Opravný test BI-ZMA v. 2, FIT ČVUT, Z 2012/2013	Datum: 20. 12. 2012
Jméno a Příjmení: Mahatma Gandhi	Body: 20

Příklad 1. Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+10}{3n^4+5n}\right)^5.$$

Příklad 2. Je možné dodefinovat funkci

$$f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$$

aby byla spojitá na celém $\mathbb{R}$? Pokud ano jakou hodnotou?

Příklad 3. Určete definiční obor a derivaci funkce

$$f(x)=\frac{1}{x}+2\ln x+\frac{\ln x}{x}.$$

Příklad 4. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 3^{2-k}.$$

Příklad 5. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\frac{x+2}{x^2+2x+3}.$$

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+10}{3n^4+5n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}}\cdot\frac{1+10/n^4}{3+5/n^3}\right)^5=\left(\frac{1+0}{3+0}\right)^5=\frac{1}{3^5}$$

***

2. $$\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0_-}\frac{\sin x}{|x|}=-\lim_{x\to 0_-}\frac{\sin x}{x}=-1$$

$1\neq -1 \Rightarrow$ v bodě 0 není spojitá ani ji nelze dodefinovat.

3. $x\neq 0 \wedge x>0 \Rightarrow D_f=(0,\infty)$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1-\ln x}{x^2}=$

$$=\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x^2}$$

4. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 3^{2-k}=3^2\sum_{k=1}^{\infty}(-1/3)^k=3^2\,\frac{-1/3}{1+1/3}=-\frac{9}{4}$$

5. $$\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2+2}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx+\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$$

$\Leftrightarrow D<0$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Opravný test BI-ZMA v. 4, FIT ČVUT, Z 2012/2013	Datum: 20. 12. 2012
Jméno a Příjmení: Kryštof Kolumbus	Body: 20

Příklad 1. Určete definiční obor a derivaci funkce

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}\ln x}.$$

Příklad 2. Rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)}{n+1}.$$

Vypočtěte její hodnotu, pokud existuje.

Příklad 3. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\ln\sin x}.$$

Příklad 4. Vyšetřete monotonii funkce

$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Tj. udejte intervaly, kde je funkce rostoucí a kde je klesající.

Příklad 5. Nalezněte Taylorův polynom 3. stupně T_3 v bodě 0 pro funkci

$$f(x) = \sin(\sin x).$$

***

1. $(x>0 \land x+1\geq 0 \iff x>0) \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x+1}\ln x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\ln x + \frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)}{n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $$\lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{\ln\sin x} \overset{L'H}{\underset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

4. $$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (D_f=\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ fce je monotónně rostoucí na celém $\mathbb{R}$

5. $f'(x) = \cos(\sin x)\cdot\cos x$ $\qquad f(0)=0 \quad f''(0)=0$

$f''(x) = -\sin(\sin x)\cdot\cos^2 x - \cos(\sin x)\sin x$ $\qquad f'(0)=1 \quad f'''(0)=-2$

$$f'''(x) = -\cos(\sin x)\cdot\cos^3 x + 4\sin(\sin x)\cos x\sin x - \cos(\sin x)\cos x$$

$$T_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3$$

Opravný test BI-ZMA v. 3, FIT ČVUT, Z 2012/2013	Datum: 20. 12. 2012
Jméno a Příjmení: Marie Tereza	Body: 20

Příklad 1. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\frac{x}{x^2+2}.$$

Příklad 2. Najděte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$$

v bodě $x = \pi$.

Příklad 3. Najděte globální extrémy funkce

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$$

na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

Příklad 4. Ukažte, že neexistuje limita

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2) - \ln(2n)}{\ln n}.$$

Příklad 5. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n!}.$$

***

1. $\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \Big/ \begin{matrix} t = x^2+2 \\ dt = 2x\,dx \end{matrix} \Big/ = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$

2. $f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos 2x - \sin x\,(-2\sin 2x)}{\cos^2 2x} = \frac{\cos x \cdot \cos 2x + 2\sin x \sin 2x}{\cos^2 2x}$

$f'(\pi) = \frac{-1\cdot 1 + 2\cdot 0 \cdot 0}{1^2} = -1$

3. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4\cdot x\,(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$

-2 -1 0 1 2

sgn f': - + - +

$f(0) = 5$

$f(1) = f(-1) = 4$

$f(2) = f(-2) = 13$

$\Rightarrow$ na $\langle -2, 2\rangle$ glob. max. v ± 2 a glob. min. v ± 1.

4. $(-1)^n \frac{\ln(n^2) - \ln(2n)}{\ln n} = (-1)^n \frac{2\ln n - \ln 2 - \ln n}{\ln n} = (-1)^n \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln n}\right)$

liché členy: $-\left(1 - \frac{\ln 2}{\ln(2n+1)}\right) \to -1,\ n \to \infty$

sudé členy: $+\left(1 - \frac{\ln 2}{\ln(2n)}\right) \to +1,\ n\to\infty$

$\Rightarrow$ původní limita neex.

5. d'Alembert na absolutní konvergenci:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{(-1)^n \frac{e^n}{n!}} \right| = \frac{e}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \Rightarrow \text{konverguje.}$$

(absolutně)

Opravný test BI-ZMA v. 5, FIT ČVUT, Z 2012/2013	Datum: 20. 12. 2012
Jméno a Příjmení: Francis Drake	Body: 20

Příklad 1. Určete definiční obor funkce f a nalezněte její derivaci,

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} - \frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

Příklad 2. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{2}{x}.$$

Příklad 3. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} k3^{-k}.$$

Příklad 4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot 3^n - 4^n}{n^7\cdot 2^{2n}+1}.$$

Příklad 5. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\frac{1}{x(x^{10}+2)}.$$

Nápověda: Rozšiřte vhodnou mocninou x.

***

1. $x+1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = (x+1)^{-2/3} + (x+1)^{-4/3}$

2. $$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 2\cdot\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

3. použijeme d'Alembertovo krit.

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)\,3^{-k-1}}{k\,3^{-k}} = \frac{1}{3}\lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{řada konverguje}$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 3^n - 4^n}{n^7\cdot 2^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{n^7 + \frac{1}{4^n}} = \frac{0-1}{+\infty+0} = 0$$

zde $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, přč $\frac{(n+1)^2(3/4)^{n+1}}{n^2(3/4)^n} \to \frac{3}{4} < 1$

(podílové kritérium)

5. $$\int\frac{1}{x(x^{10}+2)}\,dx = \int\frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+2)}\,dx = \left/ \begin{matrix} y = x^{10} \\ dy = 10x^9\,dx \end{matrix} \right/ = \frac{1}{10}\int\frac{1}{y(y+2)}\,dy$$

$$= \frac{1}{10}\int\frac{1/2}{y} + \frac{-1/2}{y+2}\,dy = \frac{1}{20}\left(\ln|y| + \ln|y+2|\right) + C =$$

minus

$$= \frac{1}{20}\ln\left(x^{10}/(x^{10}+2)\right) + C$$