Základy matematické analýzy

Derivace

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz [2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

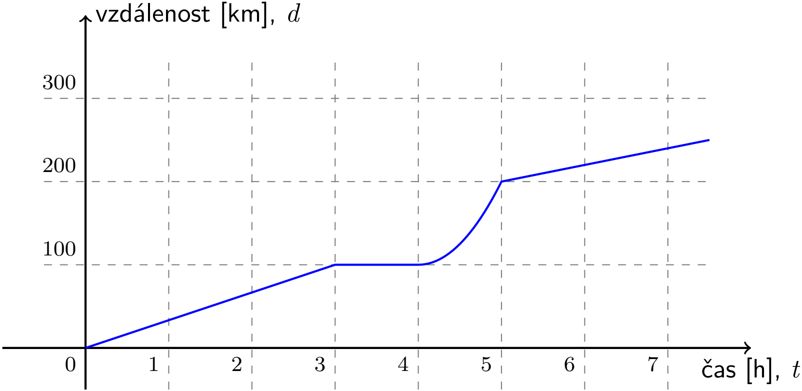
Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

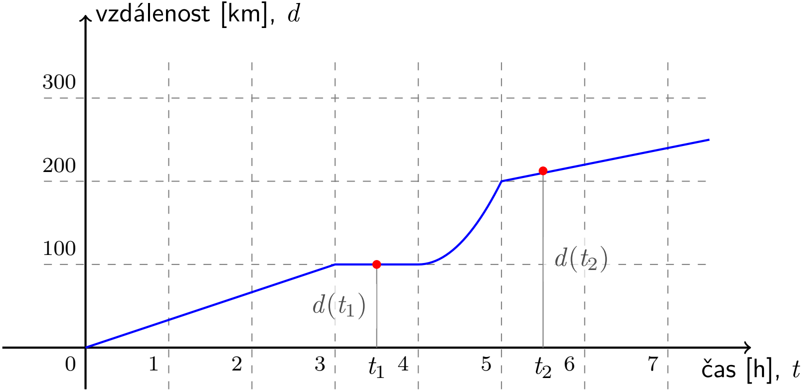
1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Další poznámky

Rychlost



- Tento graf zachycuje vzdálenost uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Uražená vzdálenost tělesa d je tedy **funkcí** času t.

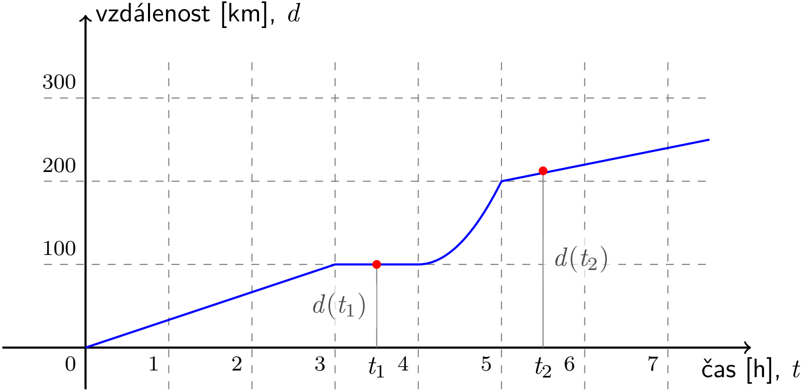
Rychlost



- Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky $t_1 < t_2$ je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

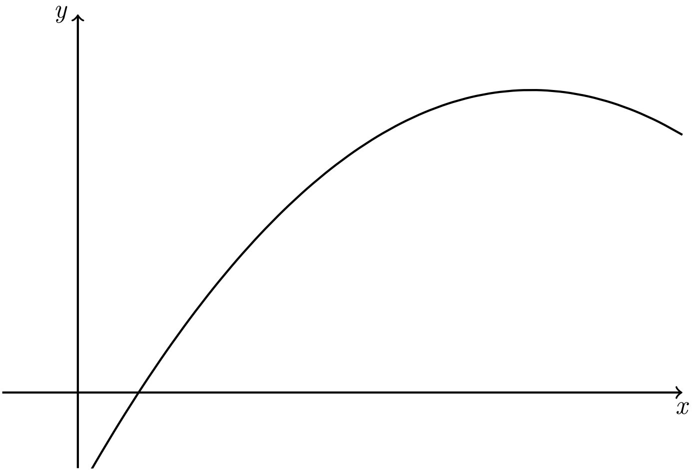
Rychlost



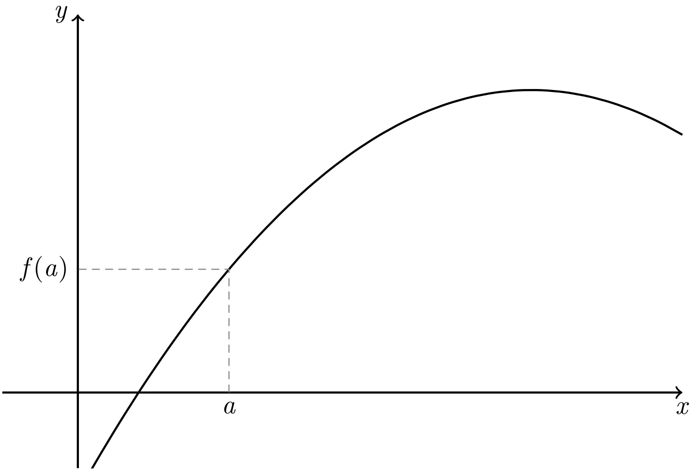
- Čím jsou t_1 a t_2 navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase t_1 se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

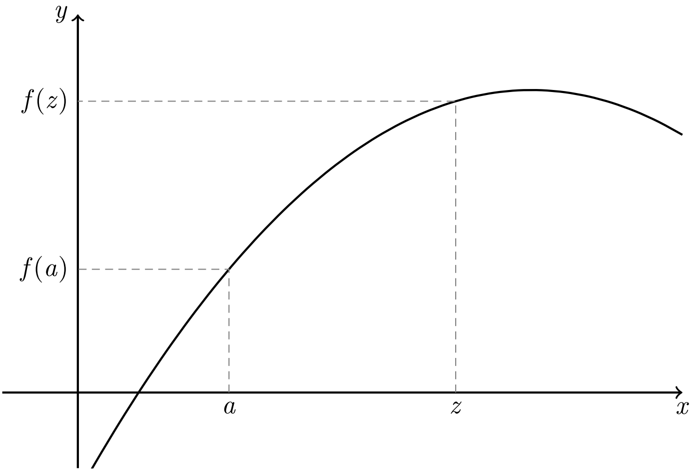
Tečna ke grafu funkce



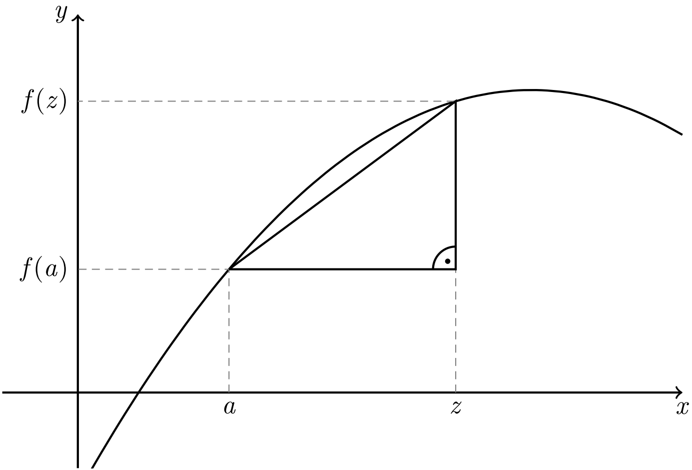
Tečna ke grafu funkce



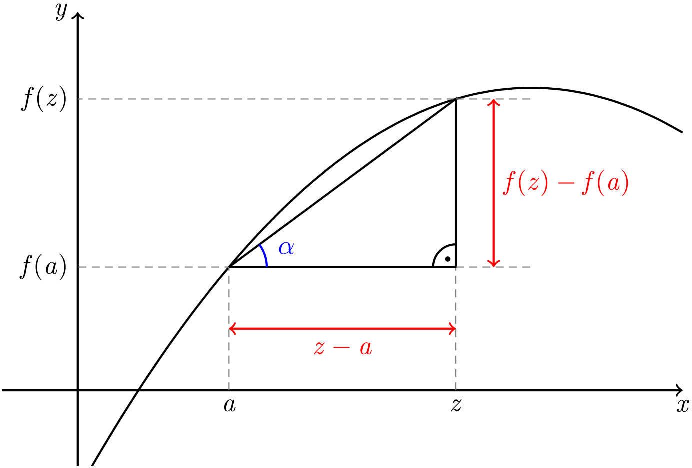
Tečna ke grafu funkce



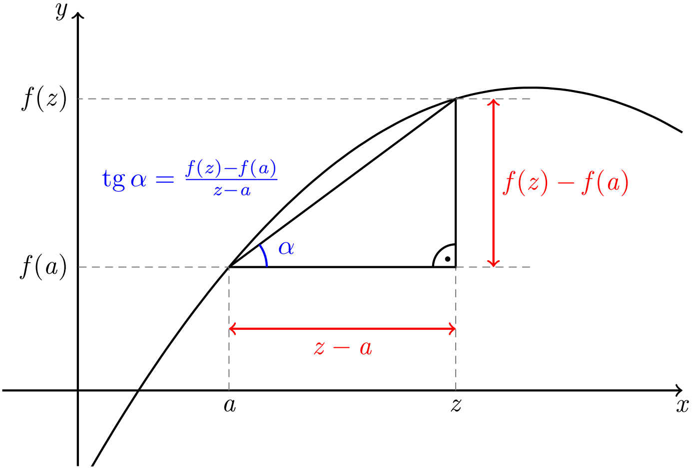
Tečna ke grafu funkce



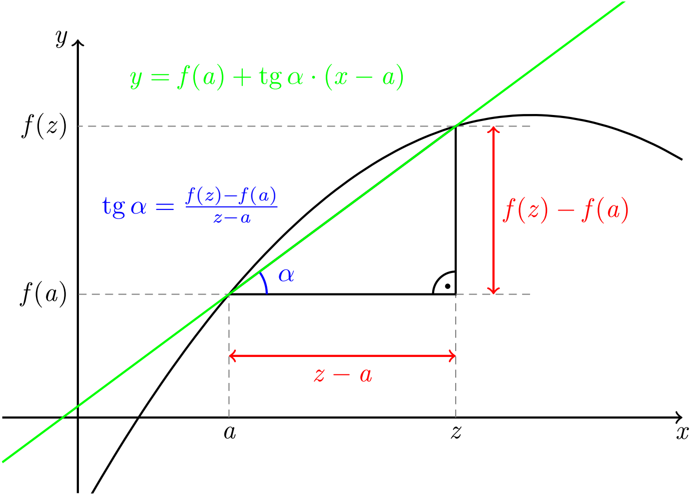
Tečna ke grafu funkce



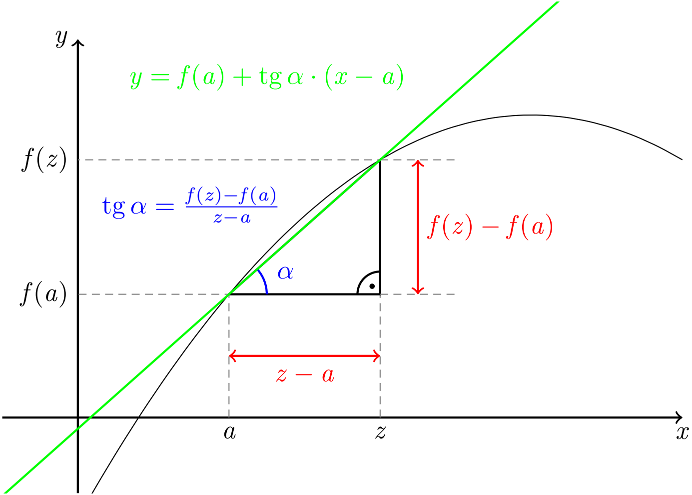
Tečna ke grafu funkce



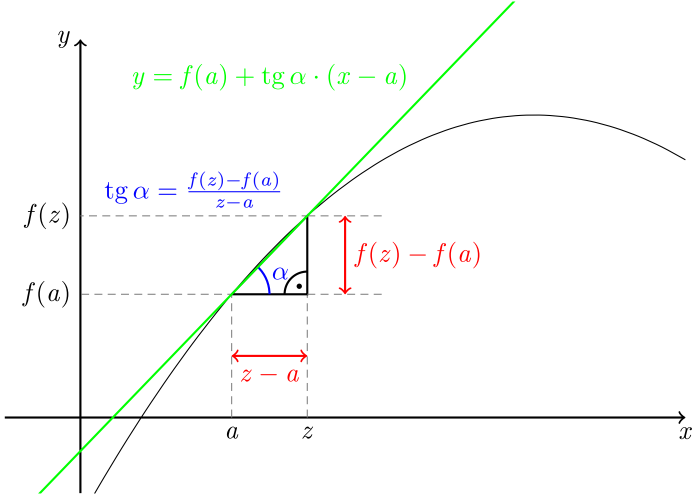
Tečna ke grafu funkce



Tečna ke grafu funkce



Tečna ke grafu funkce



Hlavní body

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Další poznámky

V souladu s dřívější motivací proto definujeme:

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Definice:

Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $x \in D_f$ takových, že existuje konečná derivace $f'(x)$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

Poznámka:

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Poznámka:

Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Poznámka:

Limitu v definici derivace lze ekvivalentně přepsat do tvaru, který je někdy výhodnější pro výpočty,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivace některých funkcí

Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Derivace některých funkcí

Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

V minulé přednášce jsme odvodili limity

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = e^a,\ (a \in \mathbb{R}), \quad \lim_{x\to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a} = \frac{1}{a},\ (a > 0).$$

V minulé přednášce jsme odvodili limity

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a,\ (a \in \mathbb{R}), \quad \lim_{x\to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a},\ (a > 0).$$

Příklad.

Derivace funkce e^x je opět funkce e^x. Tedy $\left(e^x\right)' = e^x$.

V minulé přednášce jsme odvodili limity

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = e^a,\ (a \in \mathbb{R}), \quad \lim_{x\to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a} = \frac{1}{a},\ (a > 0).$$

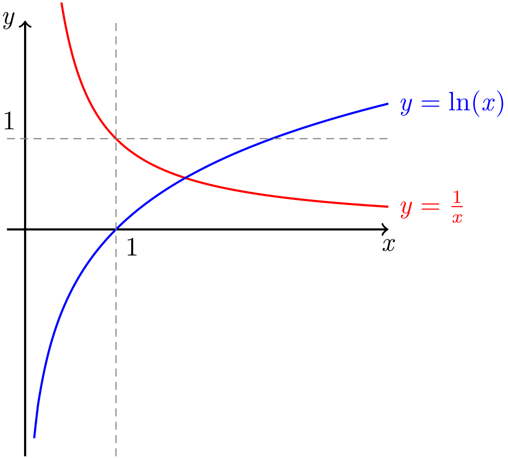
Příklad.

Derivace funkce e^x je opět funkce e^x. Tedy $\big(e^x\big)' = e^x$.

Příklad.

Derivace funkce $\ln x$ je funkce $\frac{1}{x}$, kde $x > 0$. Tedy pro $x > 0$ máme rovnost $\big(\ln x\big)' = \frac{1}{x}$.

Grafy funkcí $f(x) = \ln(x)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.



Dále jsme v minulé přednášce odvodili limitu

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Dále jsme v minulé přednášce odvodili limitu

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Příklad.

Pro kladné přirozené n je derivací funkce x^n funkce nx^{n-1}.

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Příklad.

Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$.

Pomocí součtového vzorce pro $\sin$ dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a} = \\ &= \cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a} = \\ &= \cos(a)\cdot 1+\sin(a)\cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Podobným způsobem můžeme odvodit

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = -\sin(a),$$

pro každé $a\in\mathbb{R}$.

Poznámka:

Ve výpočtu výše jsme použili znalost limity

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 - 1}{h}\cdot\frac{1}{\cos h + 1} =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{h}{\cos h + 1} = -1\cdot\frac{0}{1+1} = 0.$$

Hlavní body

1 Rychlost a hledání tečny

2 Derivace funkce

3 Vlastnosti derivace

4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

5 Další poznámky

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Věta:

Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

Věta:

Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Důkaz.

Elementární úpravou a použitím věty o limitě součinu

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Poznamenejme, že „diferencovatelnost“ znamená $f'(a) \in \mathbb{R}$ a výraz na konci výpočtu proto má smysl. □

Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

  Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

  Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

- Dokonce, existují funkce **spojité** na celém $\mathbb{R}$ **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla.

Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a.

  Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

- Dokonce, existují funkce **spojité** na celém $\mathbb{R}$ **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

  kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla. Protože $0 \leq \{x\} < 1$ konverguje řada absolutně pro každé x. Definičním oborem funkce f je proto celá reálná osa $D_f = \mathbb{R}$. Ukázat spojitost a diferencovatelnost je však už složitější.

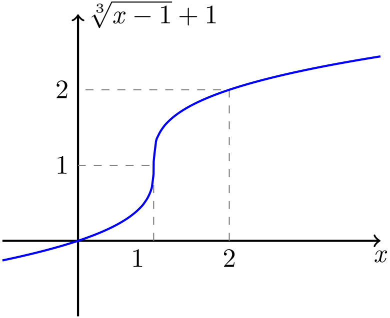
Tečna ke grafu funkce

Definice:

Nechť existuje $f'(a)$. Je-li

1. funkce f spojitá v bodě a a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$, nazýváme přímku s rovnicí $x = a$
2. $f'(a) \in \mathbb{R}$, nazýváme přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

tečnou funkce f v bodě a.



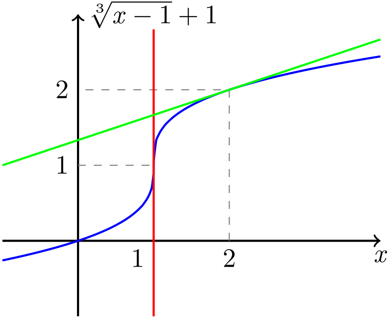
Tečna ke grafu funkce

Definice:

Nechť existuje $f'(a)$. Je-li

1. funkce f spojitá v bodě a a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$, nazýváme přímku s rovnicí $x = a$
2. $f'(a) \in \mathbb{R}$, nazýváme přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

tečnou funkce f v bodě a.



Nástroje pro výpočet derivací

Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Nástroje pro výpočet derivací

Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Poznámka:

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo**. Platí tedy například

$$\begin{aligned}(\sin(x)\cos(x))' &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(2x),\\ (x\sin(x))' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

Příklad.

Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\mathrm{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{ k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Příklad.

Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu dostáváme vztahy

$$\operatorname{tg}'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)},$$

platné na příslušných definičních oborech.

Věta (Derivace složené funkce):

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Věta (Derivace složené funkce):

Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Příklad.

Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \big(\sin\big(\cos(x)\big)\big)' = \cos\big(\cos(x)\big) \cdot \big(-\sin(x)\big).$$

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$.

Příklad.

Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$.
- Potom podle věty o derivaci složené funkce máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

- Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$.

Příklad.

Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

- Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$.
- Potom
$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Věta (O inverzní funkci):

Buď f monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Věta (O inverzní funkci):

Buď f monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

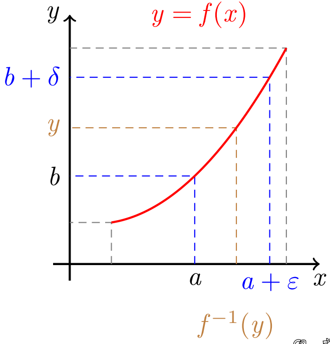
f^{-1} existuje a je monotónní. J je skutečně interval, vizte předchozí přednášku.

Věta (O inverzní funkci):

Buď f monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

f^{-1} existuje a je monotónní. J je skutečně interval, vizte předchozí přednášku.

- BÚNO f je rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.



Věta (O inverzní funkci):

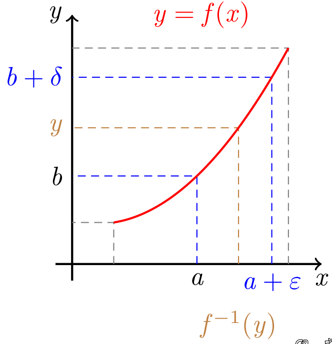
Buď f monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

f^{-1} existuje a je monotónní. J je skutečně interval, vizte předchozí přednášku.

- BÚNO f je rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.
- Buď $\varepsilon > 0$. Potom pro $\delta := f(a+\varepsilon) - b$ a $y \in (b, b+\delta)$ platí

$$b < y < b + \delta = f(a+\varepsilon)$$
$$a = f^{-1}(b) < f^{-1}(y) < a + \varepsilon.$$

Tedy $f^{-1}(y) \in H_a(\varepsilon)$, $a = f^{-1}(b)$. Podobně pro spojitost zleva.



Příklad.

Protože už víme, že funkce $\sin$, $\cos$, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\arcsin = \left(\sin\Big|_{\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1},$$

$$\arccos = \left(\cos\Big|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1},$$

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}\Big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1},$$

$$\operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}\Big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Věta (Derivace inverzní funkce):

Buďte f spojitá a monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Věta (Derivace inverzní funkce):

Buďte f spojitá a monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

Označme $d = f(c)$. Všimněme si, že pro $x \in I$, $x \neq c$ platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}(d)}{f(x) - d}\right)^{-1} = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \quad \text{pro } x \in f(I),\ x \neq d.$$

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \to d} g(x) = \left(f^{-1}\right)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$.

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \to d} g(x) = \left(f^{-1}\right)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$.

Podle věty o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(d)}.$$

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Příklad.

Již víme, že derivace $\ln$ je funkce $\frac{1}{x}$. $\ln$ je ale inverzní funkce k funkci e^x. Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato je spojitá, monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$.

Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle naší věty tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{\big(f^{-1}\big)'(f(x))} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali.

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1,1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Příklad.

Pro derivaci funkce $\arcsin$ platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci $\sin$ zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1,1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro $x \in (-1,1)$ je ale

$$\cos\left(\arcsin(x)\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin(x)\right)} = \sqrt{1-x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \mathrm{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \mathrm{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$.

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$. Navíc je

$$\cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big) = \frac{\cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big)}{\sin^2\big(\operatorname{arctg} x\big) + \cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\big(\operatorname{arctg} x\big)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Příklad.

Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a monotónnní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\left(\operatorname{arctg}(x)\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{arctg}(x)\right)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Navíc je

$$\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{\cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)}{\sin^2\left(\operatorname{arctg} x\right) + \cos^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hlavní body

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Další poznámky

Rekapitulace

Tabulka zatím známých derivací:

$f(x)$	$f'(x)$	
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Pokračování...

$f(x)$	$f'(x)$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x)$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \stackrel{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2}$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\operatorname{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy.

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \overset{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} \overset{3}{=} 0$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)'$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(e^{x\ln x}\right)' \stackrel{2}{=} e^{x\ln x} \cdot (x \ln x)'$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \overset{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,
4. algebraické úpravy.

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \overset{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{4}{=} x^x (1 + \ln x).$$

Hlavní body

1. Rychlost a hledání tečny
2. Derivace funkce
3. Vlastnosti derivace
4. Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
5. Další poznámky

Poznámka:

Lze definovat derivaci funkce f v bodě a zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Příklad.

Uvažme funkci $f(x) = |x|$. Pro $x \neq 0 = a$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale $f'(0)$ neexistuje.

Derivace vyšších řádů

Poznámka:

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Derivace vyšších řádů

Poznámka:

Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Příklad.

Například pro $f(x) = x^3 - 2x + 4$ máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \ n \geq 4.$$