

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Věta:

Je-li (a_n) posloupnost splňující $\lim |a_n| = +\infty$, pak

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Důsledek:

Pro reálné $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Věta:

Je-li (a_n) posloupnost splňující $\lim |a_n| = +\infty$, pak

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Důsledek:

Pro reálné $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Důkaz.

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Pokud $x \neq 0$, pak

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x,$$

protože $\lim \left|\frac{n}{x}\right| = +\infty$. $\square$