Základy matematické analýzy

Spojitost funkce

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz [2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

1. Definice a kriteria spojitosti
2. Numerické řešení rovnic
3. Spojitost elementárních funkcí

Spojitost

Definice:

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce

- f je **spojitá v bodě** a, pokud $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Spojitost

Definice:

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce

- f je **spojitá v bodě** a, pokud $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Spojitost

Definice:

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce

- f je **spojitá v bodě** a, pokud $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
- f je **spojitá v bodě** a **zleva**, pokud $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Spojitost

Definice:

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce

- f je **spojitá v bodě** a, pokud $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
- f je **spojitá v bodě** a **zleva**, pokud $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Poznámka ($\varepsilon - \delta$ formulace spojitosti):

Je-li funkce definovaná na okolí bodu $a \in D_f$, pak a i $f(a) \in \mathbb{R}$ a dostáváme alternativní definici:

- Funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Vlastnosti spojitých funkcí

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Vlastnosti spojitých funkcí

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Vlastnosti spojitých funkcí

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta:

Součet a součin dvou funkcí f a g spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Vlastnosti spojitých funkcí

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta:

Součet a součin dvou funkcí f a g spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Věta:

Buďte g funkce spojitá v bodě a a f funkce spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.

Spojitost polynomů

Příklad.

V předchozí přednášce jsme ukázali, že pro libovolné reálné a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad.

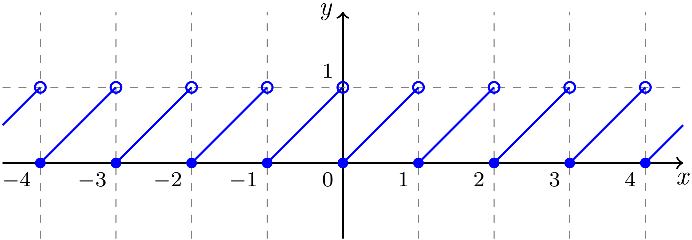
Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Příklad.

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) + 1.$$



Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice:

Funkce f je

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice:

Funkce f je

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice:

Funkce f je

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice:

Funkce f je

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Hlavní body

Formulace problému

Řadu problémů lze formulovat jako hledání řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

V této části ukážeme jednoduchou postačující podmínku pro existenci řešení takovéto rovnice a algoritmus hledající aspoň jedno z možných řešení.

Příklad.

Vypočíst numerickou hodnotu $\sqrt{2}$ znamená řešit rovnici

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Věta (Metoda půlení intervalu):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Věta (Metoda půlení intervalu):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Věta (Metoda půlení intervalu):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
2. Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
3. Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, proveďme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b_1.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti (a_n), (b_n) splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti (a_n), (b_n) splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b \rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b \rangle$.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti (a_n), (b_n) splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b \rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b \rangle$.

Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$ mohou poslední rovnosti nastat pouze v případě že $f(c) = 0$.

Poznámka (Komentář k důkazu):

- Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

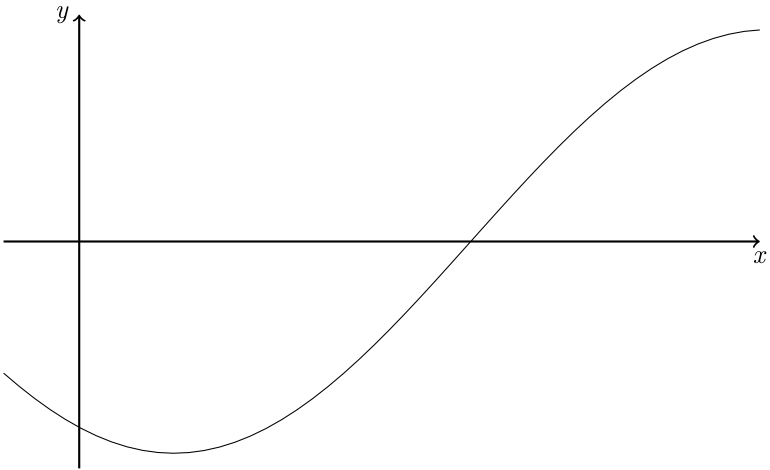
Poznámka (Komentář k důkazu):

- Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

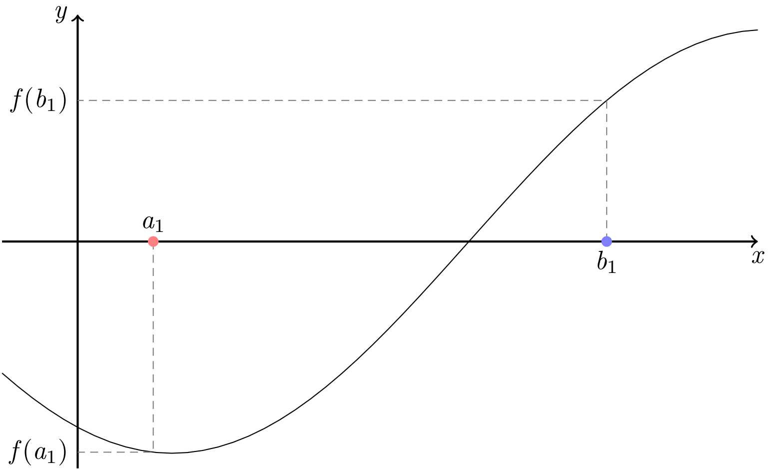
Důsledek:

Buď f spojitá funkce na intervalu J a nechť platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.

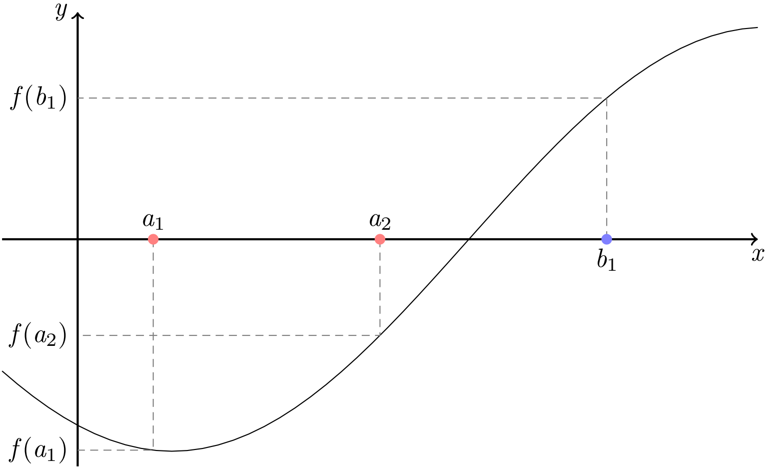
Ilustrace metody půlení intervalu



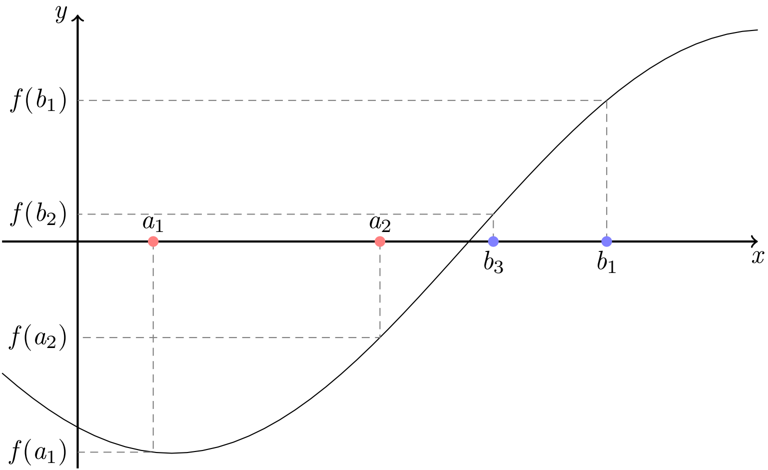
Ilustrace metody půlení intervalu



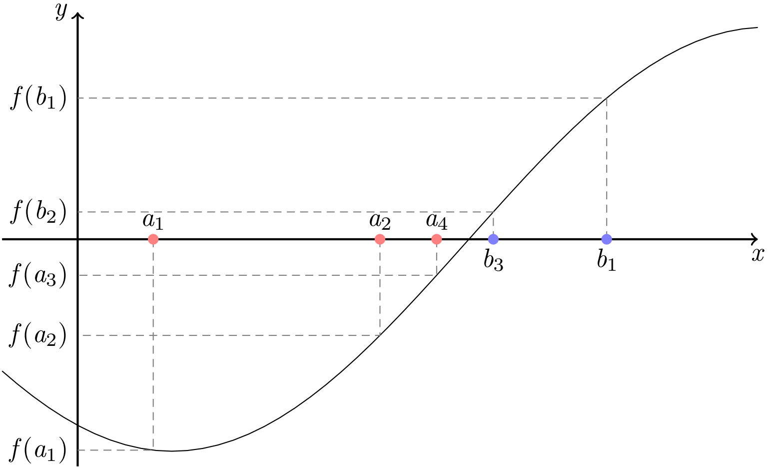
Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu

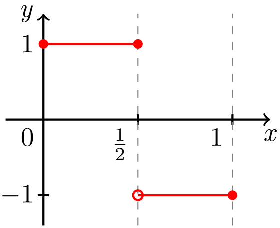


Poznámka:

Předpoklad spojitosti v předešlé větě je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Sice $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0, 1)$ splňující $f(x) = 0$.



Další důsledek

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Další důsledek

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Další důsledek

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna k mezi α a β také v $f(J)$.

Další důsledek

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna k mezi α a β také v $f(J)$.

Jistě existují $a, b \in J$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ a BÚNO $a < b$. Položme $g(x) := f(x) - k$. Funkce g je spojitá na $\langle a, b \rangle$, $g(a) = \alpha - k$ a $g(b) = \beta - k$ jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = 0$, tj. $f(c) = k$. □

Hlavní body

1. Definice a kriteria spojitosti
2. Numerické řešení rovnic
3. Spojitost elementárních funkcí

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.

Důsledek:

Z posledního příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí (využijeme později)

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí (využijeme později)

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí (využijeme později)

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí (využijeme později)

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Konečně

$$\lim_{x \to a} e^x - e^a = \lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \cdot (x - a) = e^a \cdot 0 = 0.$$

Čili $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$.

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}_+$ a navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}_+$ a navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}_+$ a navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}_+$ a navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

A konečně

$$\lim_{x \to a} \ln(x) - \ln(a) = \lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

Čili funkce $\ln$ je spojitá v bodě a.

Příklad.

Funkce x^n je spojitá pro každé $n \in \mathbb{N}$ v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Příklad.

Funkce x^n je spojitá pro každé $n \in \mathbb{N}$ v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Spojitost je zřejmá (věta o spojitosti součinu spojitých funkcí). Dále

$$\begin{aligned}\frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x - a} \cdot (x - a)\big(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\big)\\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}.\end{aligned}$$

Příklad.

Funkce x^n je spojitá pro každé $n \in \mathbb{N}$ v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, navíc platí

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Spojitost je zřejmá (věta o spojitosti součinu spojitých funkcí). Dále

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x - a} \cdot (x - a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$