Základy matematické analýzy

Limita funkce

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz [2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

Připomenutí: vlastnosti funkcí

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že funkce f je

- **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, právě když obor hodnot H_f je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.

Připomenutí: vlastnosti funkcí

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že funkce f je

- **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, právě když obor hodnot H_f je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.
- **rostoucí** na intervalu $I \subset D_f$, právě když $\big(\forall x_1, x_2 \in I\big)\big(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\big)$.

Připomenutí: vlastnosti funkcí

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že funkce f je

- **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, právě když obor hodnot H_f je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.
- **rostoucí** na intervalu $I \subset D_f$, právě když $\big(\forall x_1, x_2 \in I\big)\big(x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)\big)$.
- **klesající** na intervalu $I \subset D_f$, právě když $\big(\forall x_1, x_2 \in I\big)\big(x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)\big)$.

Připomenutí: vlastnosti funkcí

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že funkce f je

- **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, právě když obor hodnot H_f je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.
- **rostoucí** na intervalu $I \subset D_f$, právě když $\big(\forall x_1, x_2 \in I\big)\big(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\big)$.
- **klesající** na intervalu $I \subset D_f$, právě když $\big(\forall x_1, x_2 \in I\big)\big(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)\big)$.
- **monotónní**, právě když je klesající nebo rostoucí.

Poznámka:

Pomocí kvantifikátorů můžeme podmínku omezenosti zformulovat následovně:

$$\big(\exists K > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(|f(x)| \leq K\big).$$

Podobně lze postupovat u omezenosti shora, resp. zdola.

Poznámka:

Pomocí kvantifikátorů můžeme podmínku omezenosti zformulovat následovně:

$$\big(\exists K > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(|f(x)| \leq K\big).$$

Podobně lze postupovat u omezenosti shora, resp. zdola.

Poznámka:

Je-li funkce f monotonní, pak je i prostá. Tudíž existuje její inverzní funkce, kterou značíme f^{-1}. Platí

$$\begin{aligned} f \text{ je rostoucí} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je rostoucí},\\ f \text{ je klesající} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je klesající}. \end{aligned}$$

Poznámka:

Pomocí kvantifikátorů můžeme podmínku omezenosti zformulovat následovně:

$$\big(\exists K > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(|f(x)| \leq K\big).$$

Podobně lze postupovat u omezenosti shora, resp. zdola.

Poznámka:

Je-li funkce f monotonní, pak je i prostá. Tudíž existuje její inverzní funkce, kterou značíme f^{-1}. Platí

$$\begin{aligned} f \text{ je rostoucí} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je rostoucí,} \\ f \text{ je klesající} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je klesající.} \end{aligned}$$

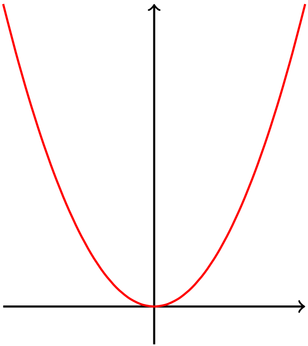
Poznámka:

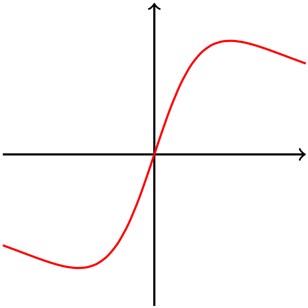
Prostá funkce nemusí být monotonní. Příkladem prosté funkce, která není ani klesající ani rostoucí je $f(x) := \frac{1}{x}$ s definičním oborem $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definice:

Reálná funkce reálné proměnné f se nazývá

- **sudá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = f(-x)$.
- **lichá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = -f(-x)$.

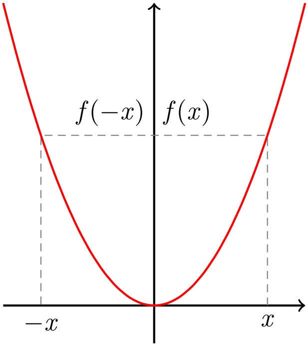


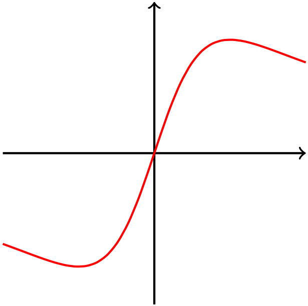


Definice:

Reálná funkce reálné proměnné f se nazývá

- **sudá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = f(-x)$.
- **lichá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = -f(-x)$.

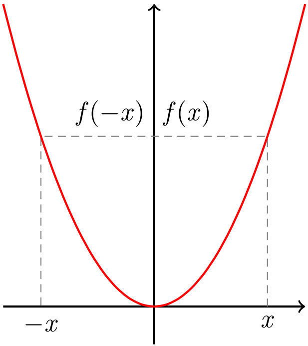


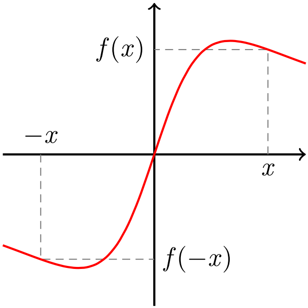


Definice:

Reálná funkce reálné proměnné f se nazývá

- **sudá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = f(-x)$.
- **lichá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = -f(-x)$.



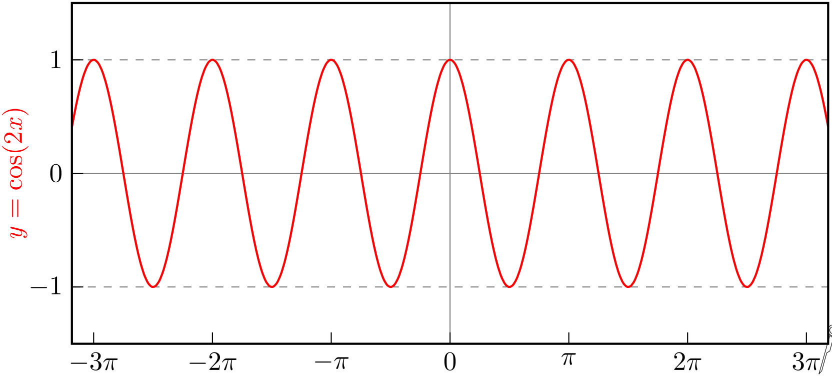


Definice:

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro niž existuje kladné $T \in \mathbb{R}$ takové, že

1. $\big(\forall x \in D_f\big)\big(x + T,\ x - T \in D_f\big)$,
2. $\big(\forall x \in D_f\big)\big(f(x + T) = f(x)\big)$.

Říkáme, že funkce f je **periodická** a číslo T nazýváme **periodou** funkce f.

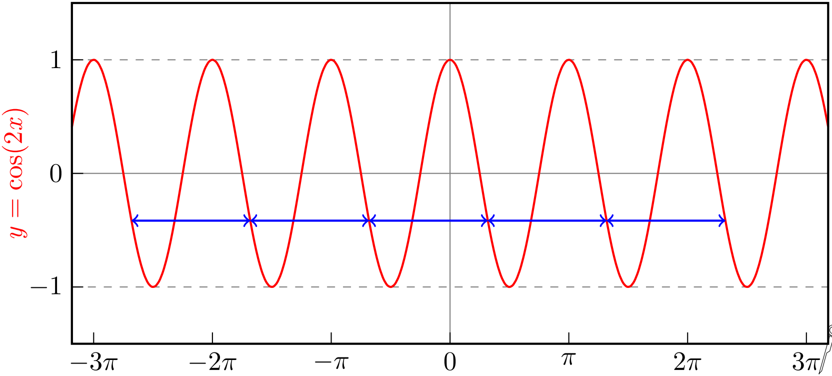


Definice:

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro niž existuje kladné $T \in \mathbb{R}$ takové, že

1. $\big(\forall x \in D_f\big)\big(x + T,\ x - T \in D_f\big)$,
2. $\big(\forall x \in D_f\big)\big(f(x + T) = f(x)\big)$.

Říkáme, že funkce f je **periodická** a číslo T nazýváme **periodou** funkce f.



Hlavní body

Limita funkce

Definice:

Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť f je definovaná na okolí bodu a, s možnou vyjímkou bodu a samotného. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce f v bodě** a, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a \setminus \{a\}$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \lim_{a} f = c.$$

Poznámka (ε-δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim_{x\to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon\big).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Poznámka (ε-δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-c| < \varepsilon\big).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a.

Poznámka (ε-δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon\big).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$, $D_f := \mathbb{R}$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Poznámka (ε-δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-c| < \varepsilon\big).$$

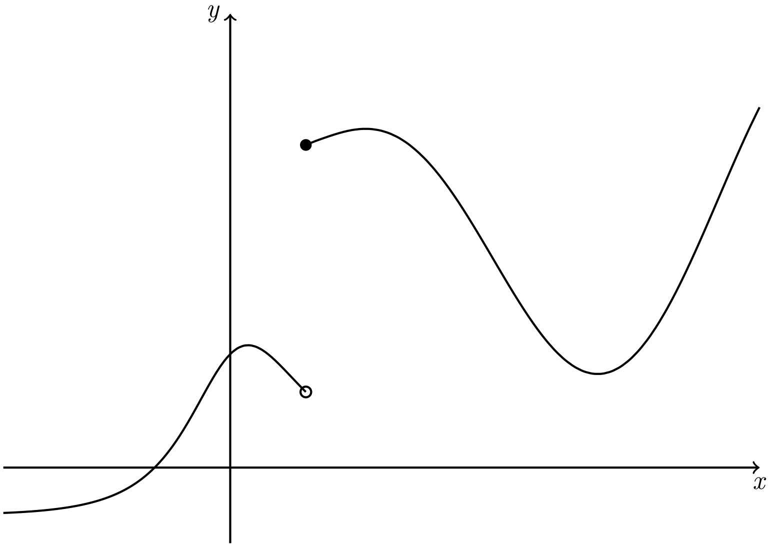
Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

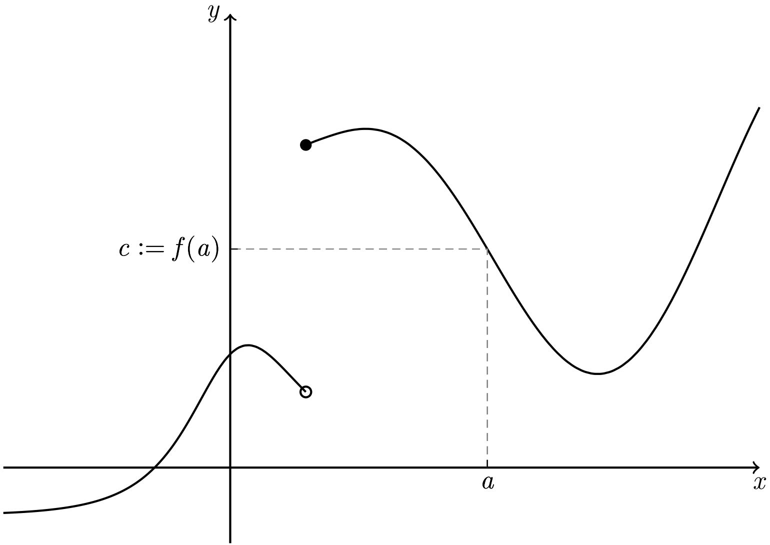
Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$, $D_f := \mathbb{R}$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$, $D_f := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

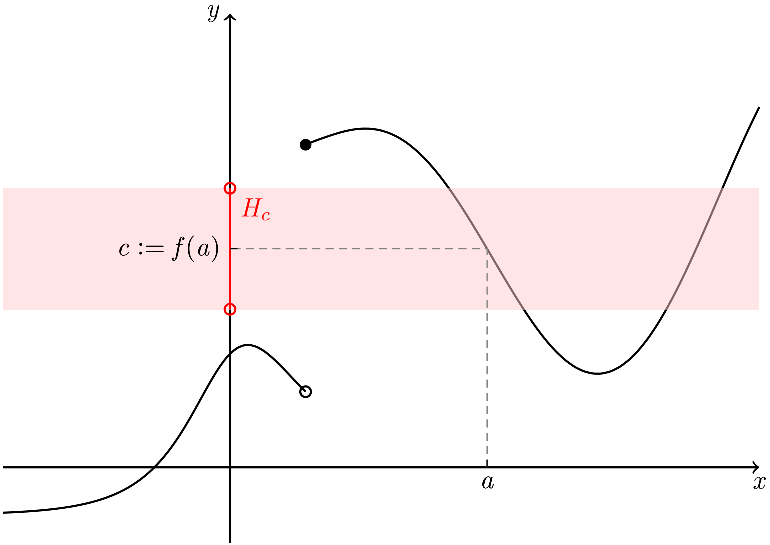
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



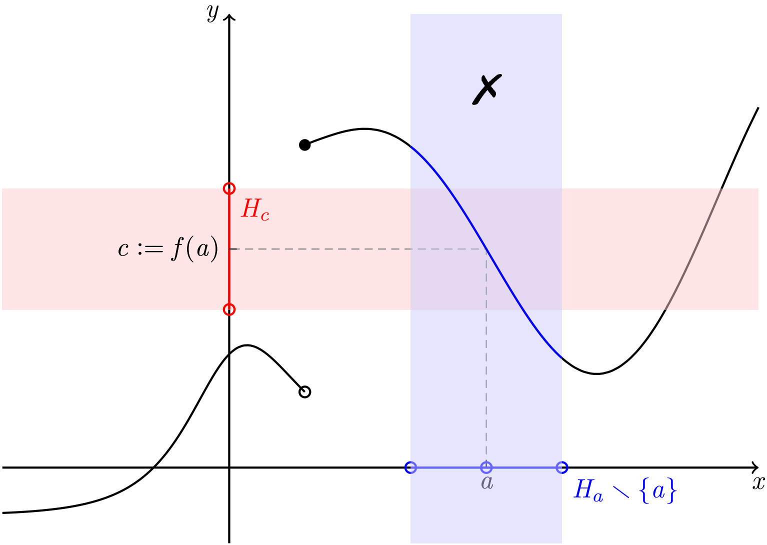
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



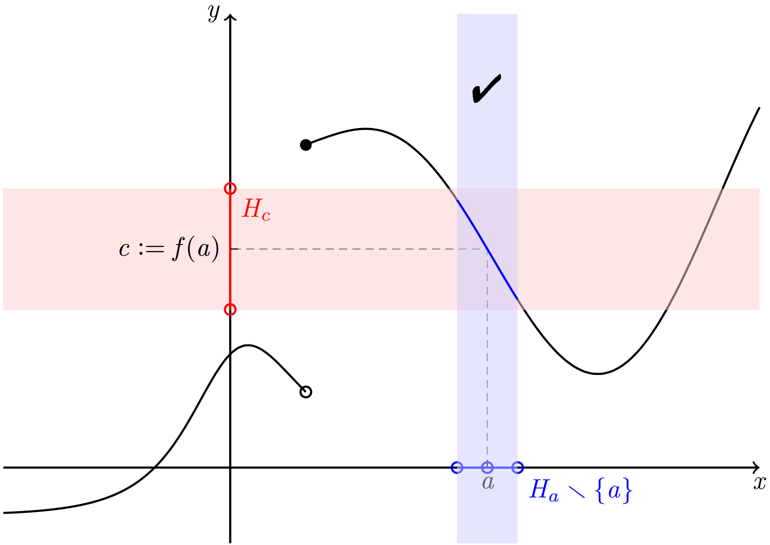
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



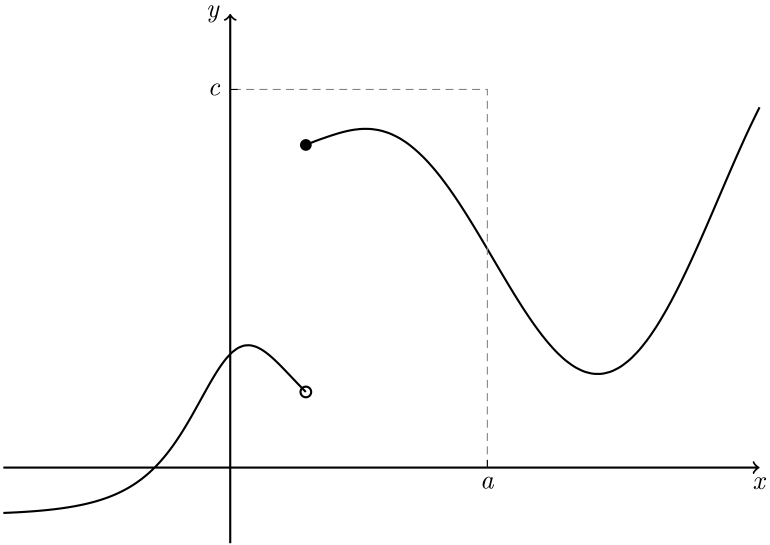
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



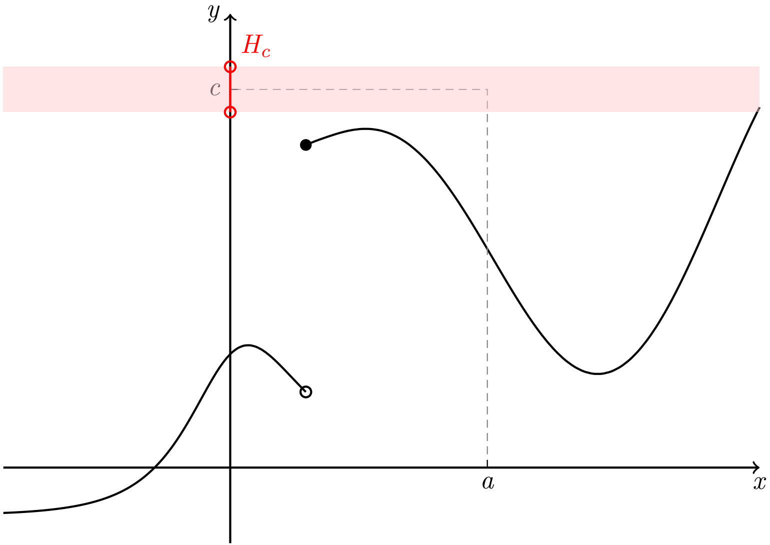
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



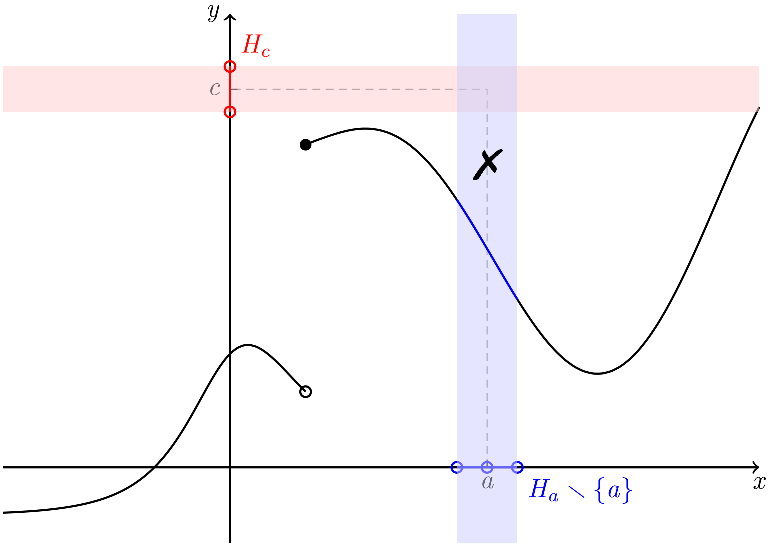
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Jednostranná limita funkce

Definice:

Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \mathbb{R}$. Nechť f je definovaná na levém, resp. pravém okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a.

Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** a **zleva, resp. zprava**, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje levé okolí H_a^-, resp. pravé okolí H_a^+, bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a^- \setminus \{a\}, \text{ resp. } x \in H_a^+ \setminus \{a\},$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

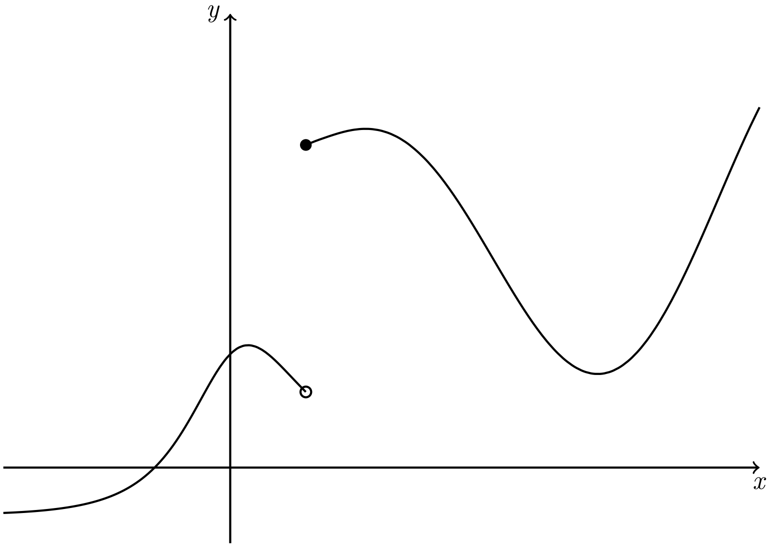
Zapisujeme

$$\lim_{x \to a-} f(x) = c, \quad \lim_{a-} f = c,$$

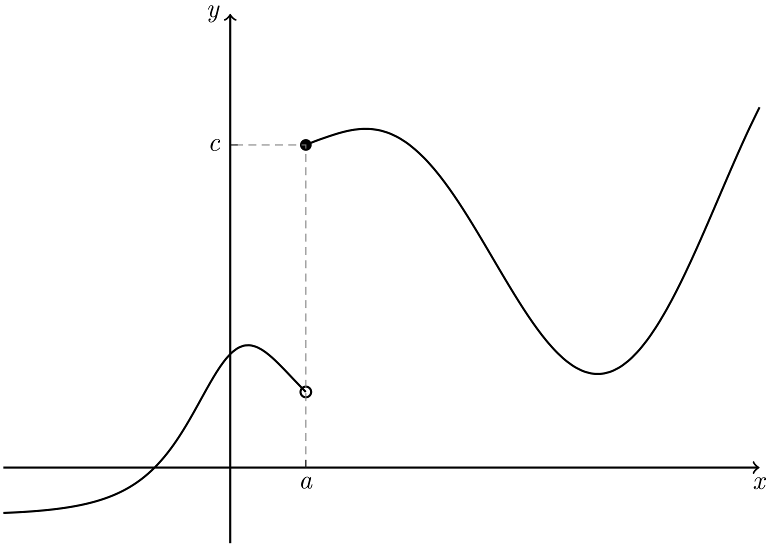
resp.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = c, \quad \lim_{a+} f = c,$$

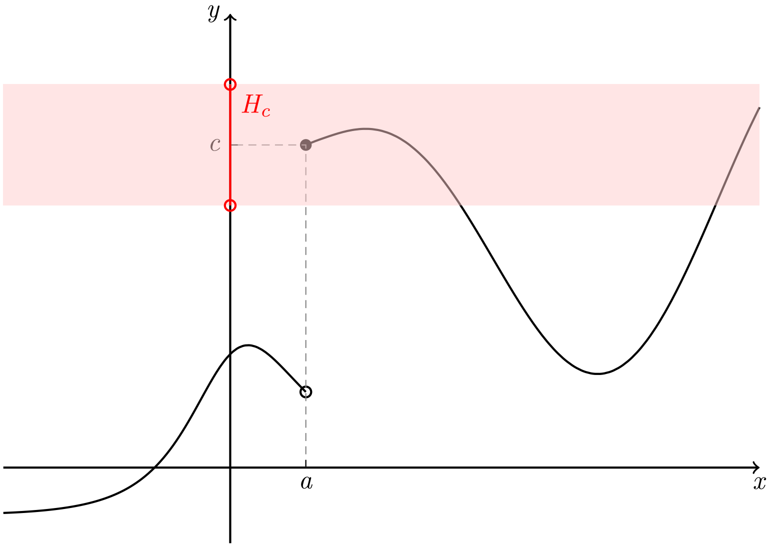
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



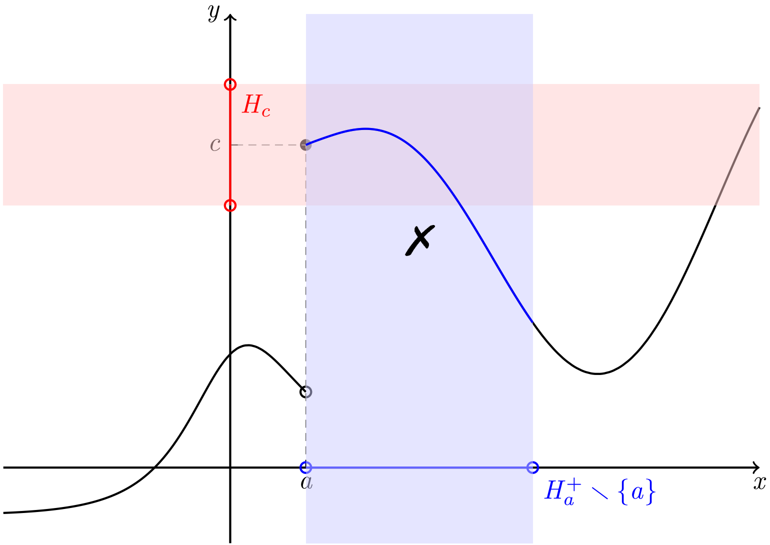
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



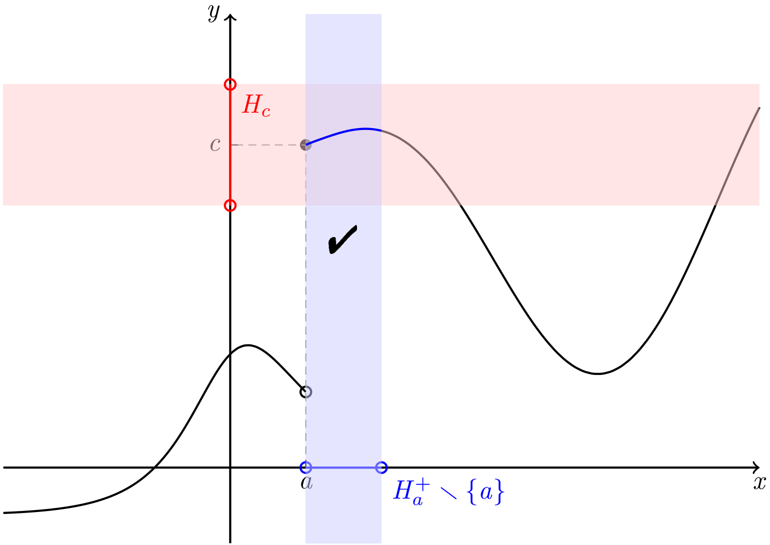
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Příklad.

Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Příklad.

Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Vezmu-li libovolné okolí H_a bodu a pak pro $x \in H_a \setminus \{a\}$ zcela jistě platí, že $x \in H_a$.

Hlavní body

Vztah limity a jednostranných limit

Věta:

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c.

Vztah limity a jednostranných limit

Věta:

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c.

Důsledek:

Nechť f je funkce a bod $a \in \mathbb{R}$. Platí-li aspoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé,
- aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě a neexistuje,

potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Příklad.

Limita

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje.

Příklad.

Limita

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje.

Pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x \to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1,$$
$$\lim_{x \to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Podle předchozího důsledku oboustranná limita nemůže existovat ($1 \neq -1$).

Ekvivalentní definice limity

Věta (Heine):

$\lim_{x\to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost (x_n) s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Ekvivalentní definice limity

Věta (Heine):

$\lim_{x \to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost (x_n) s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

Věta (Heine pro jednostranné limity):

$\lim_{x \to a-} f(x) = c$, resp. $\lim_{x \to a+} f(x) = c$, právě když je f definována na levém, resp. pravém, okolí bodu a a pro každou posloupnost (x_n) s limitou a a splňující

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (-\infty, a), \quad \text{resp.} \quad \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (a, +\infty),$$

platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

Příklad.

Platí

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Použijme Heineho větu. Funkce
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$
je definována na jistém okolí bodu 0 s vyjímkou bodu 0 samotného, např. na
$$H_0(1) \smallsetminus \{0\} = (-1,1) \smallsetminus \{0\}.$$

Buď (x_n) libovolná posloupnost patřící do $(-1,1) \smallsetminus \{0\}$ a splňující $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Potom
$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x_n}}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e,$$
protože $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x_n}\right| = +\infty$.

Poznámka:

Heineho věta nám umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.

Poznámka:

Heineho věta nám umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.

Důsledek:

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a (x_n), (z_n) jsou dvě reálné posloupnosti patřící do D_f, konvergující k a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud limity

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Příklad.

Limita
$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$
neexistuje.

Příklad.

Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

neexistuje.

Označme $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ a položme

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

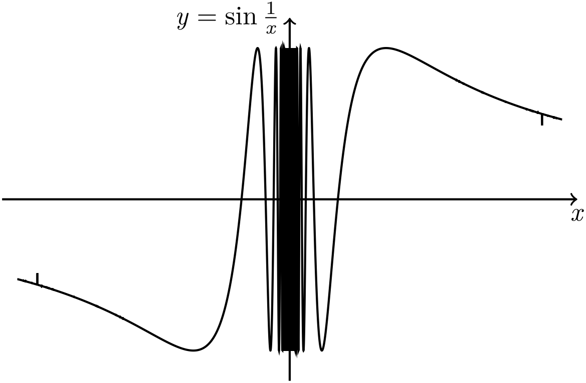
Tyto posloupnosti splňují

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}.$$

Konečně

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Graf funkce $\sin \frac{1}{x}$



Nástroje pro výpočet limity funkce

Věta:

Nechť f a g jsou funkce a a prvek $\overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g,$$
$$\lim_a f \cdot g = \lim_a f \cdot \lim_a g,$$
$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g},$$

platí v případě, že výrazy na pravé straně jsou definovány a v posledním případě za předpokladu, že $\frac{f}{g}$ je definována na okolí bodu a s možnou vyjímkou bodu a samotného.

Poznámka:

Analogická věta platí i pro jednostranné limity.

Počítat limitu polynomů je díky této větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Počítat limitu polynomů je díky této větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Počítat limitu polynomů je díky této větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Například tedy platí

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Příklad.

Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2),$$

tudíž $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pro výpočet limity v bodě $a = -1$ můžeme proto použít větu o limitě podílu,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě d upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě d upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x\to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Pro výpočet limit v bodech b a c je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatel,

$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$

Tudíž, opět pomocí předešlých vět,

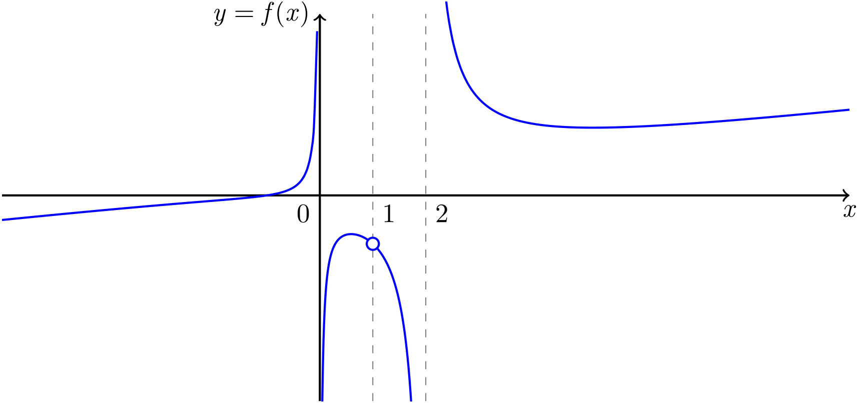
$$\lim_{x\to b} = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x\to c} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \frac{21}{2}\cdot(+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x\to c-} f(x) = \frac{21}{2}\cdot(-\infty) = -\infty$$

Graf funkce z posledního příkladu

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$



Věta o limitě složené funkce

Připomeňme pojem složeného zobrazení.

Definice:

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : A \to C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \Big\{x \in D_f \Big| f(x) \in D_g\Big\}.$$

Věta o limitě složené funkce

Připomeňme pojem složeného zobrazení.

Definice:

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : A \to C$ předpisem

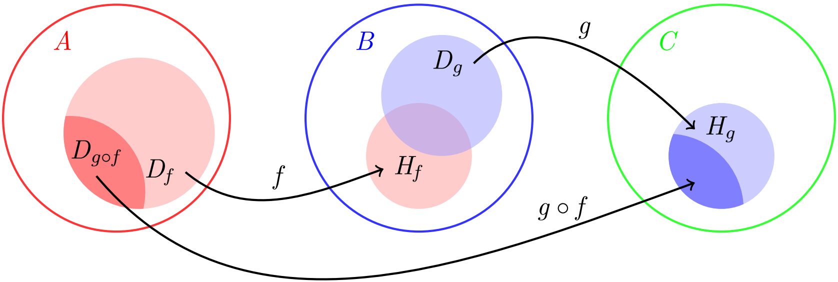
$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \big\{x \in D_f \big| f(x) \in D_g\big\}.$$

Poznámka:

Tedy $D_{g \circ f} \subset D_f$. I v případě, že $D_f \neq \emptyset$ a $D_g \neq \emptyset$ může nastat situace $D_{g \circ f} = \emptyset$.



A
B
C
$D_{g\circ f}$
D_f
f
D_g
H_f
g
H_g
$g \circ f$

Věta (O limitě složené funkce):

Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí tři podmínky

1. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$,
2. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$,
3. buď $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \smallsetminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = c$.

Příklad.

Ukažte rovnost

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Příklad.

Ukažte rovnost

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Použijeme větu o limitě složené funkce na:

- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ a $x \to 0$,
- vnější funkcí je $f(x) = \ln x$ a $b = e$,
- vnitřní funkcí je $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ a $a = 0$.

Příklad.

Ukažte rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Použijeme větu o limitě složené funkce na:

- $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ a $x \to 0$,
- vnější funkcí je $f(x) = \ln x$ a $b = e$,
- vnitřní funkcí je $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ a $a = 0$.

Ověřme předpoklady věty:

1. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to e} \ln(x) = 1 = c$,
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = b$,
3. $b = e \in D_f = D_{\ln} = (0, +\infty)$, $f(b) = \ln e = 1$.

Tudíž

$$\lim_{x\to 0} (f \circ g)(x) = 1.$$

Příklad.

Dokažte
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Příklad.

Dokažte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Využijeme znalosti limity z předchozího příkladu,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{\ln e^x} = \frac{e^x - 1}{\ln(1 + e^x - 1)}.$$

Ve větě o limitě složené funkce položme

- vnější funkcí je $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$, $b = 0$
- vnitřní funkcí je $g(x) = e^x - 1$, $a = 0$.

Příklad.

Dokažte
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Využijeme znalosti limity z předchozího příkladu,
$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x-1}{\ln e^x}=\frac{e^x-1}{\ln(1+e^x-1)}.$$

Ve větě o limitě složené funkce položme

- vnější funkcí je $f(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}$, $b=0$
- vnitřní funkcí je $g(x)=e^x-1$, $a=0$.

Ověřme předpoklady věty:

1. $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=1=c$,
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^x-1=0=b$,
3. $b\notin D_f$, ale $g(x)=e^x-1\neq 0$ pro každé $x\neq 0=a$.

Potom
$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=1.$$

Hlavní body

Věta:

Nechť existují limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Pak platí dvě tvrzení:

1. Pokud $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

   $$\text{pro všechna } x \in H_a \setminus \{a\} \text{ platí } f(x) < g(x).$$

2. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že

   $$\text{pro všechna } x \in H_a \setminus \{a\} \text{ je } f(x) \leq g(x),$$

   potom $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Podobně jako v případě limit posloupností platí věta o limitě sevřené posloupnosti, platí v případě funkcí i následující věta:

Věta (O limitě sevřené funkce):

Nechť pro funkce f, g, h a body $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:

1. existuje okolí H_a bodu a takové, že pro každé $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
2. existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = c$.

Potom existuje i limita $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ a je rovna c.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ totiž neexistuje.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ totiž neexistuje.
- Ovšem nerovnost

$$f(x) := 0 \leq g(x) := \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ totiž neexistuje.
- Ovšem nerovnost

$$f(x) := 0 \leq g(x) := \left| x \sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

- Zvolíme-li např. $H_a = (-1, 1)$ okolí bodu $a = 0$, pak
  1. nerovnost $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ platí pro každé $x \in (-1, 1) \smallsetminus \{0\}$,
  2. existují $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Podle věty o limitě sevřené funkce pak $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left| x \sin\dfrac{1}{x} \right| = 0$.

Příklad.

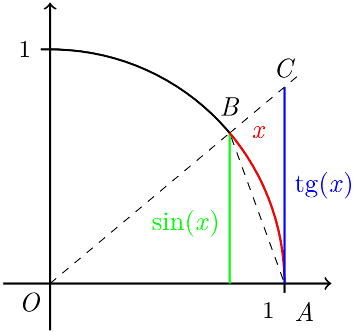
Ověřte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad.

Ověřte
$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$
Porovnejte obsahy trojůhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.



Příklad.

Ověřte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

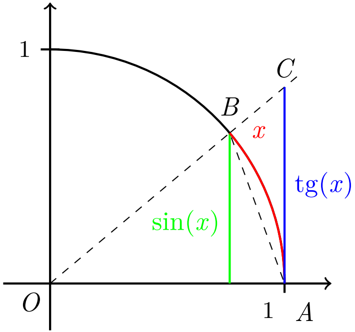
- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Porovnejte obsahy trojůhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.

- Funkce $\sin$ je lichá a tudíž

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Příklad.

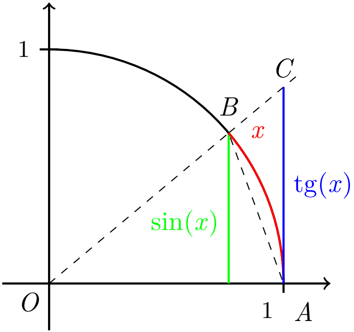
Ověřte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Porovnejte obsahy trojůhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.



- Funkce $\sin$ je lichá a tudíž

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Potom $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. A z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak i $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. (Rozmyslete znaménko!)

- Funkce $\sin$ i tg jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

plyne nerovnost

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \smallsetminus \{0\}.$$

Odtud ihned dostáváme hledanou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je totiž kladná na jistém okolí nuly.