Základy matematické analýzy

Extrémy funkce

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz [2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

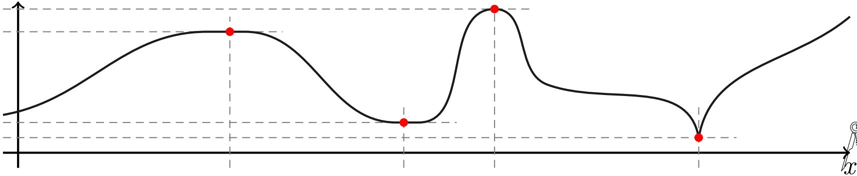
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,



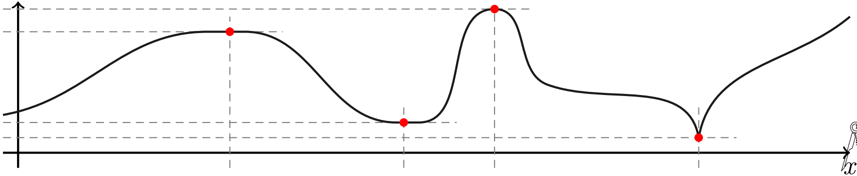
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,



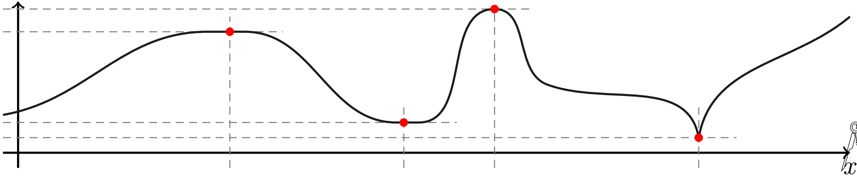
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,



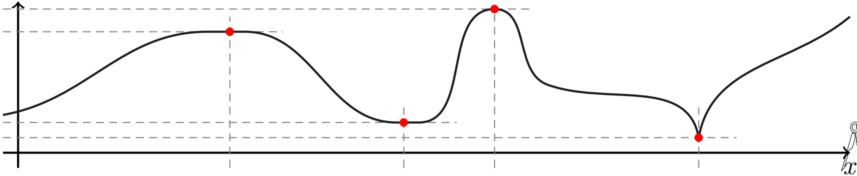
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.



Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Kdyby např. $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Kdyby např. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

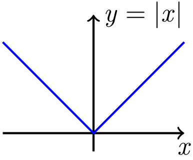
Tudíž

- $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a,\ a + \varepsilon)$,
- $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \varepsilon, a)$.

Funkce f tedy v a nemá lokální extrém. Podobně lze postupovat v případě $f'(a) < 0$. $\square$

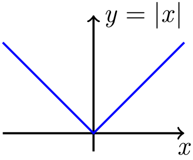
Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



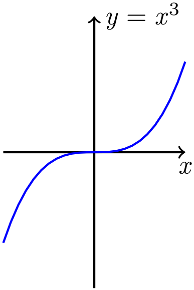
Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

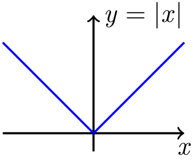
Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



Příklad (Bod nulové derivace bez extrému).

Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$.



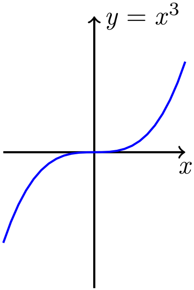


Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.

Příklad (Bod nulové derivace bez extrému).

Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$.



Poznámka:

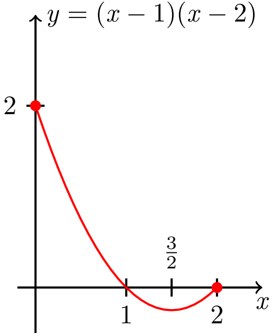
Předchozí věta udává pouze podmínku **nutnou** pro existenci lokálního extrému. Umožňuje nám tvrdit, kde lokální extrém nenastává.

Věta (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu):

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém může být pouze v krajních bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

Věta (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu):

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém může být pouze v krajních bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.



Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = (x-1)(x-2)$$

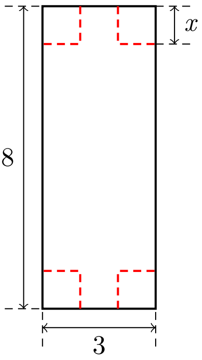
na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Derivace je nulová v bodě $\frac{3}{2}$, porovnáním funkčních hodnot

$$f(0) = 2, \quad f\left(3/2\right) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globání maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě $\frac{3}{2}$ s hodnotou $-\frac{1}{4}$.

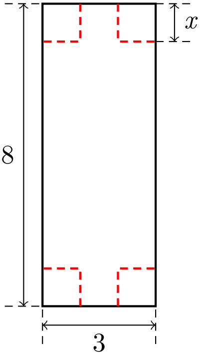
Příklad.

Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Příklad.

Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Označme stranu vystřihnutých čtverců symbolem x. Pro objem krabičky $O(x)$ platí

$$O(x) = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

kde $x \in \langle 0, {}^3\!/_2 \rangle$.
Derivace $O(x)$ je nula pouze v bodech 3 a ${}^2\!/_3$, ovšem pouze ${}^2\!/_3 \in \langle 0, {}^3\!/_2 \rangle$. V tomto bodě nastává i maximum $O({}^2\!/_3) = {}^{200}\!/_{27}\,\mathrm{cm}^3$, protože $O(0) = O({}^3\!/_2) = 0$.

Příklad.

Uzavřenost intervalu v předchozí větě je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum.

Příklad.

Uzavřenost intervalu v předchozí větě je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

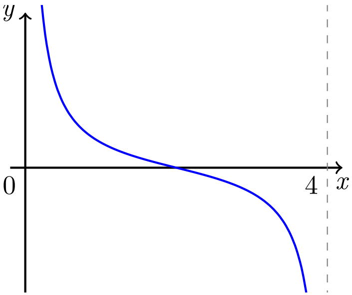
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum.

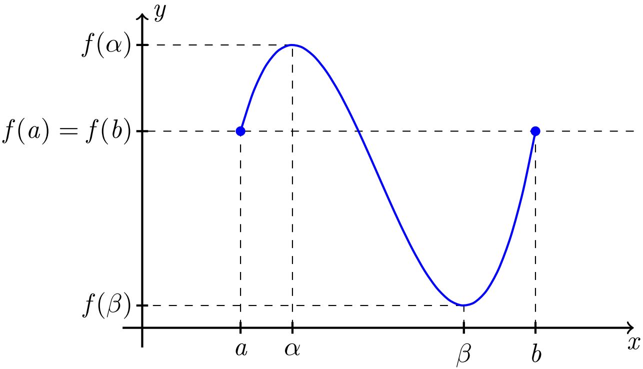
Skutečně, platí totiž

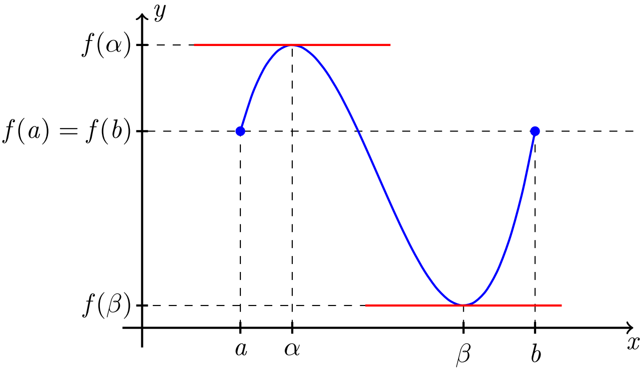
$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 4_-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$



Hlavní body


y
$f(\alpha)$
$f(a) = f(b)$
$f(\beta)$
a
α
β
b
x



Pozorování: Pro „pěknou“ funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou x.

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz.

Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz.

Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

V případě, že f není konstantní, je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

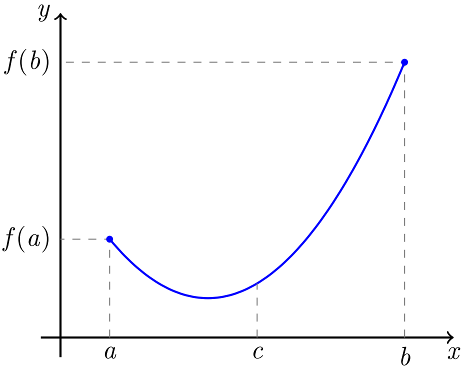
Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz.

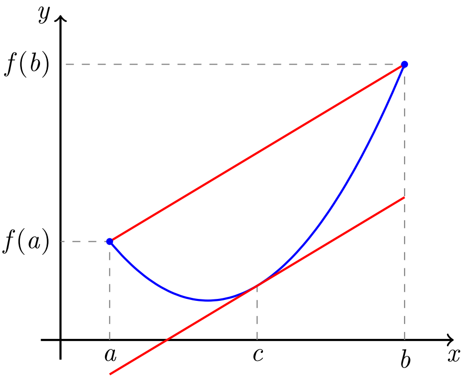
Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

V případě, že f není konstantní, je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Protože $f(a) = f(b)$ leží alespoň jeden z bodů α, β uvnitř (a, b). Označme tento bod c. Funkce f má v bodě c lokální extrém, a proto $f'(c) = 0$. Skutečně, funkce f má totiž derivaci v každém bodě intervalu (a, b). $\square$



y
$f(b)$
$f(a)$
a
c
b
x



Přírustek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(b) - f(a)$. Lze ho odhadnout?

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$.

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$. Proto podle Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

Hlavní body

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na itervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na itervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je neklesající na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na itervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je neklesající na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je nerostoucí na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na itervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je neklesající na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je nerostoucí na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na itervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je neklesající na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je nerostoucí na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na itervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je neklesající na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je nerostoucí na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
5. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) = 0\big) \Rightarrow f$ je konstantní na J,

Důkaz 1. tvrzení, ostatní naprosto analogicky.

Buďte $x_1, x_2 \in J$ taková, že $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty o přírustku funkce aplikované na interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Protože $c \in J^\circ$, je $f'(c) \geq 0$. Tudíž

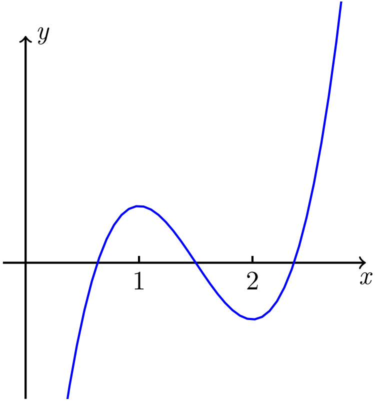
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2). \qquad \square$$

Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.

Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.

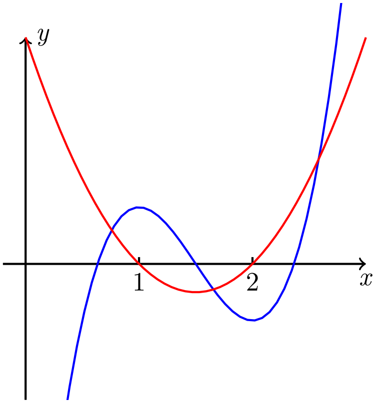


Uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.



Uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

pro jejíž derivaci platí

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

Konvexnost a konkávnost funkce

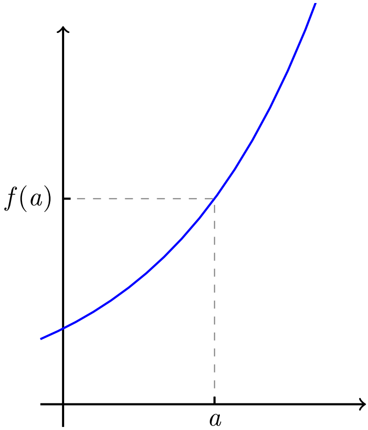
Definice:

Nechť funkce f má konečnou derivaci v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ leží všechny body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a,

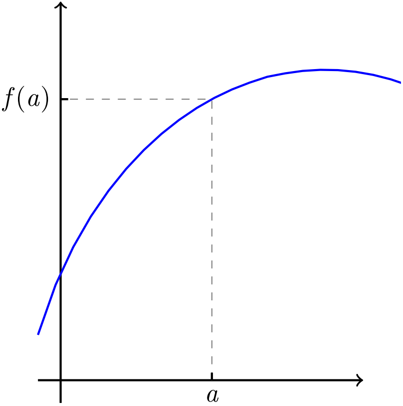
$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.

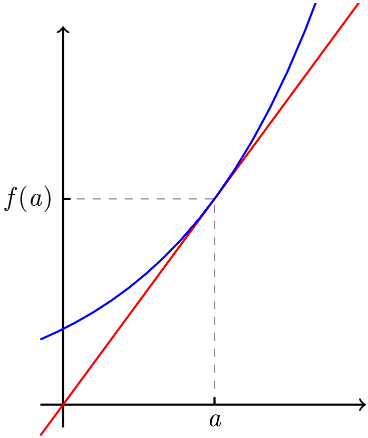
Konvexnost



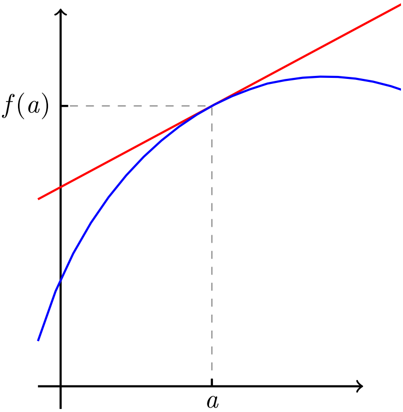
Konkávnost



Konvexnost



Konkávnost



Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a diferencovatelná na intervalu J°.

Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a diferencovatelná na intervalu J°.

- Pokud je f'' kladná na J°, pak je funkce f konvexní v každém bodě J°.

Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a diferencovatelná na intervalu J°.

- Pokud je f'' kladná na J°, pak je funkce f konvexní v každém bodě J°.
- Pokud je f'' záporná na J°, pak je funkce f konkávní v každém bodě J°.

Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a diferencovatelná na intervalu J°.

- Pokud je f'' kladná na J°, pak je funkce f konvexní v každém bodě J°.
- Pokud je f'' záporná na J°, pak je funkce f konkávní v každém bodě J°.

Důkaz (Konvexní varianta): Podle předchozí věty víme, že f' je rostoucí na J. Buď $a \in J^\circ$ libovolný. Pokud

Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a diferencovatelná na intervalu J°.

- Pokud je f'' kladná na J°, pak je funkce f konvexní v každém bodě J°.
- Pokud je f'' záporná na J°, pak je funkce f konkávní v každém bodě J°.

Důkaz (Konvexní varianta): Podle předchozí věty víme, že f' je rostoucí na J. Buď $a \in J^\circ$ libovolný. Pokud

- $x \in J$, $x > a$, potom podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a diferencovatelná na intervalu J°.

- Pokud je f'' kladná na J°, pak je funkce f konvexní v každém bodě J°.
- Pokud je f'' záporná na J°, pak je funkce f konkávní v každém bodě J°.

Důkaz (Konvexní varianta): Podle předchozí věty víme, že f' je rostoucí na J. Buď $a \in J^\circ$ libovolný. Pokud

- $x \in J$, $x > a$, potom podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

- $x \in J$, $x < a$, potom existuje $c \in (x, a)$ takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) > f(a) + f'(a)(x - a),$$

protože nyní $x - a < 0$ a $f'(c) < f'(a)$.

Inflexní body, asymptoty

Definice:

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(c - \delta, c)$ a konkávní na intervalu $(c, c + \delta)$, nebo naopak.

Inflexní body, asymptoty

Definice:

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(c - \delta, c)$ a konkávní na intervalu $(c, c + \delta)$, nebo naopak.

Definice:

- Řekneme, že funkce f má v bodě a **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

Inflexní body, asymptoty

Definice:

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(c-\delta, c)$ a konkávní na intervalu $(c, c+\delta)$, nebo naopak.

Definice:

- Řekneme, že funkce f má v bodě a **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.
- Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0 \text{ resp. } \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0.$$

Poznámka:

Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně

1. $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - (kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} - k$ a proto
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
2. Podobně
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx,$$
kde k jsem spočetli v předchozím bodu.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim_{x \to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1.$

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x\to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x \to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,

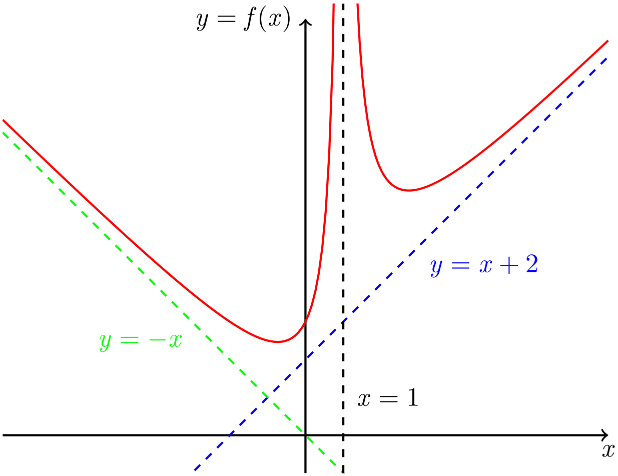
$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$

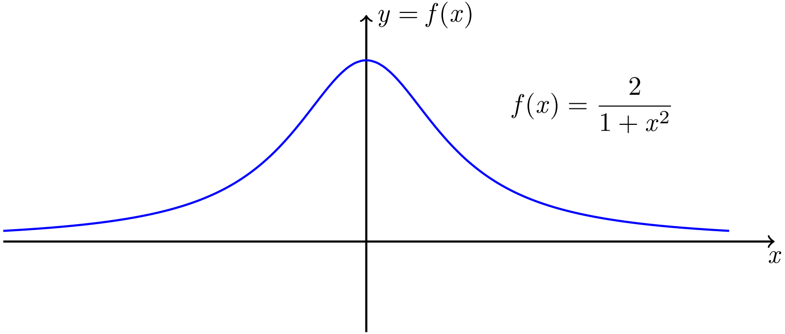
- Podobně, pro asymptotu v $-\infty$ máme

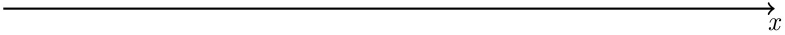
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{-x^2-x} + \frac{1}{x} = -1,$$

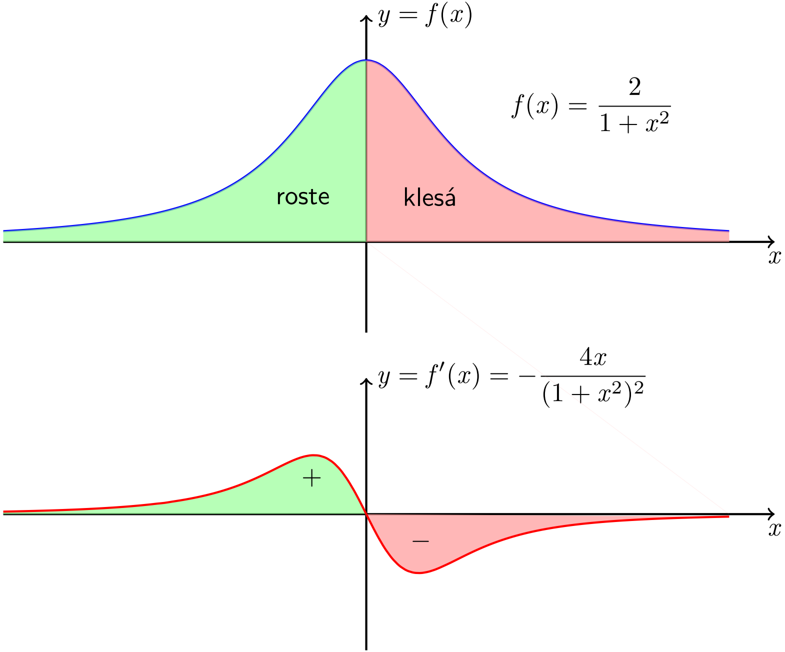
$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{-x+1} + 1 - (-1) \cdot x = 0.$$

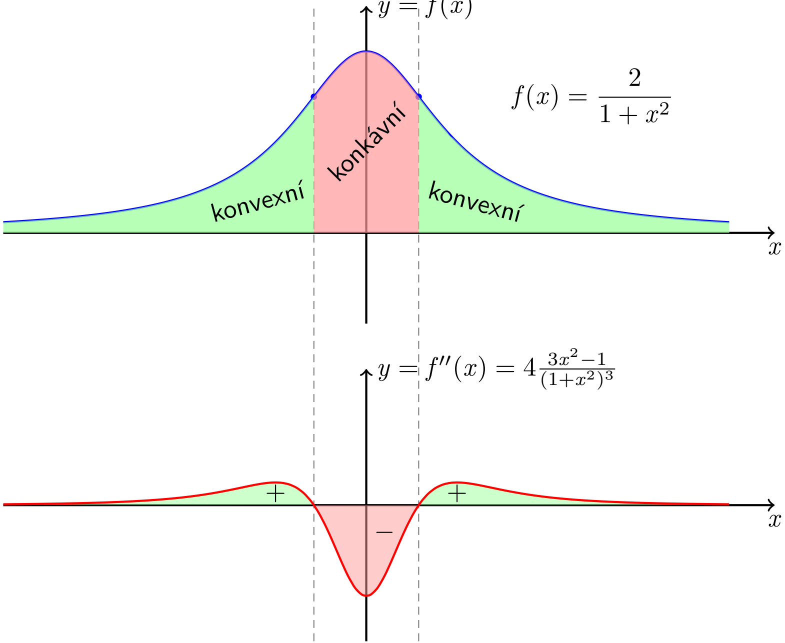


$y = f(x)$
$y = x + 2$
$y = -x$
$x = 1$
x


$y = f(x)$
$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
x


x


$y = f(x)$
$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
roste
klesá
x
$y = f'(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$
$+$
$-$
x


$y = f(x)$
$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
konvexní
konkávní
konvexní
x
$y = f''(x) = 4\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$
$+$
$-$
$+$
x

Průběh funkce

Poznámka:

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

Průběh funkce

Poznámka:

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),

Průběh funkce

Poznámka:

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,

Průběh funkce

Poznámka:

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,

Průběh funkce

Poznámka:

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,

Průběh funkce

Poznámka:

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce f.

Hlavní body

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim_a f = \lim_a g = 0$ nebo $\lim_a |g| = +\infty$

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = 0$ nebo $\lim\limits_{a} |g| = +\infty$
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \smallsetminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = 0$ nebo $\lim\limits_{a} |g| = +\infty$
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \setminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje $\lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g}$ a platí $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$.

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln(x)$.

Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Nyní je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Příklad (Důležitost předpokladů).

Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} \overset{1}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2+\cos(x)}{1+\cos(x)} \overset{2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = 1.$$

Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.
2. Limita nalevo od $\overset{2}{=}$ vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočíst bez l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = 2.$$

Příklad (Bludný kruh).

V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití nevede k cíli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali.

Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1.$$

Hlavní body

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

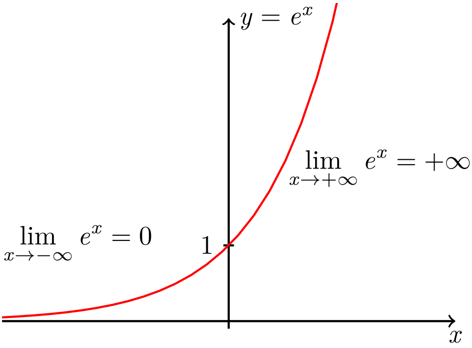
Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$.

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$.

Protože $f'(x) = f''(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x)$ rostoucí a konvexní na celém $\mathbb{R}$. Asymptota funkce existuje pouze v $-\infty$ a její přímkou je $y = 0$.



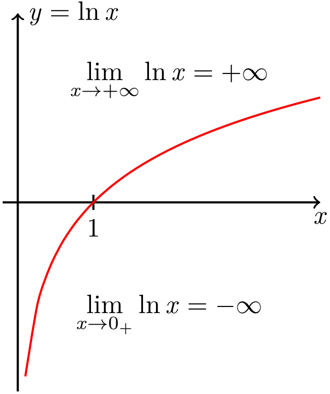
Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$.

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$.

Nyní $D_f = (0, +\infty)$ a $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ a $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Tudíž f je rostoucí a konkávní, jedinou asymptotou je přímka $x = 0$.



Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

1. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

1. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

   Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

2. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkoumejme existenci asymptot v $\pm\infty$,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1, \\ q &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1. \end{aligned}$$

   Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$.

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 $\left(f(0) = 0\right)$ a maximum v bodě 2 $\left(f(2) = \sqrt[3]{4}\right)$.

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 $(f(0) = 0)$ a maximum v bodě 2 $(f(2) = \sqrt[3]{4})$.

Navíc ze spojitosti na $\mathbb{R}$ a z limit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ plyne $H_f = \mathbb{R}$.

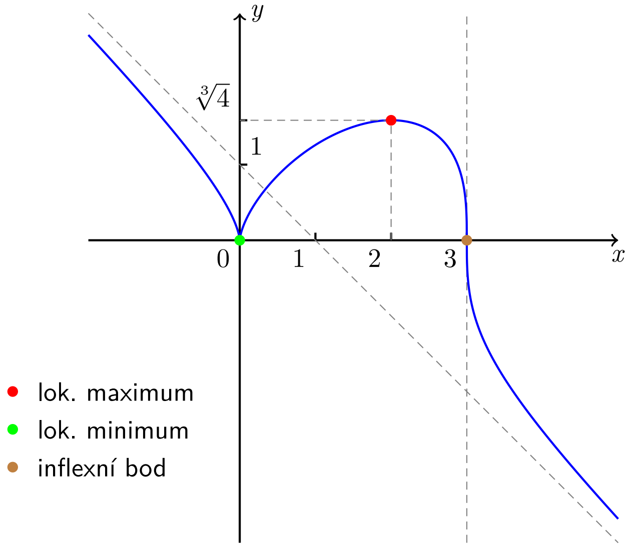
4. Pro druhou derivaci v bodech $x \neq 0, 3$ dostáváme

$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{(x-3)^{5/3}}.$$

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f''	$-$	$-$	$+$
	konkávní	konkávní	konvexní

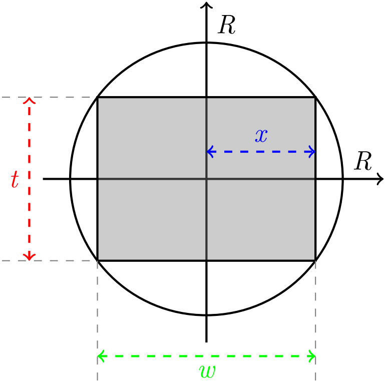
5. Nyní můžeme načrtnout graf funkce f.



Příklad.

Tuhost T trámu s obdélníkovým průřezem je úměrná součinu jeho šířky (horizontální rozměr) w a třetí mocnině tloušťky (vertikální rozměr) t. Při jakých rozměrech lze dosáhnout největší tuhosti trámu, máme-li k dispozici strom o kruhovém průřezu s poloměrem R?

Parametrizujme trám pomocí parametru x podle obrázku:



Tedy $w = 2x$ a $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Uvažujeme $2x = w \in \langle 0,\, 2R \rangle$, resp. $x \in \langle 0, R \rangle$.

Tedy $w = 2x$ a $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Uvažujeme $2x = w \in \langle 0,\, 2R \rangle$, resp. $x \in \langle 0, R \rangle$. Tudíž pro tuhost trámu platí

$$T(x) = c \cdot w \cdot t^3 = 2^4 \cdot c \cdot x \big(R^2 - x^2\big)^{3/2}.$$

Tedy $w = 2x$ a $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Uvažujeme $2x = w \in \langle 0,\, 2R \rangle$, resp. $x \in \langle 0, R \rangle$. Tudíž pro tuhost trámu platí

$$T(x) = c \cdot w \cdot t^3 = 2^4 \cdot c \cdot x \big(R^2 - x^2\big)^{3/2}\,.$$

Hledáme extrém této funkce, derivací je

$$T'(x) = 2^4 \cdot c \cdot \left(\big(R^2 - x^2\big)^{3/2} - 3x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) = 2^4 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \Big(R^2 - 4x^2\Big).$$

Tedy $w = 2x$ a $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Uvažujeme $2x = w \in \langle 0,\, 2R \rangle$, resp. $x \in \langle 0, R \rangle$. Tudíž pro tuhost trámu platí

$$T(x) = c \cdot w \cdot t^3 = 2^4 \cdot c \cdot x\big(R^2 - x^2\big)^{3/2}\,.$$

Hledáme extrém této funkce, derivací je

$$T'(x) = 2^4 \cdot c \cdot \left(\big(R^2 - x^2\big)^{3/2} - 3x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) = 2^4 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \Big(R^2 - 4x^2\Big).$$

Nulovým bode derivace je bod $x_* = \frac{R}{2}$. Funkci T vyšetřujeme pouze na intervalu $(0, R)$. Vidíme, že na intervalu $\left(0,\, \frac{R}{2}\right)$ funkce T roste na intervalu $\left(\frac{R}{2}\,, R\right)$ klesá. V bodě x_* tudíž nastává lokální maximum. Pro extremální rozměry trámu platí

$$w_* = 2x_* = R \quad \text{a} \quad t_* = 2\sqrt{R^2 - x_*^2} = \sqrt{3}R.$$

Příklad (Elementární metoda nejmenších čtverců).

Nechť je zadáno n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Nalezněte $x \in \mathbb{R}$ tak, aby součet kvadrátů odchylek x od každého a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, byl minimální.

Příklad (Elementární metoda nejmenších čtverců).

Nechť je zadáno n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Nalezněte $x \in \mathbb{R}$ tak, aby součet kvadrátů odchylek x od každého a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, byl minimální.

Označme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$

Pro derivaci platí (derivujeme součet)

$$f'(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 \right)' = \sum_{i=1}^{n} \left((x - a_i)^2 \right)' = \sum_{i=1}^{n} 2(x - a_i).$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ je $x_* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$. Protože $f''(x) = 2n > 0$ nastává bodě x_* minimum funkce f.