Základy matematické analýzy

Aplikace

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.[1], Ing. Daniel Vašata[2]

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz
[2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014

Hlavní body

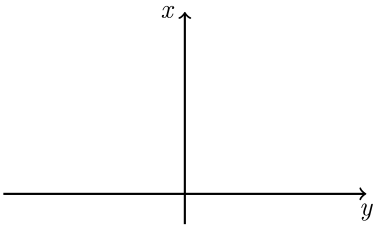
Poznámka:

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Nejjednodušším způsobem, a to tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslní $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

1. zvolme $n + 1$ vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n} \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, přímkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



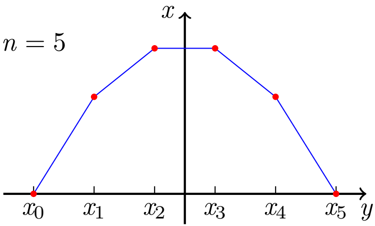
Poznámka:

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Nejjednodušším způsobem, a to tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslní $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

1. zvolme $n + 1$ vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n} \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, přímkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



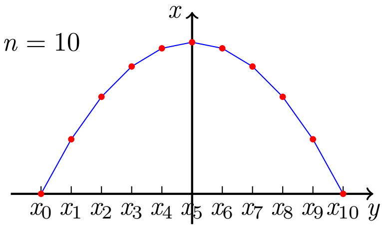
Poznámka:

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Nejjednodušším způsobem, a to tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslní $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

1. zvolme $n + 1$ vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n} \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, přímkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



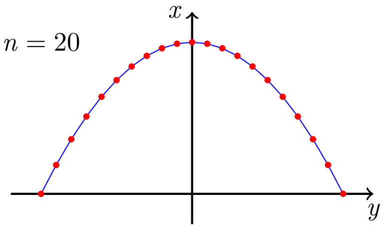
Poznámka:

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Nejjednodušším způsobem, a to tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslní $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$

1. zvolme $n + 1$ vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n} \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, přímkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



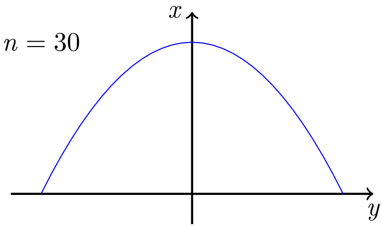
Poznámka:

Jak v těchto prezentacích vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Nejjednodušším způsobem, a to tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslní $f(x) := 1 - x^2$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$

1. zvolme $n+1$ vzorkovacích bodů $x_i = -1 + \frac{2}{n} \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
2. vypočtěme vzorky $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$,
3. spojme sousední body $(x_i,\ f(x_i))$ a $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, přímkou.

Pro dobrý výsledek je nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou.



- Spojit dva body v rovině přímkou je jednoduché. Přímka je totiž jednoznačně zadána dvěma body.

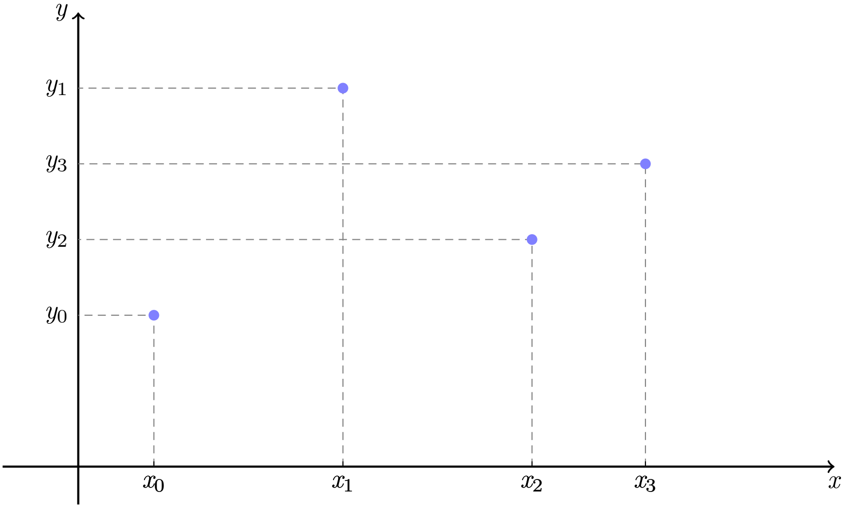
- Spojit dva body v rovině přímkou je jednoduché. Přímka je totiž jednoznačně zadána dvěma body.

- Místo přímky (lineární funkce $y = ax + b$) se často využívá polynomů třetího stupně, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Polynom 3. stupně je, na rozdíl od lineární funce, jednoznačně zadán čtyřmi parametry. Jak je volit?

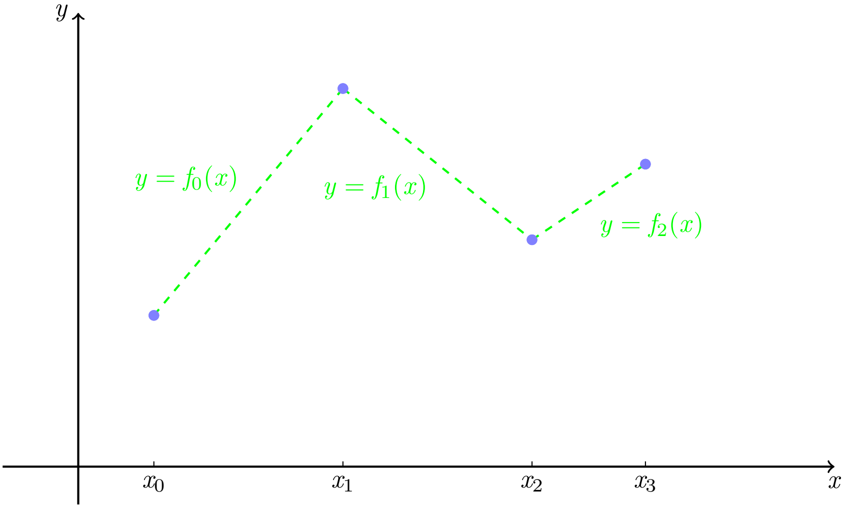
- Spojit dva body v rovině přímkou je jednoduché. Přímka je totiž jednoznačně zadána dvěma body.

- Místo přímky (lineární funkce $y = ax + b$) se často využívá polynomů třetího stupně, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Polynom 3. stupně je, na rozdíl od lineární funce, jednoznačně zadán čtyřmi parametry. Jak je volit?

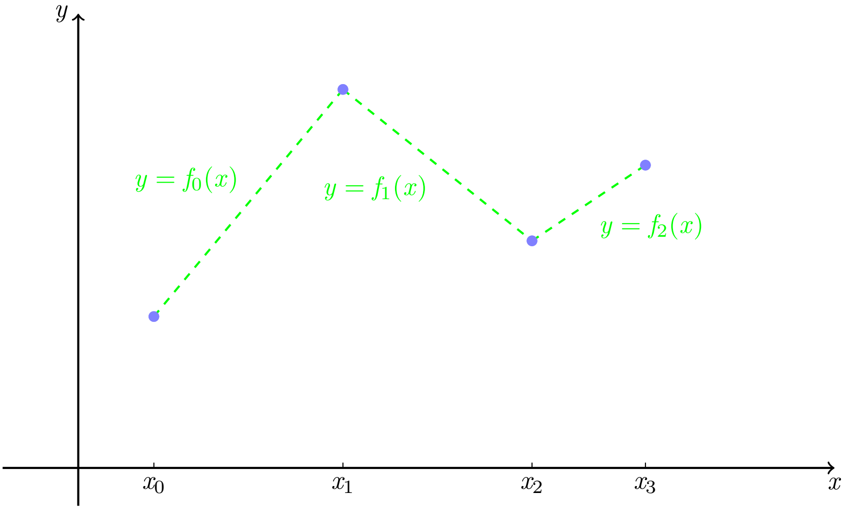
- Jako demonstrativní příklad si ukážeme způsob ja interpolovat křivku mezi čtyřmi předem zadanými body (které jsme mohli získat např. vzorkováním předem dané funkce).



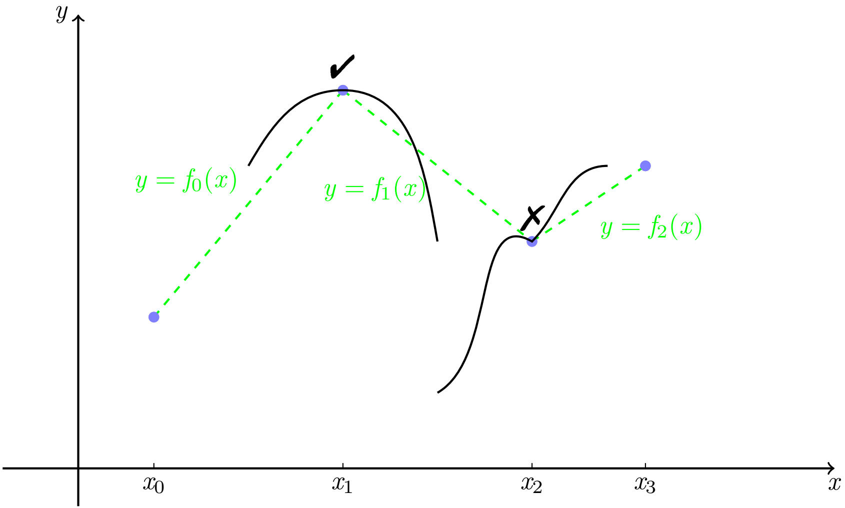
Nechť jsou zadány body (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).



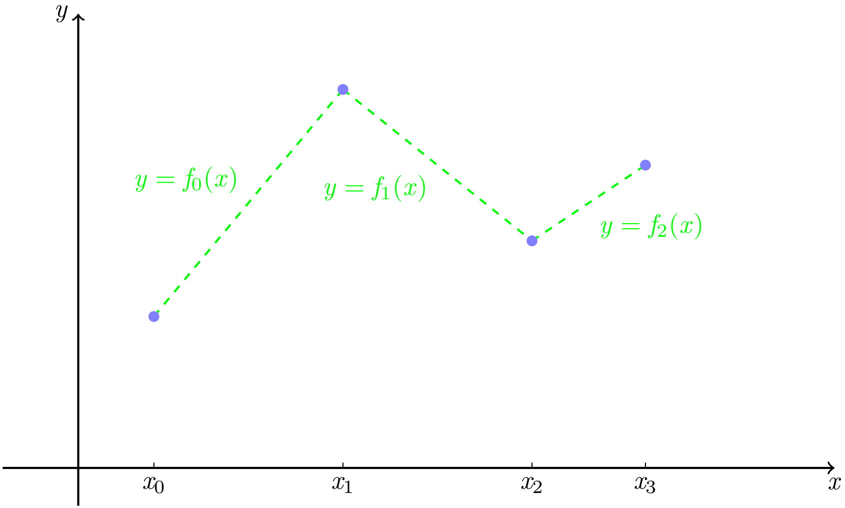
Body spojíme třemi kubickými polynomy $y = f_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0$ a podobně pro $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. Tj. je třeba určit 12 neznámých.



Chceme, aby křivka byla „co nejhladší“. Zřejmým požadavkem tedy je $f_0(x_0) = y_0$, $f_0(x_1) = f_1(x_1) = y_1$, $f_1(x_2) = f_2(x_2) = y_2$ a $f_2(x_3) = y_3$.

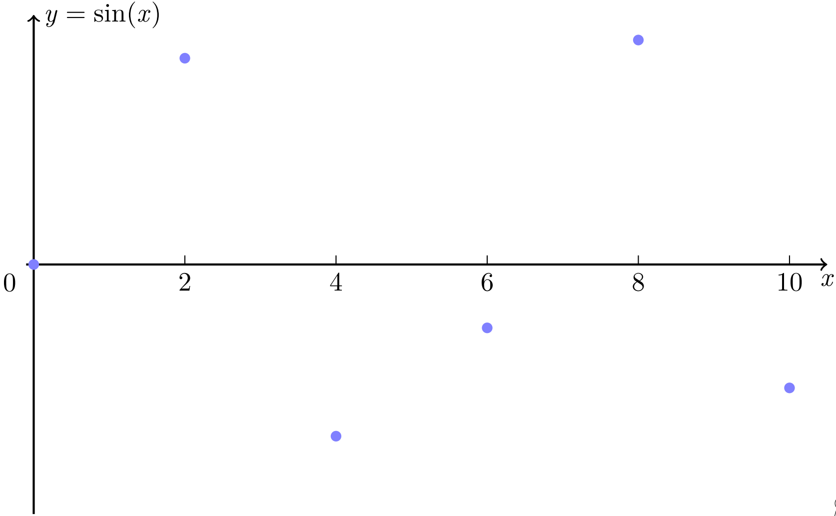


Dále požadujeme, aby na sebe křivky navazovaly se stejným sklonem, tj. $f_0'(x_1) = f_1'(x_1)$ a $f_1'(x_2) = f_2'(x_2)$, a konvexitou/konkavitou $f_0''(x_1) = f_1''(x_1)$ a $f_1''(x_2) = f_2''(x_2)$.

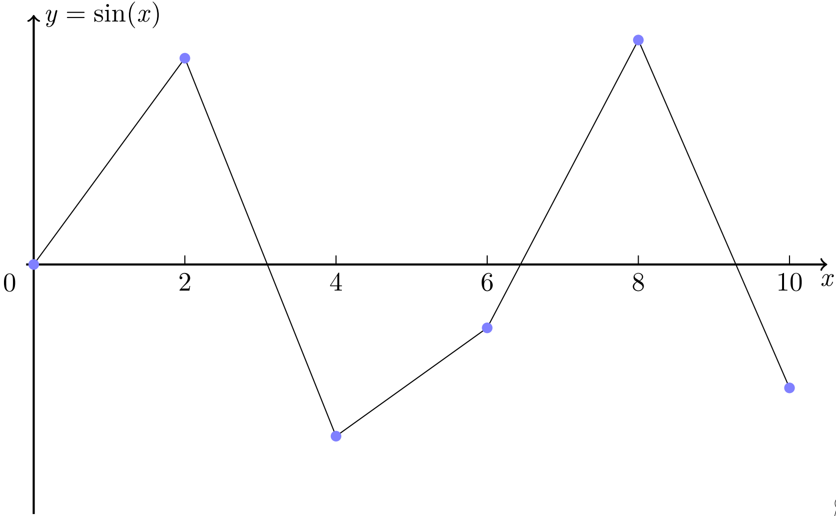


Dále můžeme po uživateli požadovat předepsání sklonů na krajích, tedy hodnoty $f_0'(x_0)$ a $f_2'(x_3)$.

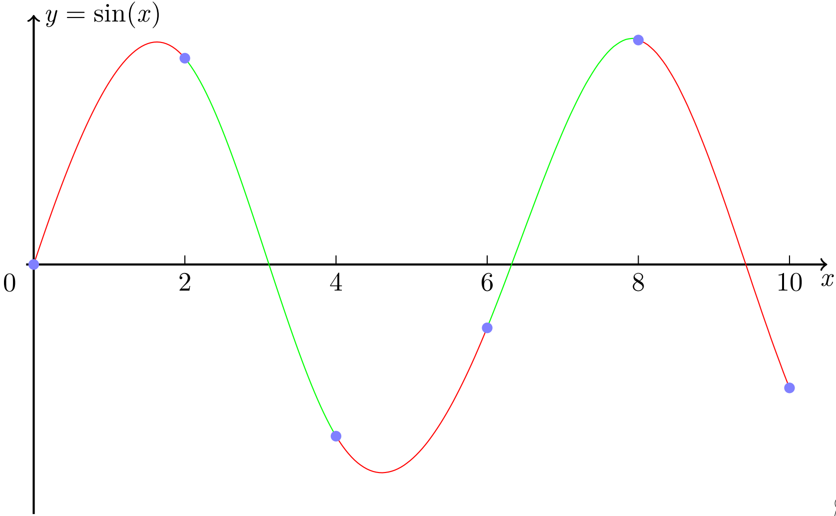
Ilustrační příklad



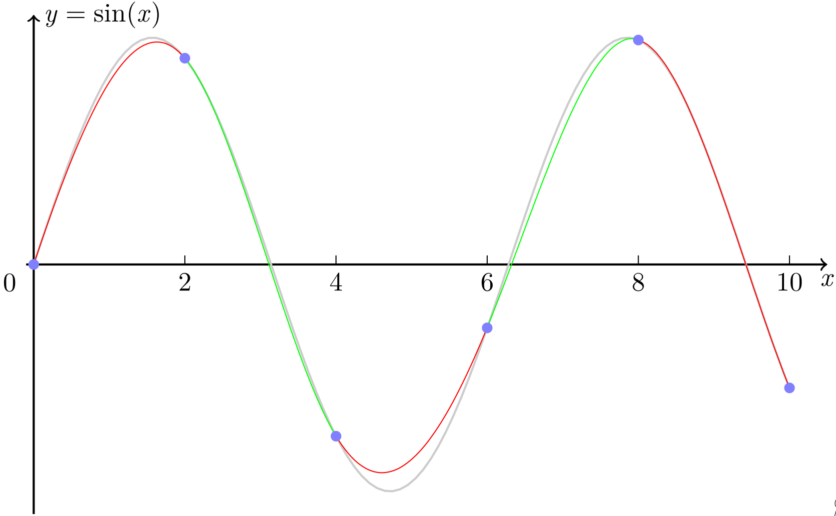
Ilustrační příklad



Ilustrační příklad



Ilustrační příklad



Hlavní body

Úloha

Pro funkci f spojitou na intervalu J řešte rovnici

$$f(x) = 0.$$

Úloha

Pro funkci f spojitou na intervalu J řešte rovnici

$$f(x) = 0.$$

Metoda

- V úvahu připadá metoda půlení intervalu. Tj. musíme nalézt podintervaly $\langle a, b \rangle \subset J$ tak, že $f(a) \cdot f(b) < 0$. Algoritmus půlení intervalu vždy dá aspoň jeden kořen, v intervalu $\langle a, b \rangle$ jich však může být více.
- Je vhodné kořeny **separovat**, čili nalézt pro něj interval $\langle a, b \rangle$ tak, že v něm už další kořen neleží.

Příklad.

Určete počet reálných kořenů polynomu $f(x) = x^5 - 5x + 2$ a separujte je.

Příklad.

Určete počet reálných kořenů polynomu $f(x) = x^5 - 5x + 2$ a separujte je.

Řešíme tedy rovnici

$$f(x) = x^5 - 5x + 2 = 0.$$

Definičním oborem funkce f je celé $\mathbb{R}$, funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech jsou

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^5 \left(1 - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^5 \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right) = -\infty \cdot 1 = -\infty. \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \text{(analogicky)} = +\infty.\end{aligned}$$

První derivací funkce f je

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

První derivací funkce f je

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Shrnujeme, že

- pro $x \in (-\infty, -1)$ je $f'(x) > 0$, tudíž na tomto intervalu f **roste**,
- pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je $f'(x) < 0$, tudíž na tomto intervalu f **klesá**,
- pro $x \in (1, +\infty)$ je $f'(x) > 0$, tudíž f na tomto intervalu **roste**

První derivací funkce f je

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Shrnujeme, že

- pro $x \in (-\infty, -1)$ je $f'(x) > 0$, tudíž na tomto intervalu f **roste**,
- pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je $f'(x) < 0$, tudíž na tomto intervalu f **klesá**,
- pro $x \in (1, +\infty)$ je $f'(x) > 0$, tudíž f na tomto intervalu **roste**

Proto

- v bodě -1 je lokální maximum s hodnotou $f(-1) = 6$,
- v bodě 1 je lokální minimum s hodnotou $f(1) = -2$.

První derivací funkce f je

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Shrnujeme, že

- pro $x \in (-\infty, -1)$ je $f'(x) > 0$, tudíž na tomto intervalu f **roste**,
- pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ je $f'(x) < 0$, tudíž na tomto intervalu f **klesá**,
- pro $x \in (1, +\infty)$ je $f'(x) > 0$, tudíž f na tomto intervalu **roste**

Proto

- v bodě -1 je lokální maximum s hodnotou $f(-1) = 6$,
- v bodě 1 je lokální minimum s hodnotou $f(1) = -2$.

Jelikož $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ uzavíráme, že v každém z intervalů

$$(-\infty, -1\rangle, \quad \langle -1, 1\rangle, \quad \langle 1, +\infty)$$

leží **právě jeden kořen**. Rovnice má právě 3 kořeny. Protože navíc $f(-2) < 0$ a $f(2) > 0$, lze pro metodu půlení intervalu použít intervaly

$$\langle -2, -1\rangle, \quad \langle -1, 1\rangle, \quad \langle 1, 2\rangle.$$

Hlavní body

Příklad.

Vypočtěte třetí odmocninu z kladného reálného čísla c.

Příklad.

Vypočtěte třetí odmocninu z kladného reálného čísla c.

- Jak zadání vyřešit máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, násobit a dělit čísla?

Příklad.

Vypočtěte třetí odmocninu z kladného reálného čísla c.

- Jak zadání vyřešit máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, násobit a dělit čísla?
- Tato otázká může vyvstat v praxi: máme-li zjistit jak velký má být poloměr kulového tankeru o daném objemu V, dostáváme $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V}$. Pro krychli dostaneme délku hrany rovnou $a = \sqrt[3]{V}$.

Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.

Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.

- Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x **řešením rovnice**

$$f(x) = 0.$$

Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.

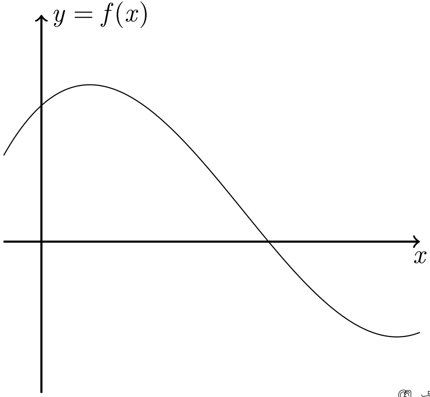
- Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x **řešením rovnice**

$$f(x) = 0.$$

- Tuto bychom se mohli pokusit řešit nám již známou metodou půlení intervalu (jaké dva počáteční body byste zvolili?). Nyní si však ukážeme další způsob, tzv. **Newtonovu metodu**.

Newtonova metoda

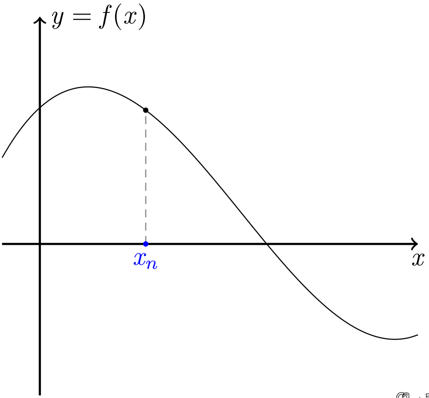
Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti (x_n) aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:



Newtonova metoda

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti (x_n) aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.

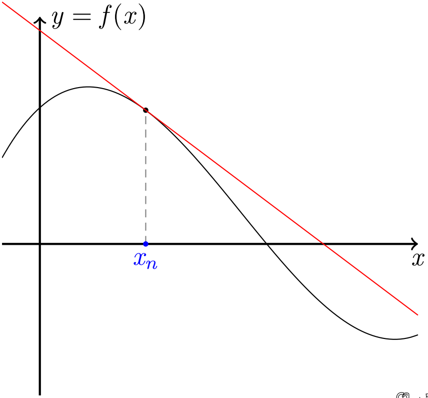


Newtonova metoda

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti (x_n) aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$



Newtonova metoda

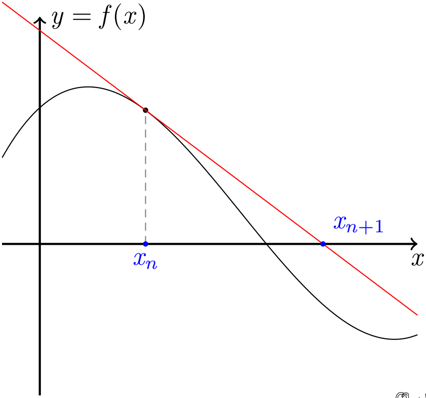
Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti (x_n) aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

3. Průsečík tečny s osou x nechť je další člen posloupnosti,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Newtonova metoda

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti (x_n) aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

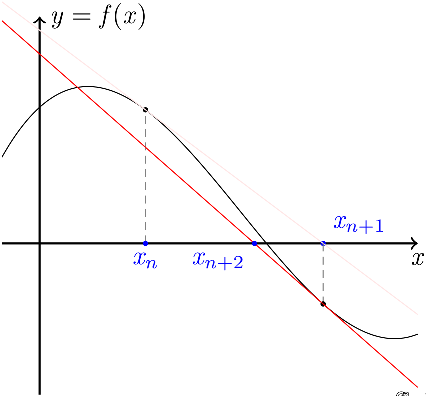
1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

3. Průsečík tečny s osou x nechť je další člen posloupnosti,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. Opakuj s x_{n+1} místo x_n.



Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Avšak:

Poznámka (Otázky):

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost (x_n)?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Avšak:

Poznámka (Otázky):

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost (x_n)?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Odpovědí na tyto otázky se v obecném případě nebudeme zabývat. Vraťme se k našemu konkrétnímu případu s třetí odmocninou, kde uvidíme jak na některé z nich odpovědět.

Shrnutí

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

Shrnutí

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f\big((0,+\infty)\big) = (-c,+\infty)$ a tudíž **existuje právě jedno** kladné řešení rovnice $f(x) = 0$.

Shrnutí

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f\big((0, +\infty)\big) = (-c, +\infty)$ a tudíž **existuje právě jedno** kladné řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Konverguje-li posloupnost (x_n) ke konečné kladné limitě a, potom

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}\right) = \frac{2}{3}a + \frac{c}{3a^2}.$$

Tudíž a je hledané řešení,

$$a^3 = c, \quad \text{nebo} \quad f(a) = 0.$$

Věta (Vlastnosti (x_n)):

Buď $c > 0$ a (x_n) posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Věta (Vlastnosti (x_n)):

Buď $c > 0$ a (x_n) posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

Věta (Vlastnosti (x_n)):

Buď $c > 0$ a (x_n) posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Vlastnosti (x_n)):

Buď $c > 0$ a (x_n) posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost (x_n) je klesající:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$

a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.

Věta (Vlastnosti (x_n)):

Buď $c > 0$ a (x_n) posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost (x_n) je klesající:
$$x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$
a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.
- Pokud $0 < x_1 < \sqrt[3]{c}$, pak $x_2 > \sqrt[3]{c}$ a můžeme použít předchozí bod. □

Důsledek (Odhad chyby):

Buď (x_n) posloupnost popsaná v předešlé větě. Potom platí

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad \text{pro } n = 2, 3 \ldots .$$

Důsledek (Odhad chyby):

Buď (x_n) posloupnost popsaná v předešlé větě. Potom platí

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad \text{pro } n = 2, 3 \ldots.$$

Důkaz.

Z předešlé věty víme, že pro $n = 2, 3, \ldots$ jistě platí $\sqrt[3]{c} < x_{n+1} < x_n$. Potom pro tato n platí i

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 3x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 2x_n + \underbrace{\frac{c}{x_n^2} - \sqrt[3]{c}}_{<0} < 2(x_n - x_{n+1}).$$

$\square$

Důsledek (Odhad chyby):

Buď (x_n) posloupnost popsaná v předešlé větě. Potom platí

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad \text{pro } n = 2, 3 \ldots .$$

Důkaz.

Z předešlé věty víme, že pro $n = 2, 3, \ldots$ jistě platí $\sqrt[3]{c} < x_{n+1} < x_n$. Potom pro tato n platí i

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 3x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 2x_n + \underbrace{\frac{c}{x_n^2} - \sqrt[3]{c}}_{<0} < 2(x_n - x_{n+1}).$$

□

Poznámka:

Toto je pro praktické účely **velmi** důležitý výsledek. Pomocí dvou naposledy vypočtených členů posloupnosti můžeme odhadnout chybu mezi posledním členem a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ (tu neznáme!) a tím **dodržet požadovanou přesnost**.

Shrnutí

1. Posloupnost (x_n) zadaná rekurentně vztahem

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje pro libovolně zvolené kladné x_1 k číslu $\sqrt[3]{c}$.

Shrnutí

1. Posloupnost (x_n) zadaná rekurentně vztahem

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje pro libovolně zvolené kladné x_1 k číslu $\sqrt[3]{c}$.

2. Chybu mezi x_n a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ lze odhadnout pomocí posledních dvou napočtených členů:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Tato informace nám umožňuje výpočet zastavit po dosažení požadované přesnosti.

Ilustrace iterace ($\sqrt[3]{7}$, 36 cifer)

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7.0
x_2	4.71428571428571428571428571428571429
x_3	3.24784642966461148279330097511915694
x_4	2.38643130490037593935668895758001112
x_5	2.00066641679591817635777458039226767
x_6	1.91672239561208699369932626267864600
x_7	1.91293867672049370288664833049651171
x_8	1.91293118280174664702280424145842154
x_9	1.91293118277238910119956738659641893
x_{10}	1.91293118277238910119911683954876030
$\sqrt[3]{7}$	1.91293118277238910119911683954876028

Ilustrace iterace ($\sqrt[3]{7}$, 36 cifer)

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7.0
x_2	4.71428571428571428571428571428571429
x_3	3.24784642966461148279330097511915694
x_4	2.38643130490037593935668895758001112
x_5	2.00066641679591817635777458039226767
x_6	1.91672239561208699369932626267864600
x_7	1.91293867672049370288664833049651171
x_8	1.91293118280174664702280424145842154
x_9	1.91293118277238910119956738659641893
x_{10}	1.91293118277238910119911683954876030
$\sqrt[3]{7}$	1.91293118277238910119911683954876028

Poznámka:

Na předchozím výpočtu lze pozorovat, že od 6. iterace se počet správných cifer přibližně zdvojnásobuje. Tento efekt nazýváme **kvadratickou konvergencí** a přesně ho pro naši posloupnost formulujeme níže. Důkaz nyní již vynecháme.

Věta:

Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq \left(x_n - \sqrt[3]{c}\right)^2.$$

Je-li tedy chyba n-tého členu například 10^{-5}, pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10}!

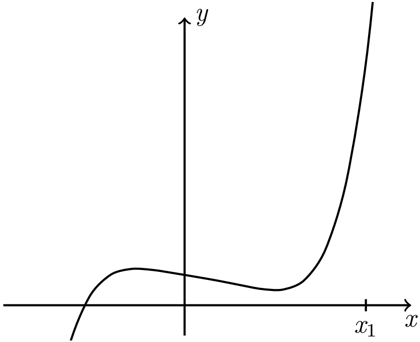
Hlavní body

Příklad.

Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

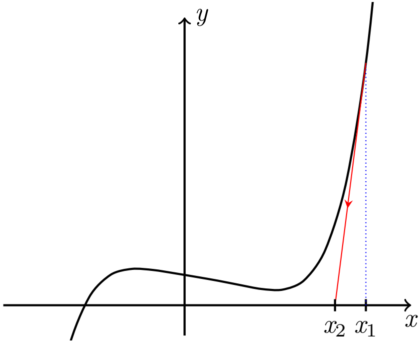


Příklad.

Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

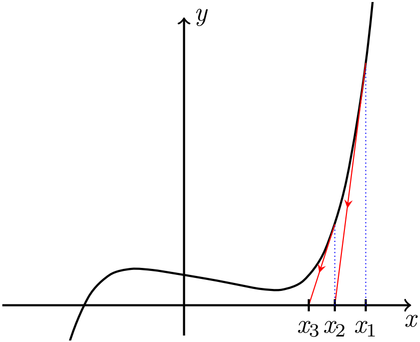


Příklad.

Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

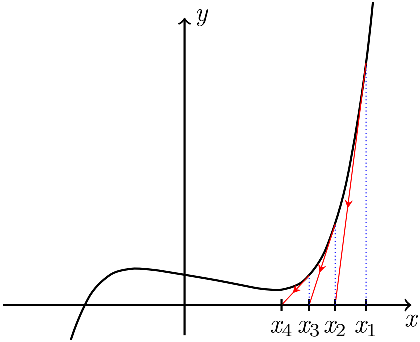


Příklad.

Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

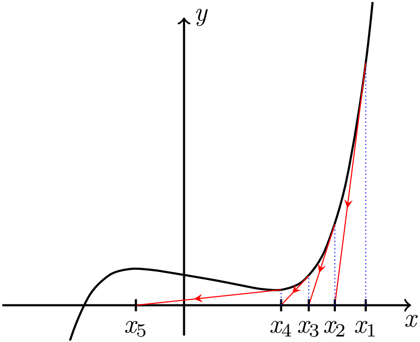


Příklad.

Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$



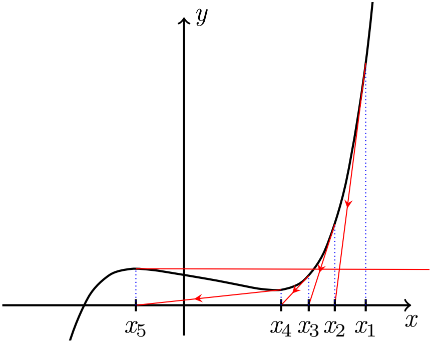
Příklad.

Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

n	x_n
1	2.
2	1.6595744680851063
3	1.3729685700681316
4	1.0686067391904803
5	−0.5293373794223353
6	169.52057927559713
7	135.65665311569666



Hlavní body

Rozpad

Příklad.

Pokud okamžitá změna veličiny y přímo úměrně závisí na aktuální hodnotě veličiny y, pak její vývoj je popsán rovnicí

$$y'(t) = \gamma y(t), \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

kde γ je konstanta úměrnosti a y_0 počáteční hodnota.

Lemma:

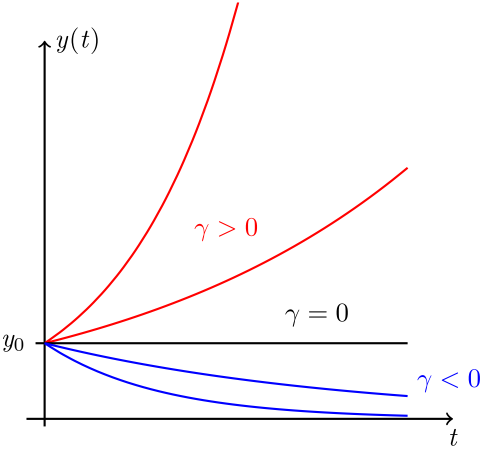
Jediným řešením úlohy z předchozího příkladu je $y(t) = y_0 e^{\gamma t}$.

Povšimněmě si, že

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \gamma \quad \Rightarrow \quad \big(\ln y(t)\big)' = \gamma \quad \Rightarrow \quad \ln y(t) = \gamma t + k.$$

Tudíž $y(t) = e^{\gamma t + k} = K \cdot e^{\gamma t}$, kde konstantu K je třeba dopočítat z počáteční podmínky.

V závislosti na hodnotě reálného parametru γ mohou nastat tři kvalitativně rozdílné případy:



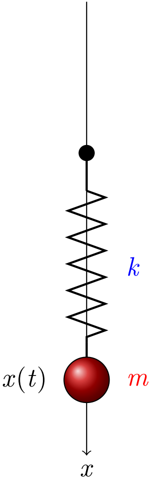
Oscilace

Příklad.

Vzdálenost od rovnovážné polohy tělesa o hmotnosti $m > 0$, které je připevněno k pružině o tuhosti $k > 0$, v čase je popsána funkcí $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jež splňuje

$$m x''(t) = -k x(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0. \tag{2}$$

(tzv. Newtonův pohybový zákon).



Lemma:

Řešení úlohy (2), tedy

$$mx''(t) = -kx(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$

je právě jedno,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Zkoumanou rovnici lze přepsat do tvaru

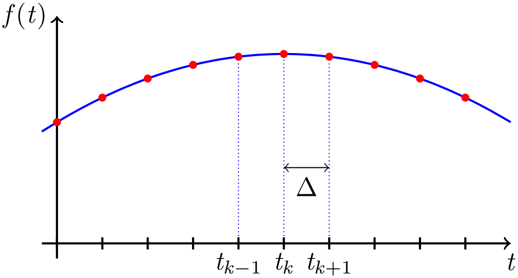
$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Dosazením a využitím znalosti derivací funkcí $\sin$ a $\cos$ snadno ověříme, že udané $x(t)$ skutečně tuto rovnici řeší. Lze ověřit, že toto řešení je pro dané x_0 a v_0 jediné možné.

Numerické řešení (aneb NDSolve)

Poznámka (Diskretizace):

Pro $\Delta > 0$ položme $t_k := \Delta \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Podobně označme funkční hodnoty $f_k = f(t_k)$.



Přibližné vyjádření derivace funkce f v bodě t_k:

$$f'(t_k) \approx \frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta}.$$

Úloha

Řešte $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0$.

Zvolme parametr $\Delta > 0$. Ukážeme si dvě metody:

1. (**Eulerova**) Přibližným vyjádřením derivace a použitím $f(y_k)$ místo $f(y(t))$ na pravé straně dostaneme

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} = f(y_k), \quad \text{tedy} \quad y_{k+1} = y_k + \Delta \cdot f(y_k).$$

   Neboť je $y_0 = y(0)$ dáno, můžeme nyní rekurentně vypočítat všechna následující y_k. Pro malá Δ lze očekávat, že aspoň první členy budou blízko skutečného řešení.

2. (**Centrální Eulerova**) Od Eulerovy metody se liší pouze úpravou pravé strany rovnice:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} = f\left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right).$$

   Pozor! Tato rovnice „implicitně zadává“ y_{k+1} pomocí y_k. V obecném případě nemusí jít explicitně vyřešit.

Poznámka:

- Numerických metod je velmi mnoho. Každá může na daném problému dávat různě přesné výsledky.
- Sofistikovanější metody např. i mění velikost Δ v každém „kroku“.

Příklad.

Porovnejte numerické řešení (pomocí Eulerovy metody) úlohy

$$y'(t) = 2 \cdot y(t), \quad y(0) = 1,$$

se skutečným řešením $y(t) = e^{2t}$.

Příklad.

Porovnejte numerické řešení (pomocí Eulerovy metody) úlohy

$$y'(t) = 2 \cdot y(t), \quad y(0) = 1,$$

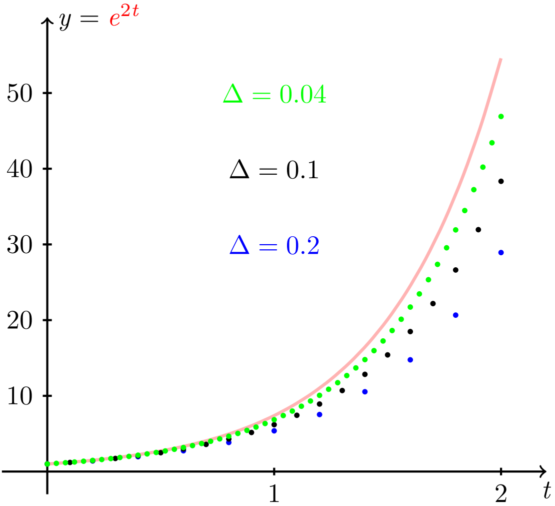
se skutečným řešením $y(t) = e^{2t}$.

Odvození rekurentního vztahu je v tomto případě snadné,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} = 2 \cdot y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 = 1,$$

čili

$$y_{k+1} = y_k + 2\Delta y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 = 1.$$


$y = e^{2t}$
50
40
30
20
10
1
2
t
$\Delta = 0.04$
$\Delta = 0.1$
$\Delta = 0.2$

Příklad.

Porovnejte numerické řešení úlohy

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

se skutečným řešením $y(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

Příklad.

Porovnejte numerické řešení úlohy

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

se skutečným řešením $y(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

Nejprve musíme úlohu upravit do tvaru kdy lze aplikovat naše dvě metody. Zaveďme $x(t)$ tak, že $x(t) = y'(t)$. Potom úloha zní

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t), & y(0) &= 1, \\ x'(t) &= -y(t), & x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Pro $\Delta > 0$ je nyní potřeba konstruovat souběžně **dvě** posloupnosti (x_n) a (y_n).

Pro porovnání:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= -y(t), & x(0) &= 1,\\
y'(t) &= x(t), & y(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

Euler

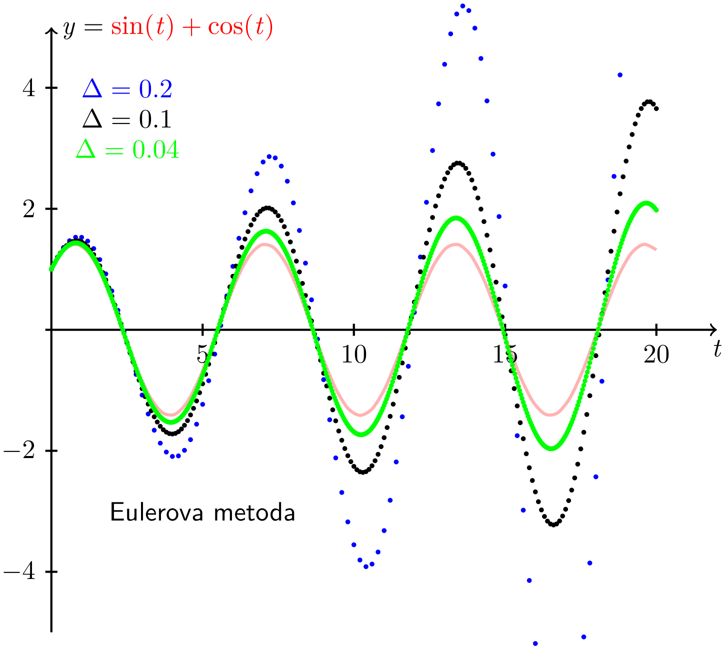
Rekurentní vztah:

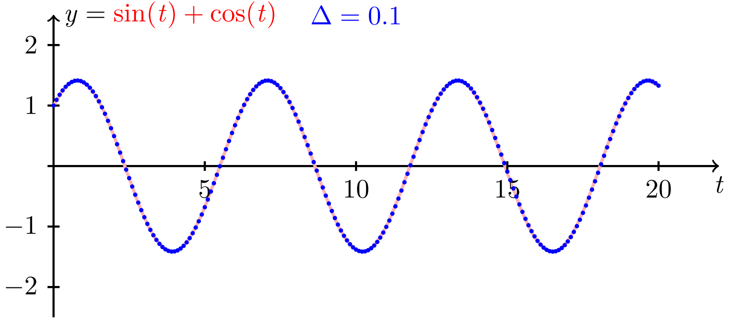
$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \Delta \cdot y_k, & x_0 &= 1,\\
y_{k+1} &= y_k + \Delta \cdot x_k, & y_0 &= 1.
\end{aligned}
$$

Centrální Euler

Nyní lze rekurenci explicitně vyjádřit, po úpravách dostáváme

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \frac{1}{1+\frac{\Delta^2}{4}}\left(\left(1-\frac{\Delta^2}{4}\right)x_k - \Delta y_k\right), & x_0 &= 1\\
y_{k+1} &= \frac{1}{1+\frac{\Delta^2}{4}}\left(\Delta x_k + \left(1-\frac{\Delta^2}{4}\right)y_k\right), & y_0 &= 1.
\end{aligned}
$$


$y = \sin(t) + \cos(t)$
$\Delta = 0.2$
$\Delta = 0.1$
$\Delta = 0.04$
Eulerova metoda
4
2
−2
−4
5
10
15
20
t



Poznámka (Centrální Euler):

- Tento výpočet je proveden pomocí Centrální Eulerovy metody.
- Výsledek je **výrazně** lepší než v případě Eulerovy metody! Samotná Eulerova metoda se v praxi nepoužívá.