Základy matematické analýzy

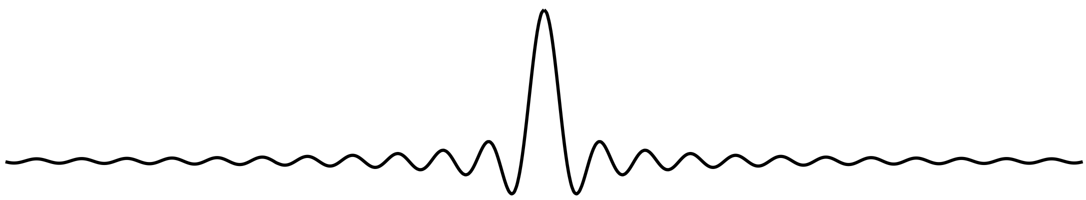
Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.
tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Ing. Daniel Vašata
daniel.vasata@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

Zimní semestr akademického roku 2014/2015

20. září 2014



Obsah

Úvod

Tento dokument doplňuje slidy k přednášce předmětu BI-ZMA. Slidy slouží primárně jako doplněk k prezentaci a příliš se nehodí ke studiu či tisku. Slidy zejména neobsahují vysvětlující komentáře přednášejícího a mohou být proto bez těchto podpůrných informací nejasné až matoucí. V tomto textu je uvedeno vše co na slidech, navíc s dalšími dodatečnými informacemi. Na začátku tohoto dokumentu je čtenáři k dispozici seznam používaných symbolů. K zjednodušení hledání ve vytištěném dokumentu je dokument doplněn rejstříkem pojmů.

Tento úvod je dobrým místem na seznámení čtenáře s historií výuky matematické analýzy na FIT. Předmět BI-ZMA (Základ matematické analýzy) byl po zrodu fakulty nejprve vyučován pod vedením prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. (KM FJFI). Poté předmět převzali Ing. Tomáš Kalvoda, PhD. a doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc. V aktuálním semestru je druhým přednášejícím Ing. Daniel Vašata. Tyto poznámky, a pojetí přednášky vůbec, jsou výsledkem tohoto postupného vývoje.

Pro větší přehlednost je předkládaný text členěn do definic, vět, důkazů a příkladů. Definice a věty jsou číslovány průběžně v celém dokumentu. Konec příkladu je označen symbolem $\triangle$. Konec důkazu označujeme symbolem $\square$.

Pokud laskavý čtenář v textu objeví nejasnosti či chyby, nechť je prosím hlásí jednomu z autorů (tomas.kalvoda@fit.cvut.cz).

Seznam symbolů

$:=$ ..... definice, symbol na levé straně je definován výrazem na straně pravé
$\approx$ ..... přibližné vyjádření na konečný počet desetinných míst
$\wedge$ ..... konjunkce
$\vee$ ..... disjunkce
$\Rightarrow$ ..... implikace
$\Leftrightarrow$ ..... ekvivalence
$\forall$ ..... velký (obecný) kvantifikátor
$\exists$ ..... existenční kvantifikátor
$\exists!$ ..... existuje právě jedno
$\{a, b, c\}$ ..... množina obsahující prvky a, b a c
$\{x \in M \mid P(x)\}$ ..... množina všech x z M splňující $P(x)$
$x \in M,\ x \notin M$ ..... prvek x náleží/nenáleží množině M
$A \subset B$ ..... A je podmnožinou B
$\emptyset$ ..... prázdná množina
$A \cup B$ ..... sjednocení množin A a B
$A \cap B$ ..... průnik množin A a B
$A \smallsetminus B$ ..... rozdíl množin A a B
$A \times B$ ..... kartézský součin množiny A a B
$\mathcal{P}(A)$ ..... množina všech podmnožin množiny A
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ..... množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ..... množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{Z}$ ..... množina celých čísel
$\mathbb{Q}$ ..... množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$ ..... množina reálných čísel
$\overline{\mathbb{R}}$ ..... rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$ ..... nezáporná reálná čísla, tj. $\langle 0, +\infty)$
$\mathbb{R}^+$ ..... kladná reálná čísla, tj. $(0, +\infty)$
$\mathbb{C}$ ..... množina komplexních čísel
$\lfloor x \rfloor$ ..... dolní celá část reálného x
$\lceil x \rceil$ ..... horní celá část reálného x
(a, b) ..... otevřený interval, nebo uspořádaná dvojice, podle kontextu
$\langle a, b \rangle$ ..... uzavřený interval
$H_a(\varepsilon)$ ..... ε-okolí bodu a
$H_a^+(\varepsilon),\ H_a^-(\varepsilon)$ ..... pravé, levé ε-okolí bodu a
$H_{+\infty}(\alpha),\ H_{-\infty}(\alpha)$ ..... α-okolí bodu $+\infty$, $-\infty$
$x\mathcal{R}y$ ..... x je v relaci $\mathcal{R}$ s y
$f : A \to B$ ..... zobrazení z množiny A do množiny B
D_f ..... definiční obor zobrazení f
H_f ..... obor hodnot zobrazení f
$f|_M$ ..... zúžení zobrazení f na množinu M
$f(M)$ ..... obraz množiny M při zobrazení f
$f^{-1}(M)$, $f_{-1}(M)$ ..... vzor množiny M při zobrazení f
$f \circ g$ ..... složené zobrazení
id_A ..... identické zobrazení na množině A

f^{-1} .... inverzní zobrazení
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n) .... reálná číselná posloupnost
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ .... limita posloupnosti
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .... číselná řada
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ .... limita funkce f v bodě a
$\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ .... limita funkce f v bodě a zprava
$\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$ .... limita funkce f v bodě a zleva
$f'(a)$ .... derivace funkce f v bodě a
$T_{n,a}$ .... Taylorův polynom stupně n se středem v bodě a
$R_{n,a}$ .... zbytek po n-tém Taylorově polynomu
$\omega_{n,a}$ .... Peanův tvar zbytku
$\int f$, $\int f(x)\mathrm{d}x$ .... neurčitý integrál funkce f
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ .... Riemannův určitý integrál funkce f na intervalu (a,b)
$\mathcal{I}(\sigma, f)$ .... integrální součet funkce f při rozdělení σ
$a_n \sim b_n$ .... asymptoticky ekvivalentní posloupnosti
$\mathcal{O}(a_n)$ .... posloupnost s horní asymptotickou mezí a_n

Kapitola č. 1

Základní pojmy a úvod

Uspořádaná dvojice; kartézský součin; relace; ekvivalence; uspořádání; zobrazení; reálná funkce reálné proměnné; zúžení zobrazení; obraz a vzor množiny; složené zobrazení; vlastnosti zobrazení; identické zobrazení; inverzní zobrazení; vlastnosti množiny reálných čísel; absolutní hodnota; aritmetická posloupnost; geometrická posloupnost; faktoriál; kombinační číslo; binomická věta.

V této kapitole předpokládáme, že čtenář je již seznámem se základními množinovými operacemi, způsoby zadání množin (výčtem, vlastností) a orientuje se mezi číselnými množinami (přirozená, celá, racionální). Množině reálných čísel se budeme podrobněji věnovat v této kapitole. Dále předpokládáme, že zná vlastnosti elementárních funkcí mezi něž patří polynomiální funkce, trigonometrické funkce, mocninné a logaritmické funkce.

1.1 Relace

Relace formalizuje pojem „vztahu" mezi dvěma objekty. Nejprve si proto zavedeme pojem uspořádané dvojice.

Definice 1: Jsou-li x a y prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro jejich **uspořádanou dvojici**. Jsou-li (x, y) a (u, v) dvě uspořádané dvojice, pak definujeme rovnost mezi uspořádanými dvojicemi následovně,

$$(x, y) = (u, v) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = u \text{ a } y = v.$$

Podobně definujeme uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Všimněte si, že $\{x, y\}$ je množina shodná s $\{y, x\}$, kdežto uspořádané dvojice (x, y) a (y, x) nejsou stejné (obecně). Přesto lze uspořádanou dvojici zavést pouze pomocí množinových pojmů, např. dvojici (x, y) lze ztotožnit s množinou $\{x, \{x, y\}\}$.

Definice 2: Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Tedy symbolicky

$$A \times B := \big\{(x, y) \,\big|\, x \in A \text{ a } y \in B\big\}.$$

Množina $A \times B$ se nazývá **kartézský součin** množin A a B.

Kartézský součin byl pojmenován na počest René Descarta (latinsky Renatus Cartesius, francouzský matematik, 1596 – 1650). Operace $\times$ mezi množinami je nekomutativní, tedy množina $A \times B$ je obecně různá od $B \times A$.

Příklad: Uvažme $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{a, b\}$. Potom

$$\begin{aligned} A \times B &= \big\{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\big\}, \\ B \times A &= \big\{(a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3)\big\}. \end{aligned} \qquad \triangle$$

V kartézském součinu $A \times B$ jsou tedy všechny možné uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$. Pokud chceme mezi prvky množin A a B zavést jistý vztah, pak musíme vybrat jen některé uspořádané dvojice odpovídající danému vztahu.

Definice 3: **Relace** $\mathcal{R}$ mezi množinami A a B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.

Je-li $A = B$, mluvíme o relaci **na množině** A. Je-li $(x, y) \in \mathcal{R}$, pak říkáme že x a y **jsou v relaci** $\mathcal{R}$ a zkráceně tento fakt zapisujeme $x\mathcal{R}y$.

Relace $\mathcal{R}$ je sama množinou. Mezi relacemi tedy můžeme provádět standardní množinové operace. Speciálně vždy existuje tzv. prázdná relace $\emptyset \subset A \times B$ (prvky A a B spolu nijak nesouvisí).

Pojem relace zavedený v celé své obecnosti v předchozí definici odpovídá *many-to-many* vztahu mezi entitami z množiny A a B. Relaci si lze tedy představovat jako spojovací tabulku o dvou sloupcích. Více se čtenář dozví v předmětu BI-DBS – Databázové systémy.

Příklad: Uveďme různorodé příklady relací:

1. Označme symbolem $\mathcal{P}(A)$ množinu všech podmnožin množiny A. Této množině se říká potenční množina, proto písmeno $\mathcal{P}$. Na množině $\mathcal{P}(A)$ zavedeme relaci $\mathcal{R}_1$ takto:
$$X\mathcal{R}_1Y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad X \subset Y.$$

2. Řekneme, že přímky p a q v rovině jsou v relaci $\mathcal{R}_2$, právě když p a q jsou rovnoběžné.

3. Řekneme, že přímky p a q v rovině jsou v relaci $\mathcal{R}_3$, právě když p a q jsou kolmé.

4. Na množině všech studentů FIT ČVUT zavedeme relaci podle data jejich narození. Řekneme, že dva studenti jsou v relaci $\mathcal{R}_4$, jestliže mají narozeniny ve stejný den.

5. Na množině $\mathbb{N}$ definujeme relaci $m\mathcal{R}_5n$, právě když m dělí n. $\triangle$

1.2 Ekvivalence, uspořádání a zobrazení

Nakladením dalších požadavků na vlastnosti relací dostáváme tři důležité a nejčastěji používané typy relací: ekvivalence, uspořádání a zobrazení. Pro další výklad bude zejména důležité zobrazení. S ostatními typy relací se čtenář podrobněji seznámí v dalších částech tohoto textu (a například i v předmětu BI-MLO). Uspořádáním se budeme podrobněji zabývat v kapitolce 9.1. Pro úplnost nyní rozeberme relaci typu ekvivalence.

Definice 4: Řekneme, že relace $\mathcal{R}$ na množině M je **ekvivalence**, právě když splňuje následující tři vlastnosti

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,

2. (symetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ pak i $y\mathcal{R}x$,

3. (tranzitivita): pokud pro $x, y, z \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, pak platí i $x\mathcal{R}z$.

Příklad: Pro relace zavedené výše platí:

1. $\mathcal{R}_1$ není ekvivalencí, není totiž symetrická, je ale tranzitivní a reflexivní.

2. $\mathcal{R}_2$ je ekvivalencí.

3. $\mathcal{R}_3$ není ekvivalencí, protože není ani reflexivní ani tranzitivní, je ale symetrická.

4. $\mathcal{R}_4$ je ekvivalencí.

5. $\mathcal{R}_5$ není ekvivalencí, protože není symetrická, je ale tranzitivní a reflexivní.

Pojem ekvivalence vyjadřuje „stejnost“ či „podobnost“ mezi objekty. △

Definice 5: Nechť $\mathcal{R}$ je ekvivalence na množině M a x je libovolný prvek M. Symbolem $\mathcal{R}[x]$ označujeme množinu všech prvků $y \in M$ $\mathcal{R}$-ekvivalentních s x. Stručněji,

$$\mathcal{R}[x] = \{y \in M \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Množina $\mathcal{R}[x]$ obsahuje aspoň x a nazývá se **třída ekvivalence určená prvkem** x.

Platí, že pro každé dva prvky $x, y \in M$ je buď $\mathcal{R}[x] = \mathcal{R}[y]$, nebo $\mathcal{R}[x] \cap \mathcal{R}[y] = \emptyset$. Množinu M je pak možno zapsat jako sjednocení disjunktních tříd ekvivalence.

Příklad: Uvážíme-li relaci $\mathcal{R}_3$, pak množina všech studentů FIT se rozpadá na množiny studentů, kteří se narodili ve stejný den. Všichni studenti v takovéto množině si jsou z tohoto pohledu ekvivalentní. △

Ve velké části předmětu BI-ZMA se budeme zabývat vlastnostmi funkcí. Funkce jsou speciálním případem zobrazení, které zavedeme nyní.

Definice 6: **Zobrazení** f z množiny A do množiny B je relace mezi množinami A a B splňující podmínku: pro každé $x \in A$ existuje nejvýše[1] jedno $y \in B$ tak, že xfy. Toto zobrazení f značíme $f : A \to B$. Místo xfy píšeme $y = f(x)$ nebo $x \overset{f}{\mapsto} y$.

Pro představu uvádíme grafickou ilustraci zobrazení na obrázku č. 1.1. Uveďme nyní základní terminologii používanou pokud mluvíme o zobrazení. Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$. Prvek y nazýváme **hodnota** f **v bodě** x, nebo **obraz** x **při zobrazení** f. Prvku x říkáme **vzor** prvku y při zobrazení f.

Interpretace tohoto typu relace je tedy taková, že pokud je dvojice (x, y) v takovéto relaci f, pak f přiřazuje prvku x prvek y. Podmínka v definici je pak jasná, nelze jednomu prvku přiřadit dva různé obrazy.

Množinu všech $x \in A$ takových, že existuje $y \in B$ splňujících $y = f(x)$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení f. Symbolicky lze psát

$$D_f = \{x \in A \,|\, (\exists y \in B)(y = f(x))\}.$$

Množina všech obrazů při zobrazení f se nazývá **obor hodnot** zobrazení f a značí se H_f. V symbolech

$$H_f = \{y \in B \,|\, (\exists x \in A)(y = f(x))\}.$$

Pokud je to typograficky nutné, pak definiční obor, resp. obor hodnot, značíme také symbolem $D(f)$, resp. $H(f)$.

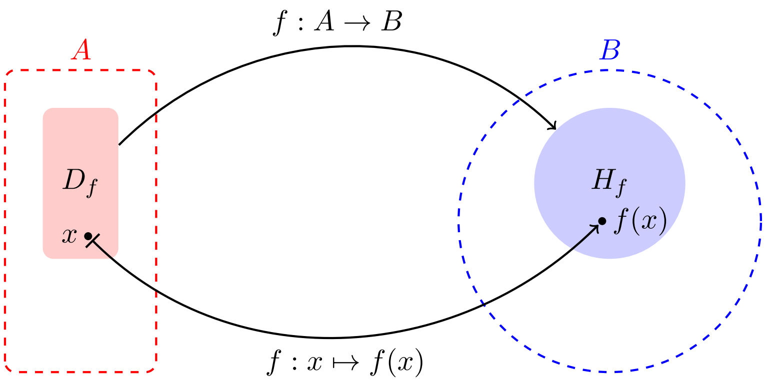
Zobrazení jsou relace, čili množiny, které umíme srovnávat. Buďte f a g dvě zobrazení z A do B. Podmínka jejich rovnosti $f = g$ je ekvivalentní podmínkám

$$D_f = D_g \quad \text{a} \quad f(x) = g(x) \text{ pro všechna } x \in D_f.$$

Buď $f : A \to B$. Zobrazení $g : A \to B$ s $D_g := M$, kde $M \subset D_f$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení** f **na množinu** M. Zapisujeme $g = f\big|_M$. Množinu

$$f(S) := \{y \in B \,|\, (\exists x \in S)(f(x) = y)\},$$

[1] „Nejvýše jedno“ znamená buď právě jedno nebo žádné.



Obrázek 1.1: Zobrazení z množiny A do množiny B. Definiční obor, resp. obor hodnot, nemusí být roven celému A, resp. B.

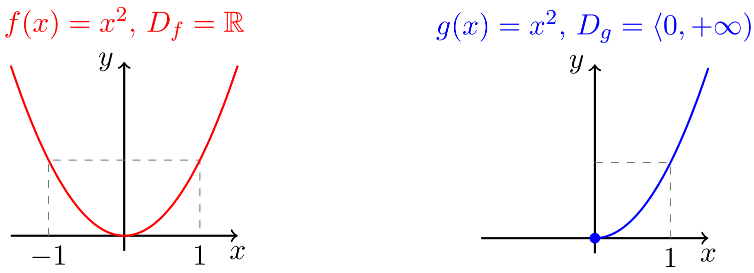
kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny** S **při zobrazení** f. Je-li $N \subset B$, potom množinu

$$f^{-1}(N) := \{x \in D_f \,|\, (\exists y \in N)(f(x) = y)\}$$

nazveme **vzorem množiny** N při zobrazení f.

Poznámka: Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(N)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (viz níže).

Příklad: Ukažme si příklad zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a jednoho jeho zúžení g.



Jaký je obraz množiny $S = (-1, 1\rangle$ vzhledem k těmto zobrazením? Jaký je vzor množiny $N = (-1, 1)$ vzhledem k těmto zobrazením? △

Nová zobrazení můžeme také vytvářet pomocí skládání zobrazení, pokud jsou zobrazení správného typu.

Definice 7: Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : A \to C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

pro všechna

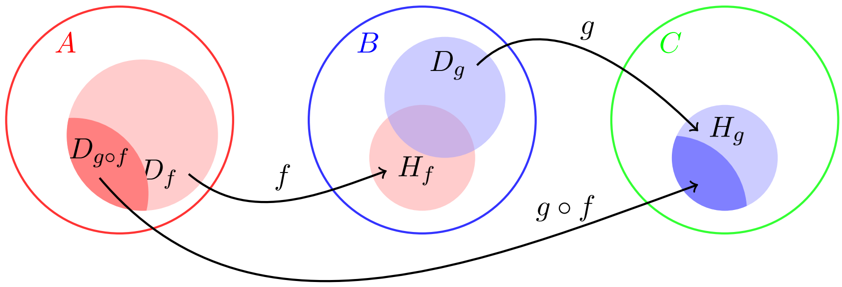
$$x \in D_{g \circ f} := \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\}.$$

O definičním oboru složeného zobrazení pouze víme, že $D_{g\circ f} \subset D_f$. I v případě, že $D_f \neq \emptyset$ a $D_g \neq \emptyset$ může nastat situace $D_{g\circ f} = \emptyset$. Názorně je tato situace uvedena na obrázku č. 1.2.

Mezi zobrazeními rozlišujeme následující tři důležité typy.

Definice 8 (Důležité druhy zobrazení)**:** Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x, y \in D_f$, $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$.



Obrázek 1.2: Složené zobrazení.

- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže f je prosté, $D_f = A$ a na.

  Pomocí kvantifikátorů lze tyto podmínky zapsat následovně

prosté:	$(\forall x, y \in D_f)\big((x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))\big)$,
na:	$(\forall y \in B)(\exists x \in D_f)(f(x) = y)$,

Při ověřování prostoty zobrazení častěji využíváme ekvivalentní formulaci[2]

$$(\forall x, y \in D_f)\big((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)\big).$$

Dále ještě poznamenejme, že zobrazení $f : A \to B$ je na, právě když jeho obor hodnot je celá množina B. Zobrazení f pak zobrazuje svůj definiční obor na celou množinu A, proto „na“.

Příklad: Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované předpisem $f(n) := n^2$ je prosté, ale není na. Skutečně, splňují-li $n, m \in \mathbb{N}$ rovnost $f(n) = f(m)$, pak $n^2 = m^2$ a díky kladnosti i $n = m$. Zobrazení nemůže být na, protože například pro $m = 3$ neexistuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n^2 = 3$. △

Příklad (Identické zobrazení)**:** Buď A libovolná množina. Zobrazení $\mathrm{id}_A : A \to A$ definované předpisy

$$D_{\mathrm{id}_A} := A \quad \text{a} \quad \mathrm{id}_A(x) := x, \; x \in D_{\mathrm{id}_A},$$

nazýváme **identické zobrazení**. Zobrazení id_A je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní. △

Přirozeně se nabízí otázka, jestli můžeme „změnit směr“ zobrazení $f : A \to B$. Přesněji, jestli zadanému prvku z oboru hodnot můžeme jednoznačně přiřadit nějaký prvek v definičním oboru. To lze zřejmě pouze v případě, že každý prvek v oboru hodnot má právě jeden vzor, čili když zobrazení je prosté. Tímto způsobem získáváme pojem inverzního zobrazení.

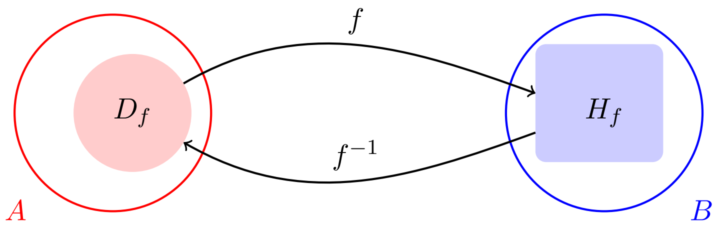
Definice 9: Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H_f lze přiřadit právě jedno y z množiny D_f tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení f a značíme f^{-1}.

[2] Vzpomeňte na větu obměněnou.

Z definice ihned plyne, že $f^{-1} : B \to A$ a dále

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= H_f, & H_{f^{-1}} &= D_f, \\ f^{-1} \circ f &= \mathrm{id}_{D_f}, & f \circ f^{-1} &= \mathrm{id}_{H_f}. \end{aligned}$$

K ilustraci tohoto pojmu také uvádíme obrázek č. 1.3.



Obrázek 1.3: Prosté zobrazení $f : A \to B$ a jeho inverze $f^{-1} : B \to A$.

Příklad: Uvažme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definované předpisem[3]

$$f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Toto zobrazení je prosté a na. Inverzní zobrazení je dáno předpisem

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & m \geq 1, \\ 1 - 2m, & m \leq 0, \end{cases}$$

pro libovolné celočíselné m. $\triangle$

1.3 Množina reálných čísel

V předchozí podkapitole jsme definovali pojem zobrazení. Abychom mohli mluvit o reálných funkcích je nejprve nutné připomenout vlastnosti množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Této množině se proto budeme věnovat v této podkapitole.

Mezi reálnými čísly existují dvě binární operace (tj. zobrazení), **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

které mají známé vlastnosti (platí komutativní, asociativní, distributivní zákon). Podrobněji, pro libovolná reálná x, y, z platí

$$\begin{array}{lll} \text{komutativní zákon:} & x + y = y + x, & x \cdot y = y \cdot x, \\ \text{asociativní zákon:} & x + (y + z) = (x + y) + z, & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ \text{distributivní zákon:} & x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z). & \end{array}$$

Dále mezi reálnými čísly existují čísla 0 (nula) a 1 (jedna) splňující

$$a + 0 = a \quad \text{a} \quad a \cdot 1 = a,$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$. Ke každému reálnému číslu a existuje reálné číslo $-a$ splňující $a + (-a) = 0$. Podobně ke každému nenulovému číslu a existuje reálné číslo a^{-1} splňující

[3] Pro reálné x označuje $\lfloor x \rfloor$ dolní celou část čísla x.

$a \cdot a^{-1} = 1$. Tento odstavec lze stručně shrnout do krátkého konstatování, že reálná čísla spolu s operacemi sčítání a násobení tvoří těleso[4].

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje relace **uspořádaní** na $\mathbb{R}$:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

Toto uspořádání je tak zvaně úplné[5], pro libovolná dvě různá reálná čísla a a b lze rozhodnout, zda-li $a < b$ nebo $b < a$. Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že

$$\begin{aligned} a < b,\, c > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \\ a < b,\, c < 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c. \end{aligned}$$

Zdvojená šipka znamená **implikaci**, kterou čteme: Jestliže jsou splněny podmínky vlevo, pak platí tvrzení vpravo.

Uspořádání $<$ reálných čísel nám umožňuje porovnat libovolná dvě reálná čísla. Pomocí uspořádání zavádíme speciální podmnožiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**:

otevřený interval	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a < x < b\}$,
uzavřený interval	$\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a \leq x \leq b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval	$\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a \leq x < b\}$,
polootevřený (polouzavřený) interval	$(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a < x \leq b\}$.

A neomezené intervaly

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}, \\ (-\infty, b\rangle &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}. \end{aligned}$$

Ve všech těchto intervalech je a tzv. **počáteční** bod a b tzv. **koncový** bod intervalu.

Dále definujeme pojem okolí bodu a pojem rozšířené reálné osy. Pomocí okolí budeme později definovat limity posloupností i funkcí.

Definice 10 (Okolí bodů z $\mathbb{R}$)**:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme **ε-okolím bodu a v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a(\varepsilon)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$ právě, když $|x - a| < \varepsilon$. Bod x tedy patří do ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když jeho vzdálenost od a je menší než ε.

Definice 11: Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Interval $\langle a,\ a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon,\ a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, **ε-okolím bodu a v** $\mathbb{R}$ a značíme $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.

Z očividných důvodů o množině $H_a^\pm(\varepsilon)$ někdy též mluvíme jako o **jednostranném** okolí, a o $H_a(\varepsilon)$ jako o **oboustranném** okolí.

Dále bude často výhodné pracovat i s $+\infty$ a $-\infty$ jako s reálnými čísly. Rozšíříme proto o tyto prvky reálná čísla v následující definici.

Definice 12: Množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Konečně také zavedeme okolí těchto nových bodů $+\infty$ a $-\infty$.

---

[4] Více se o číselných tělesech dozvíte v předmětu BI-LIN. Pro aplikace v počítačové bezpečnosti (kryptologii, šifrování) mají velký význam zvláště konečná tělesa.

[5] Existují i neúplná uspořádání, viz například relaci $\mathcal{R}_5$ z konce podkapitoly 1.1

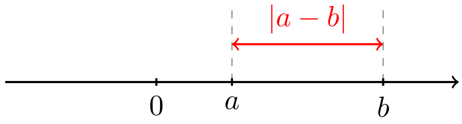
Definice 13: Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c, +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme okolím bodu $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_\infty(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

Není-li potřeba specifikovat velikost okolí, píšeme zkráceně H_a, $H_{+\infty}$, $H_{-\infty}$. Okolí bodu a jsme definovali pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$, avšak toto okolí je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$.

Uspořádání nám dále umožňuje zavést pojem vzdálenosti mezi dvěma reálnými čísly. **Vzdálenost** dvou reálných čísel definujeme pomocí **absolutní hodnoty**,

$$|a| := \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Vzdálenost dvou čísel $a, b \in \mathbb{R}$ je rovna $|a-b| = |b-a|$. Grafické znázornění vzdálenosti mezi dvěma reálnými čísly lze nalézt na obrázku č. 1.4.



Obrázek 1.4: Vzdálenost dvou reálných čísel.

Ze střední školy víte, že množina reálných čísel se skládá z

- **přirozených čísel** $1, 2, \ldots,$ značíme ji $\mathbb{N}$,
- **celých čísel** $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, značíme ji $\mathbb{Z}$ a vzniká řešením rovnic $a + x = b$,
- **racionálních čísel**, která vzniknou řešením rovnic

  $$q \cdot x = p\,, \quad p, q \in \mathbb{Z}\,, \; q \neq 0.$$

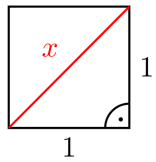
  Řešení této rovnice píšeme ve tvaru $\frac{p}{q}$ a lze předpokládat, že $q \in \mathbb{N}$ (eventuální znaménko minus je v čitateli) a p, q jsou nesoudělná. Např. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$. Množina všech racionálních čísel se značí $\mathbb{Q}$.
- **iracionálních čísel**.

Množina iracionálních čísel je poněkud magická, protože ji nelze popsat nijak jednoduše. Tvrzení, že iracionální čísla jsou reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém na definici reálného čísla. Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, že přímka není nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry“. Objasněme tento požadavek na následujícím příkladu.

Příklad: Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$.

Motivací této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1. Viz obrázek č. 1.5. Tato úsečka jistě existuje a odpovídá tak nějakému číslu na reálné ose.

Toto číslo ale nemůže být racionální. Dokažme toto tvrzení **sporem**. Předpokládejme opak, tj. existují $p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná a taková, že $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Pak $p^2\,(= 2q^2)$ je nutně sudé číslo, tj. má tvar $p = 2k, k \in \mathbb{N}$. Tedy $p^2 = 4k^2 = 2q^2$, tj. q^2 i q jsou sudá čísla, $q = 2l, l \in \mathbb{N}$. To ale znamená, že p, q jsou soudělná (obě jsou dělitelná 2), což je ale spor s naším předpokladem. Náš předpoklad o existenci racionálního řešení rovnice $x^2 = 2$ byl chybný.



Obrázek 1.5: Iracionalita délky uhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.

Nyní ukážeme jak obecně zformulovat požadavek „bezděrovosti“. Konkrétně na příkladě našeho iracionálního řešení x. Určitě musí být $x \in \langle 1, 2\rangle = I_1$. Rozpůlením tohoto intervalu zjistíme, že $x \in \langle 1, \frac{3}{2}\rangle = I_2$. Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet x. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka n-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, že $\mathbb{R}$ nemá díry v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{\sqrt{2}\right\}.$$

Poznamenejme, že dělení intervalů vždy na deset stejných dílů vede k vyjádření reálného čísla ve tvaru desetinného rozvoje, nekonečného a neperiodického pro iracionální číslo. △

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**:

> Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.

Přesněji, pokud jsou I_n, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

$I_n \supset I_{n+1}, \; n = 1, 2, \ldots,$

pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

V průniku zřejmě leží právě jedno reálné číslo. Pokud bychom předpokládali existenci dvou různých čísel ležících v tomto průniku snadno se dostaneme do rozporu s libovolností délky uvažovaných intervalů.

Je důležité si uvědomit, že axiom úplnosti je to, co odlišuje reálná čísla od racionálních. Algebraicky (vzhledem k $+$ a $\cdot$) mají jinak tyto množiny shodné vlastnosti.

1.4 Reálná funkce reálné proměnné

Matematická analýza, kterou budeme v tomto kurzu studovat, spočívá převážně ve studiu **reálných funkcí reálné proměnné**. Intuitivně je funkce jednoznačný výsledek nějakého procesu, který lze měřit pomocí reálných čísel. Přitom výsledek procesu závisí na měnícím se vstupu jehož hodnotu lze opět popsat pomocí reálných čísel. Jedná se tedy o speciální případ zobrazení.

Definice 14: Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** nazýváme množinu všech reálných x pro které má výraz $f(x)$ jednoznačný smysl. Pokud je dán pouze funkční předpis bez dalších detailů, automaticky máme na mysli funkci definovanou na příslušném přirozeném definičním oboru.

Funkci si můžeme také představit, respektive nakreslit, pomocí jejího **grafu**.

Definice 15: **Grafem** funkce f nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \big\{(x, f(x)) \,\big|\, x \in D_f\big\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Příklady jednoduchých grafů lze nalézt níže. Pomocí uspořádání reálných čísel můžeme rozlišovat mezi několika druhy funkcí.

Definice 16: Funkce f se nazývá

- **rostoucí na intervalu** I, jestliže

$$(\forall x, y \in I)\big(x < y \implies f(x) < f(y)\big)$$

- **klesající na intervalu** I, jestliže

$$(\forall x, y \in I)\big(x < y \implies f(x) > f(y)\big)$$

Je-li funkce buď rostoucí nebo klesající na intervalu I, pak se nazývá **monotonní** na intervalu I.

V definici je implicitně obsažen požadavek, aby interval I celý ležel v definičním oboru funkce f. Není ho potřeba zvlášť zdůrazňovat.

Podívejme se na několik příkladů reálných funkcí reálné proměnné. Vzhledem k tomu, že funkce jsou speciálním případem zobrazení, můžeme s nimi provádět stejné operace jako se zobrazeními. Speciálně tedy máme k dispozici skládání funkcí, obrazy a vzory množin vzhledem k funkci, zúžení funkce, atp.

Příklad: Příkladem rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ je lichá mocnina (a také lichá odmocnina, vizte níže). Funkce $f(x) = x^2$ není na $\mathbb{R}$ ani rostoucí ani klesající, ale je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$. △

Příklad: Uvažme výraz $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem je množina

$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Takto definovaná funkce je dána relací

$$f = \left\{ \left(x, \frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) \,\middle|\, x \in \langle 0, 1) \cup (1, +\infty) \right\}.$$

Podmínky na „smyslupnost“ daného výrazu jsou totiž v tomto případě nenulovost jmenovatele a nezápornost argumentu odmocniny. △

Příklad: Uvažme funkce $f_1(x) = \sqrt{x}$ a $f_2(x) = \sqrt{|x|}$ jejichž přirozenými definičními obory jsou $D_{f_1} = \langle 0, +\infty)$ a $D_{f_2} = \mathbb{R}$. Funkce f_1 je zúžením funkce f_2 na množinu $\langle 0, +\infty)$. Platí tedy $f_1 = f_2\big|_{\langle 0, +\infty)}$. △

výraz	má smysl pro
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\sqrt[2k]{x}$	$x \geq 0,\ k \in \mathbb{N}$
$\ln(x)$	$x > 0$
$\mathrm{tg}(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Tabulka 1.1: Definiční obory některých elementárních funkcí.

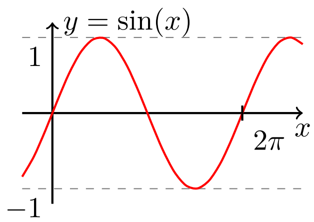
Příklad: Buď $A = \langle -1, 1 \rangle$ určete

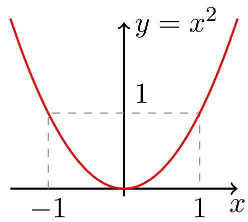
$$\sin^{-1}(A), \quad f(A), \quad g^{-1}(A),$$

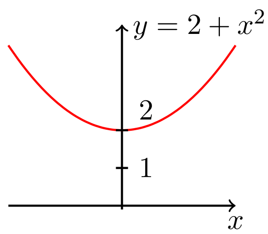
kde $f(x) = x^2$ a $g(x) = 2 + x^2$. Stručná odpověď:

$$\sin^{-1}(A) = \mathbb{R}, \quad f(A) = \langle 0, 1 \rangle, \quad g^{-1}(A) = \emptyset.$$

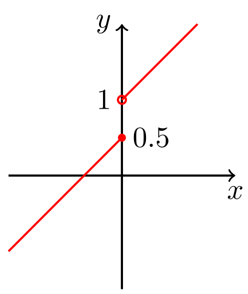
Grafy těchto funkcí jsou uvedene na následujících obrázcích. △



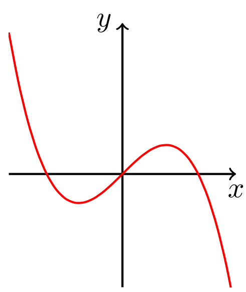




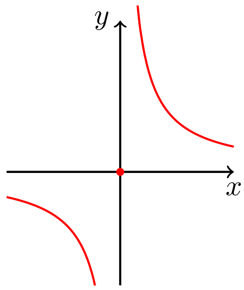
Příklad: Které z následujících funkcí ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) jsou prosté, na, či bijektivní? △



$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$f(x) = x(1 - x^2)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Definice 17: Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že funkce f je **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, právě když obor hodnot H_f je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.

Příklad: Například platí, že

- $f(x) = x^2$ je omezená zdola ($H_f = \langle 0, +\infty)$), ale není omezené shora. Není ani rostoucí ani klesající: $-1 < 0 < 1$ ale $f(-1) > f(0) < f(1)$.
- $f(x) = \sin x$ je omezená ($H_f = \langle -1, 1\rangle$). Není ani rostoucí ani klesající.
- $f(x) = e^x$ je omezená zdola ($H_f = (0, +\infty)$), není omezená shora, je rostoucí. $\triangle$

Poznámka: Pomocí kvantifikátorů můžeme podmínku omezenosti zformulovat následovně:

$$(\exists K > 0)(\forall x \in D_f)(|f(x)| \leq K).$$

Podobně lze postupovat u omezenosti shora, resp. zdola.

Poznámka: Je-li funkce f monotonní, pak je i prostá. Tudíž existuje její inverzní funkce, kterou opět značíme f^{-1}. Platí

$$\begin{aligned} f \text{ je rostoucí} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je rostoucí,} \\ f \text{ je klesající} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je klesající.} \end{aligned}$$

Poznámka: Prostá funkce nemusí být monotonní. Příkladem prosté funkce, která není ani klesající ani rostoucí je $f(x) := \frac{1}{x}$ s definičním oborem $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Další užitečnou vlastností některých funkcí je sudost/lichost/periodicita. Tyto pojmy můžeme s výhodou použít při vyšetřování průběhu funkcí, umožňují nám totiž problém zredukovat na vyšetřování funkce pouze na jisté části definičního oboru funkce.

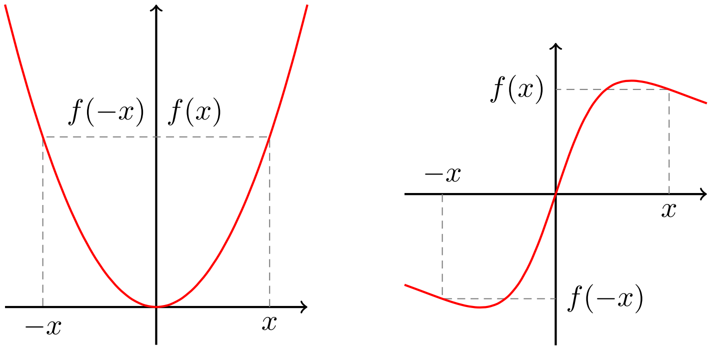
Definice 18: Reálná funkce reálné proměnné f se nazývá

- **sudá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = f(-x)$.
- **lichá**, právě když pro všechna $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(x) = -f(-x)$.

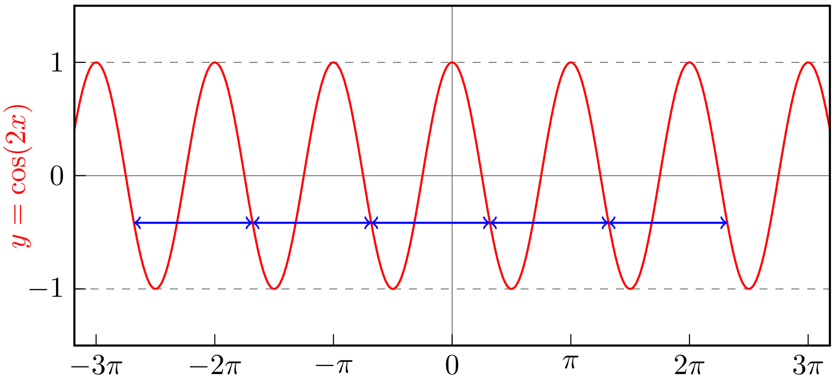
Definice 19: Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro niž existuje kladné $T \in \mathbb{R}$ takové, že

1. $(\forall x \in D_f)(x + T,\ x - T \in D_f)$,
2. $(\forall x \in D_f)(f(x + T) = f(x))$.

Říkáme, že funkce f je **periodická** a číslo T nazýváme **periodou** funkce f.



Obrázek 1.6: Sudá a lichá funkce.



Obrázek 1.7: Periodická funkce.

1.5 Základní vztahy

Budeme potřebovat různé „vzorce“ pro reálná čísla, z nichž nyní uvedeme ty důležitější. Pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0\,.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti. Mají-li obě čísla a a b stejné znaménko, dostáváme z definice absolutní hodnoty rovnost. Je-li jedno kladné a druhé záporné, např. $a > 0$ a $b < 0$, pak $|a|+|b| = a-b > |a+b|$, která je buď rovna $a+b$ nebo $-a-b$ podle znaménka $a+b$. □

Členy **aritmetické posloupnosti** jsou dány rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je tzv. diference. K odstartování rekurentní formule potřebujeme zadat první člen a_1. Explicitně platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Tento vztah lze dokázat **matematickou indukcí**, která spočívá ve dvou krocích:

(i) Dokážeme platnost pro $n = 1$, zde $a_1 = a_1$ zřejmě platí.

(ii) Za předpokladu (IP), že vztah platí pro kladné přirozené n, dokážeme jeho platnost pro $n+1$ (tzv. **indukční krok**). Zde

$$a_{n+1} = a_n + d \overset{\text{(IP)}}{=} a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd.$$

Tím postupně projdeme všechna přirozená čísla, takže vztah pro n-tý člen platí pro všechna kladná přirozená n.

Poznámka: Může se zdát podivné dokazovat vzoreček pro explicitní vyjádření členů aritmetické posloupnosti, když je takřka očividný. Jedná se však hlavně o elementární ukázku důkazu pomocí matematické indukce.

Podobně lze indukcí (ale i jinak) dokázat, že pro součet n členů aritmetické posloupnosti $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ platí

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Speciálně pro $a_1 = 1$, $d = 1$, tedy $a_n = n$, platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Geometrická posloupnost je dána rekurentním vztahem

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

kde parametr $q \neq 0, 1$ se nazývá **kvocient**. Je-li dán první člen a_1, pak je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (důkaz například indukcí) a

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

K důkazu si stačí povšimnout, že

$$s_{n+1} = s_n + a_1 q^n = a_1 + q s_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Odtud vyjádřením s_n dostáváme dokazovanou rovnost.

Definujeme **faktoriál**

$$0! := 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdots n, \quad n \in \mathbb{N}$$

a **kombinační číslo**

$$\binom{n}{0} := 1, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \; n \in \mathbb{N}, \; k \in \mathbb{N}_0, \; n \geq k.$$

Tato čísla jsou známá z kombinatoriky: $n!$ udává počet permutací n čísel; $\binom{n}{k}$ je počet možných výběrů neuspořádaných k-tic z n čísel.

Platí tzv. **binomická věta**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz provedeme indukcí: Pro $n = 1$ je

$$\mathrm{LS} = a + b,$$
$$\mathrm{PS} = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

Vzpomeňte, že klademe $a^0 = 1$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Provedeme nyní indukční krok

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[a^{k+1}b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}\right] \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right] a^j b^{n+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j}.\end{aligned}$$

neboť z definice kombinačního čísla lze dokázat (vzpomeňte Pascalův trojúhelník), že

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$$

pro $j = 1, \ldots, n$.

V důkazu jsme se poprvé skutečně setkali s použitím zkráceného sumačního zápisu. Místo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

píšeme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Index k se nazývá sčítací index, čísla 1 a n dolní a horní mezí. Díky asociativitě, komutativitě a distributivitě algebraických operací platí

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad \sum_{k=1}^{n} c a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

kde $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c \in \mathbb{R}$. V důkazu binomické věty jsme také použili očividnou úpravu typu

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Připomeňme další často používaný vzorec využívaný k „zbavení se odmocniny“. Pro reálná $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \tag{1.1}$$

Tento vztah můžeme dokázat indukcí, nebo přímo. Vyjdeme-li z pravé strany, pak

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

Speciálně tedy například platí

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\
a^3 - b^3 &= (a-b)\big(a^2 + ab + b^2\big).
\end{aligned}
$$

Pro kladná a, b pak máme

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a} - \sqrt{b} &= \big(\sqrt{a} - \sqrt{b}\big) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \\
\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} &= \big(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\big) \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}.
\end{aligned}
$$

Smyslem těchto (a podobných úprav pro vyšší odmocniny) je vyjádřit rozdíl odmocnin jako rozdíl jejich argumentů. Tyto úpravy později využijeme při počítání limit některých výrazů nebo k důkazu spojitosti odmocniny.

Kapitola č. 2

Reálné posloupnosti

Reálná posloupnost; vlastnosti posloupností; vybraná posloupnost; rozšířená reálná osa; okolí bodů rozšířené reálné osy; limita číselné posloupnosti; jednoznačnost limity; konvergentní, divergentní posloupnosti; věta o limitě vybrané posloupnosti; kritéria konvergence; hromadný bod posloupnosti; Bolzano-Cauchyova věta; věta o existenci limity omezené monotónní posloupnosti; algebraické operace na množině $\overline{\mathbb{R}}$; věty o nerovnostech v limitách; věta o sevřené posloupnosti. Landauova symbolika. Výpočty limit důležitých posloupností; rekurentně zadané posloupnosti; číselné řady; Eulerovo číslo; exponenciální funkce a obecná mocnina.

2.1 Definice pojmu posloupnosti

Pomocí pojmu posloupnosti můžeme formalizovat procesy probíhající v diskrétních krocích. Například posloupnost měření průměrné denní teploty v jistém místě, nebo posloupnost aproximací řešení jisté úlohy. V této kapitole si ukážeme, jak pojem posloupnosti definovat, jaké významné vlastnosti posloupností nás budou zajímat a jak definovat veledůležitý pojem limity posloupnosti.

Definice 20 (Posloupnost)**:** Zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$, jehož definiční obor je nekonečná[1] množina, nazýváme **reálná posloupnost**.

Než přistoupíme k rozboru tohoto pojmu, učiníme následující dohodu. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že zkoumaná posloupnost je definovaná na celém $\mathbb{N}$. Pokud tomu tak není, pak ji lze vždy vhodně „přeindexovat.“ V některých příkladech však může být vhodné uvažovat menší indexovou množinu (například pouze sudá čísla), v takovém příkladě na to bude čtenář jasně upozorněn.

Dále budeme používat následující standardní označení. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in D_a \subset \mathbb{N}$, tj. číslo $a(n)$, označujeme pomocí dolního indexu[2] symbolem a_n a nazýváme **n-tým členem posloupnosti** a. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem (a_n). Pokud chceme zvýraznit i definiční obor, tedy pro jaké indexy jsou členy posloupnosti definovány, píšeme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, či pouze $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad: Vyzýváme čtenáře, aby vlastními slovy zformuloval, jaký je rozdíl mezi symbolem a_n a (a_n). Srovnejte s podobnou symbolikou u funkcí, tedy rozdílem mezi $f(x)$ a f. △

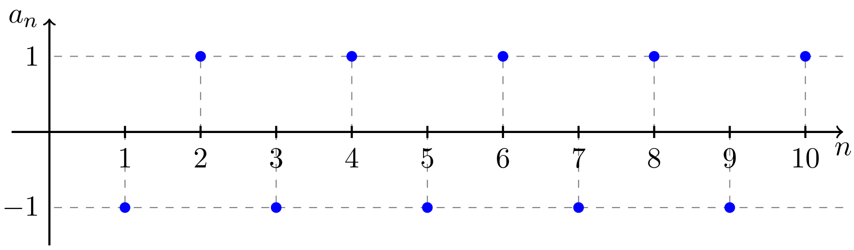
Příklad: Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovovanou předpisem $a_n := (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Například tedy platí rovnosti $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$. Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big).$$

[1] Nemající konečný počet prvků.

[2] Závislost na diskrétních parametrech (např. celočíselných) vyjadřujeme pomocí dolních indexů. Jako například u posloupností: a_n. Naopak závislost na spojitých parametrech pak většinou pomocí závorek, tj. například u reálných funkcí reálné proměnné píšeme $f(x)$.

Oborem hodnot a je množina obsahující pouze **dva** prvky, $\{-1, 1\}$. Posloupnost a je graficky znázorněna na obrázku č. 2.1. △



Obrázek 2.1: Příklad posloupnosti (a_n), $a_n = (-1)^n$.

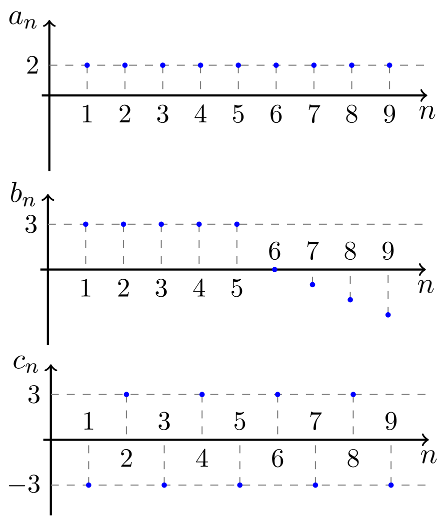
Podobně jako u funkcí, zavádíme několik typů posloupností podle vlastností jejich sousedních členů. Posloupnost (a_n) je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$.. Posloupnost (a_n) je **neklesající** (resp. **nerostoucí**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$). Posloupnost (a_n) nazýváme **monotonní** jestliže je nerostoucí nebo neklesající.

Rozmyslete si, jaké z těchto vlastností mají posloupnosti na obrázku č. 2.2.

$$a_n = 2$$

$$b_n = \begin{cases} 3, & n \leq 5 \\ 6 - n, & n > 5 \end{cases}$$

$$c_n = 3(-1)^n$$



Obrázek 2.2: Tři různé příklady posloupností.

2.2 Limita číselné posloupnosti

V této podkapitole nejprve zavedeme pojem limity posloupnosti a pak prozkoumáme jeho základní vlastnosti. Hlavní myšlenkou je vyjádření intuitivního požadavku, aby se „členy posloupnosti a_n blížily libovolně blízko k jistému α.“ Proč by nás takováto otázka měla zajímat? V praxi je často potřeba zjistit, jestli proces, který členy dané posloupnosti popisují, někam spěje (např. jestli posloupnost jistých aproximací konverguje k hledanému výsledku).

Poznamenejme, že limita není jediným nástrojem pro zkoumání chování členů posloupností pro velké indexy n. V další části tohoto textu se budeme bavit o hromadných bodech a Landauově asymptotické notaci, pomocí nichž budeme moci také vyjadřovat chování posloupností v ∞ (například i v situacích, kdy daná posloupnost limitu nemá).

Přistupme nyní k definici limity číselné posloupnosti.

Definice 21: Řekneme, že reálná posloupnost (a_n) má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro každé okolí H_α bodu α lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než n_0 platí $a_n \in H_\alpha$. V symbolech

$$(\forall H_\alpha)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n \in H_\alpha). \tag{2.1}$$

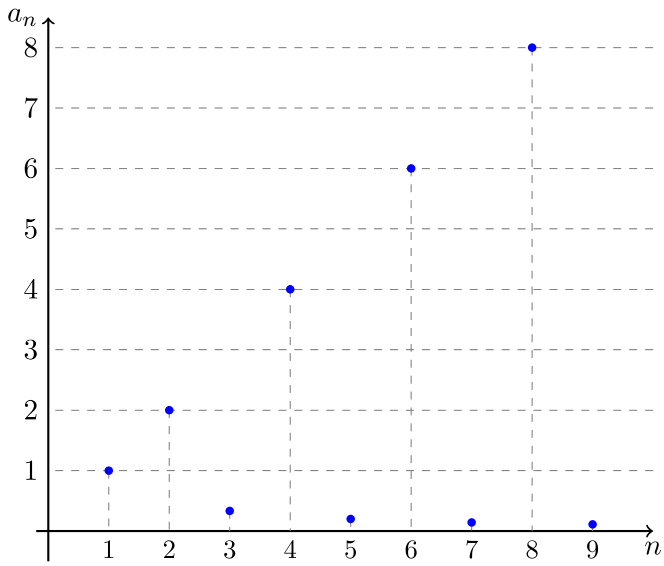
Tuto skutečnost můžeme zapsat několika možnými ekvivalentními způsoby:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \to \alpha.$$

Slovně můžeme definici (2.1) přeformulovat i takto: $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou posloupnosti (a_n), právě když v každém okolí H_α bodu α leží všechny členy posloupnosti s dostatečně velkým indexem, tj. všechny až na konečný počet výjimek. Na druhou stranu, k tomu aby $\lim a_n = \alpha$ ale nestačí, aby v každém okolí bodu α leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti. Uvažte například posloupnost

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}. \end{cases} \tag{2.2}$$

V každém okolí bodu 0 leží nekonečně mnoho jejích členů, ale tato posloupnost nemůže mít limitu, protože mimo toto okolí leží taktéž nekonečně mnoho jejích členů. Prvních několik členů této posloupnosti je znázorněno na obrázku č. 2.3.



Obrázek 2.3: Grafické znázornění posloupnosti (2.2).

Pokud bychom v definici limity zaměnili „$n_0 \in \mathbb{N}$“ za „$n_0 \in \mathbb{R}$“, pak se její smysl nezmění. Význam zůstane také zachován připustíme-li „$n \geq n_0$“ místo „$n > n_0$“. Index n_0 totiž vyjadřuje pouze to, že inkluze $a_n \in H_\alpha$ platí pro všechna dostatečně velká n.

Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat a zbavit ji reference na pojem okolí. Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále inkluze $a_n \in H_\alpha$ platí, právě když $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy ekvivalentní formulaci definice,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ obdržíme následující tvrzení

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall c \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n > c).$$

Rozmyslete si podmínku pro $\alpha = -\infty$.

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi zavedeného pojmu. Následující věta odhaluje veledůležitou vlastnost pojmu limity. Posloupnost buď limitu nemá, nebo ji má a její hodnota je dána jednoznačně. Jinak řečeno, žádná posloupnost nemůže mít **dvě různé** limity. Pokud tedy dva lidé počítají jeden příklad a vyjde jim rozdílný výsledek, pak aspoň jeden z nich musel někde ve výpočtu udělat chybu.

Věta 22 (O jednoznačnosti limity)**:** Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz sporem. Předpokládejme, že (a_n) má dvě různé limity $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$. Potom existují dvě disjunktní okolí H_a a H_b, tj. $H_a \cap H_b = \emptyset$. Z definice limity ovšem máme k dispozici $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in H_a$ a pro všechna $n > m_0$ je $a_n \in H_b$. Tudíž pro libovolné $n > \max\{n_0, m_0\}$ platí

$$a_n \in H_a \cap H_b = \emptyset$$

což je spor. □

Při počítání limit většinou (přímo) nepoužíváme definici, ale výpočet zakládáme na znalosti jednoduchých, elementárních, limit. V následujících třech příkladech si ukážeme jak definici použít právě na těchto jednoduchých posloupnostech.

Příklad: Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, je rovna α. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li jakékoliv $n_0 \in \mathbb{N}$ potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

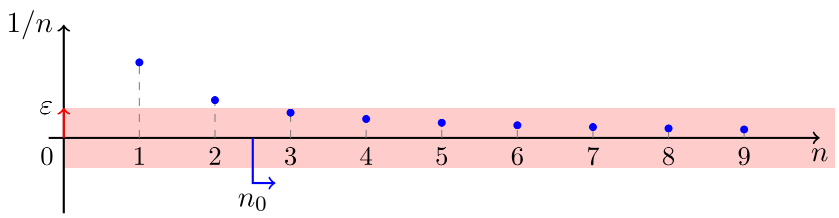
△

Příklad: Limita posloupnosti $a_n = n^2$ je $+\infty$. Buď $K > 0$ libovolné. Zvolíme-li přirozené $n_0 > \sqrt{K}$, pak pro každé $n > n_0 = \sqrt{K}$ platí $a_n = n^2 > K$. △

Příklad: Dokažte tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Skutečně, buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pro ilustraci vizte obrázek č. 2.4. △



Obrázek 2.4: Grafické znázornění posloupnosti $a_n = 1/n$ a volby n_0 pro konkrétní ε v definici limity.

Poznámka: Z předchozích tří příkladů by mělo být patrné, že platí

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a > 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Toto tvrzení je snadné[3] ověřit na základě definice stejně jako v předchozích příkladech.

Podle toho, zda existuje limita posloupnosti, rozlišujeme následující dva typy posloupností.

Definice 23: Buď (a_n) posloupnost. Pokud má limitu $\alpha \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

O konvergentní posloupnosti někdy také ze zjevných důvodů říkáme, že má konečnou limitu. Výsledky předchozích příkladů proto můžeme také formulovat takto: posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je konvergentní, libovolná konstantní posloupnost je konvergentní, posloupnost (n) je divergentní.

Shrňme si nejpodstatnější výsledek předchozích odstavců. Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti (a_n) je úspěšné provedení následujících dvou kroků.

1. Uhodni kandidáta na limitu, označme si ho $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

2. Pomocí definice dokaž, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

V další části tohoto textu si ukážeme sofistikovanější nástroje pro výpočet limit. Velmi často je nám hodnota limity (pokud vůbec existuje) neznámá. Typicky je její případná hodnota právě to, co hledáme. Vyvstává proto přirozená otázka: lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti (a_n) pouze na základě znalosti jejích členů? Na tuto otázku zanedlouho kladně odpovíme.

2.3 Vybrané posloupnosti

V předešlé podkapitole jsme si ukázali, jak pomocí definice ověřit, že jisté $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou zadané posloupnosti (a_n). Ne všechny posloupnosti však limitu mají. Pokud máme podezření, že limita zadané posloupnosti neexistuje, můžeme se pokusit její existenci vyvrátit. Jedním ze způsobů jak vyvrátit existenci limity je „vybrat“ ze zadané posloupnosti dvě podposloupnosti s různou limitou. Přesněji tento postup rozebereme v této podkapitolce. Nejprve definujme potřebné pojmy.

Definice 24: Nechť (a_n) je libovolná posloupnost a (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost (a_{k_n}) nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n). Posloupnost (a_{k_n}) nazýváme také **podposloupností** posloupnosti (a_n).

Příklad: Posloupnost (1) je vybraná z $\left((-1)^n\right)$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Posloupnost (1) není vybraná z (n) i přesto, že se člen s hodnotou 1 v posloupnosti (n) vyskytuje. △

Na první pohled může být předešlá definice nejasná. Členy posloupnosti (k_n) pouze udávají indexy členů vybíraných z (a_n). Požadavek aby (k_n) byla rostoucí znamená, že při výběru členů se nesmím vracet k předchozím členům ani nemohu vybrat stejný člen dvakrát. Pro názornost uvádíme obrázek č. 2.5.

[3] Ovšem obecnou mocninu jsme ještě nezavedli. V tento okamžik je toto tvrzení pravdivé pouze pro $a \in \mathbb{Z}$.

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n :	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$
k_n:	2	5	6	9	$\cdots$						
a_{k_n}:	a_2	a_5	a_6	a_9	$\cdots$						

Obrázek 2.5: Vybírání podposloupnosti z posloupnosti (a_n).

Příklad: Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$ Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z (a_n). Ano, stačí volit rostoucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost (2) není vybraná z (a_n). Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale (k_n) není rostoucí (je konstantní s hodnotou 1). $\triangle$

Ihned vyvstává otázka jak spolu souvisí limita posloupnosti a limita její podposloupnosti? Přímo z definice limity nahlédneme platnost následující věty.

Věta 25 (O limitě vybrané posloupnosti)**:** Nechť posloupnost (a_n) má limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá posloupnost vybraná z (a_n) má také limitu α.

Důkaz. Pro (a_n) platí formule (2.1). Buď (k_n) libovolná ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel a $b = (a_{k_n})$ posloupnost vybraná z (a_n). Buď H_α okolí α, limity posloupnosti (a_n). Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha$. Dle předpokladů o posloupnosti (k_n) ale existuje ale i m_0 takové, že $k_{m_0} > n_0$. Je-li tedy $m > m_0$ pak nutně $a_{k_m} \in H_\alpha$. Posloupnost (a_{k_n}) má tedy také limitu α. $\square$

Příklad: Platí $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n! + n^2} = 0$. Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)$ a již víme, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. $\triangle$

Věta 25 nám dává jednoduché a užitečné kritérium pro neexistenci limity posloupnosti. Zformulujeme si ho jako následující důsledek.

Důsledek 26: Lze-li z posloupnosti (a_n) vybrat dvě podposloupnosti s **různými** limitami, pak limita původní posloupnosti (a_n) neexistuje.

Důkaz. Důkaz důsledku je zřejmý. Sporem. Kdyby posloupnost (a_n) měla limitu a šlo z ní vybrat dvě podposloupnosti s různými limitami, pak se ihned dostáváme do sporu s větou o limitě vybrané podposloupnosti. $\square$

Příklad: Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje. Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n - 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Potom obě vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1. \qquad \triangle$$

2.4 Kritéria konvergence posloupností

V této kapitole se budeme zabývat způsoby jak rozhodnout o konvergenci posloupností. Nejprve si ukážeme důležitá kritéria pro existenci konečné limity nevyžadující její *a priorní* znalost. Poté probereme praktické věty pro výpočty limit, tedy věty umožňující nám pomocí znalosti limit jednoduchých posloupností činit závěry o limitách složitějších posloupností.

Připomeňme si z dřívější přednášky axiom úplnosti reálných čísel. Nyní již navíc můžeme podmínku, kladenou na délky intervalů, formulovat pomocí pojmu limity.

Poznámka (Axiom úplnosti)**:** Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\langle a_n, b_n \rangle \supset \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Takovéto x může být očividně nejvýše jedno (rozmyslete!). Předpokládáme-li existenci dvou různých prvků x a y, ležících v průniku, snadno se dostaneme ke sporu.

Dále si zaveďme ještě pojem hromadného bodu, který úzce souvisí s pojmem limity a který budeme v této kapitole potřebovat.

Definice 27: Bod $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti (a_n), právě když v **každém** okolí H_α bodu α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n).

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti? Pokud má posloupnost (a_n) konečnou limitu $\alpha \in \mathbb{R}$ pak je tato i hromadným bodem posloupnosti (a_n). Na rozdíl od limit může mít zadaná posloupnost více hromadných bodů. Např. posloupnost $((-1)^n)$ má hromadné body 1 a -1, ale dokonce ani nemá limitu.

I když má posloupnost právě jeden hromadný bod, její limita nemusí existovat. Ukažme si tento jev na příkladu. Posloupnost (a_n) zadaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}, \end{cases}$$

má hromadný bod 0, ale nemá limitu.

Vztah mezi limitami posloupností, hromadnými body a vybranými posloupnosti popisuje následující věta.

Věta 28: Bod $\alpha \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti (a_n), právě když existuje vybraná posloupnost (a_{k_n}) mající limitu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz. $\Leftarrow$: V každém okolí H_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_{k_n}) a tím pádem i posloupnosti (a_n).

$\Rightarrow$: Uvažme okolí $H_\alpha(1)$, existuje k_1 takové, že $a_{k_1} \in H_\alpha(1)$. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, pak pro okolí $H_\alpha(1/n)$ existuje $k_n > k_{n-1}$ splňující $a_{k_n} \in H_\alpha(1/n)$. Takto zkonstruovaná posloupnost (a_{k_n}) je vybraná z (a_n) a konverguje k α. □

Přistupme nyní k důležité větě nesoucí jméno po Bernardovi Bolzanovi (matematik pocházející z itálie ale studující v Praze, 1781 - 1848) a Karlovi Weierstrassovi (německý matematik, otec moderní matematické analýzy, 1815 - 1897). Její tvrzení není vůbec očividné a jak uvidíme v důkazu, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel.

Věta 29 (Bolzano-Weierstrass)**:** Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

Důkaz. Buď (a_n) omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti (a_n). Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n), označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$.

Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů (a_n) a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do každého z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$. Protože délky intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ konvergují k nule, lze pro libovolné okolí H_x nalézt n dostatečně velké na to, aby celý interval $\langle b_n, c_n \rangle$ patřil do H_x. Proto lze v H_x nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) a x je tedy hromadným bodem (a_n). $\square$

Poznámka: Jinak řečeno, z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Následující větu budeme velmi často využívat. Dává nám totiž **postačující podmínku** pro konvergenci posloupnosti. Pokud ověříme tuto podmínku (v tomto případě monotonii a omezenost posloupnosti) pak je **zaručena** existence její konečné limity. Jak je patrné z důkazu, jedná se o důsledek předchozí Bolzano-Weierstassovi věty.

Věta 30 (O limitě monotonní posloupnosti)**:** Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz. V případě, že je zkoumaná posloupnost (a_n) neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko + pro neomezenost shora, − pro zdola).

Předpokládejme, že (a_n) je neklesající a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty má posloupnost (a_n) hromadný bod, označme ho x. Buď H_x libovolné okolí bodu x. Potom existuje jisté a_{n_0} patřící do H_x. Do tohoto okolí ale musí patřit všechna a_n s $n > n_0$, protože pro ně nutně platí $a_n \le x$. Kdyby totiž a_n přerostlo x, nemohl by x být hromadným bodem (a_n). $\square$

Příklad (Limita posloupnosti harmonických čísel)**:** Zkoumejme limitu posloupnosti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Tato posloupnost je očividně rostoucí (přičítáme kladná čísla). Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \cdots + \frac{1}{2^j+2^j} \ge 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1}(b_{j+1} - b_j) \ge b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost (b_n), a tedy i (a_n), není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

△

Další věta nám dává **nutnou** a **postačující** podmínku pro konvergenci posloupnosti. Tedy podmínku ekvivalentní s definicí. Podstatnou výhodou této podmínky je, že vyžaduje pouze znalost členů zkoumané posloupnosti.

Věta 31 (Bolzano-Cauchy)**:** Posloupnost (a_n) je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$. Nechť má (a_n) limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže pro libovolné $n, m > n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti. □

Důkaz $\Leftarrow$. Nechť (a_n) splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{n_0}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost (a_n) je proto omezená. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti (a_n).

Buď $H_x(\varepsilon/2)$ okolí bodu x. Pro $\varepsilon/2$ existuje n_0 tak, že pokud $m, n > n_0$ pak platí $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Určitě ale existuje $m > n_0$ tak, že $a_m \in H_x(\varepsilon/2)$. Tudíž pro $n > n_0$ je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \leq |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ □

Vraťme se ještě jednou k posloupnosti harmonických čísel. Ukažme, že její limita je nekonečno pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria. Nejprve si opět povšimneme, že zkoumaná posloupnost (b_n), $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, je rostoucí a tedy má limitu. Dokažme, že tato limita nemůže být konečná (tj. nemůže patřit do $\mathbb{R}$) a proto musí být nutně rovna $+\infty$. K tomu použijeme Bolzano-Cauchyova kritéria, chceme ukázat jeho negaci. Tedy

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\exists n, m \in \mathbb{N}\big)\big(n, m > n_0 \text{ a } |b_n - b_m| \geq \varepsilon\big),$$

kde (b_n) je zkoumaná posloupnost. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a buď $n_0 \in \mathbb{N}$ libovolné. Položme $n = 4n_0$ a $m = 2n_0$, potom $n > m > n_0$ a

$$|b_n - b_m| = \sum_{k=2n_0+1}^{4n_0} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4n_0} \cdot 2n_0 = \frac{1}{2}.$$

Což bylo dokázati.

Poznámka (Podílové kritérium)**:** Na tomto místě je vhodné připomenout další postačující podmínku pro konvergenci probíranou na cvičení a to podílové kritérium. Buď (a_n) posloupnost kladných čísel a nechť

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Potom

- pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Příklad: Vypočtěme limitu
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$
Pro limitu podílů platí
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$
Podle podílového kritéria proto původní limita konverguje k nule. △

2.5 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

V předchozí kapitole jsme zavedli rozšířenou reálnou osu, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Nyní mezi prvky $\overline{\mathbb{R}}$ rozšíříme binární operace sčítání a násobení.

Nejprve ale poznamenejme, že přirozeným způsobem na $\overline{\mathbb{R}}$ rozšiřujeme i porovnání (uspořádání). Konkrétně platí
$$\begin{aligned} -\infty < a &\quad \text{pro každé } a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ a < +\infty &\quad \text{pro každé } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \end{aligned}$$
Nyní se věnujme algebraickým operacím.

Definice 32: Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ v závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,
- $a < +\infty$: $\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě že výraz na pravé straně je definován. Klademe $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Nedefinovány zůstávají výrazy
$$\pm\infty - \pm\infty, \quad \pm\infty + \mp\infty, \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0} \quad \text{pro } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Symboly $\pm$ je ve stejném řádku je nutno chápat tak, že vždy horní a dolní znaménko si odpovídá. Přesněji, výraz $\pm\infty - \pm\infty$ je zkratka pro dva výrazy: $+\infty - (+\infty)$ a $-\infty - (-\infty)$, **ne** pro $+\infty - (-\infty)$. Tento posledně uvedený výraz je definován a jeho hodnota je $+\infty$.

Příklad: Platí tedy $+\infty - 2 = +\infty$, $4\cdot(-\infty) = -\infty$, $\frac{2}{+\infty} = 0$ a podobně. Výrazy $\frac{4}{0}$, $+\infty - (+\infty)$, či $0\cdot(+\infty)$ **nejsou** definovány a nelze jim dát dobrý obecný smysl. △

2.6 Věty o limitách

Následující věty nám umožňují „kombinovat“ jednoduché limity do složitějších, jsou tedy velmi praktickým nástrojem pro výpočet limit.

Věta 33: Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Všimněte si, že aby podíl $\frac{a}{b}$ byl definován, musí být $b \neq 0$. Za chvilku uvidíme, že odtud plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $b_n \neq 0$. Má tedy smysl zkoumat limitu posloupnosti (a_n/b_n).

Důkaz této věty je poněkud zdlouhavý, vzhledem k množství kombinací různých situací. Uveďmě aspoň argument pro součet a konečné limity. Ostatní případy lze ošetřit podobně i když například podíl a součin vyžadují složitější argumentaci.

Důkaz pro součet a konečné limity. Předpokládejme, že $a, b \in \mathbb{R}$ potom lze pro $\varepsilon/2$ najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon/2$ a $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Pro tato n pak máme i

$$|a_n + b_n - a - b| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle definice tedy $a_n + b_n \to a + b$. □

Všimněme si, že ve větě se existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$ předpokládá. Opačná tvrzení obecně neplatí, například z existence limity $\lim(a_n + b_n)$ neplyne existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$. Jako příklad můžeme uvést následující volbu posloupností:

$$a_n = (-1)^n \quad \text{a} \quad b_n = (-1)^{n+1}.$$

Protože $a_n + b_n = 0$ platí pro každé n, existuje limita součtu, ale limita původních posloupností neexistuje, jak jsme již ukázali dříve.

Uveďme ještě jeden důležitý důsledek věty 33.

Důsledek 34: Buď $c \in \mathbb{R}$ konstanta a (a_n), (b_n) posloupnosti s limitami v $\overline{\mathbb{R}}$. Potom platí

$$\lim_{n\to+\infty} c\, a_n = c \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Důkaz. V případě prvního tvrzení důsledku stačí využít větu 33 a její tvrzení o součinu s posloupností (a_n) a konstantní posloupností $b_n = c$. K nahlédnutí druhého tvrzení si pak stačí uvědomit, že $a_n - b_n = a_n + (-1) \cdot b_n$ a použít první část důsledku a větu 33 o součtu. □

Příklad: Vypočtěte

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3}$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3}$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}$.

Je potřeba použít předchozí větu, ale před tím je třeba výrazy za limitou vhodně upravit. V prvním příkladě platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 1} = -2.$$

Všimněte si, že předchozí větu jsme použili hned několikrát (podíl limit, výpočet limity čitatele a jmenovatele pomocí součtu/rozdílu limit).

V druhém příkladě podobně máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - n} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - \infty} = 0.$$

A konečně ve třetím

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{+\infty - 0 + 0}{0 - 1} = -\infty.$$

Samozřejmě způsobů jak provést úpravu těchto typů zlomků, tak aby bylo možné použít větu na podíl/součin/součet limit, je více možných. $\triangle$

Další věta nám ukazuje, jak se chová absolutní hodnota vůči limitě.

Věta 35: Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\alpha|, \\ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Dokažme nejprve první část. Pokud $\alpha = \pm\infty$, pak je důkaz přímočarým použitím definice. Uvažme $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|. \tag{2.3}$$

Skutečně, podle trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu platí $|a + b| \leq |a| + |b|$ pro reálná a, b. Položíme-li $a = x - y$ a $b = y$, pak

$$|x| \leq |x - y| + |y| \quad \Longrightarrow \quad |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Záměnnou x za y a y za x pak

$$|y| - |x| \leq |y - x| \quad \Longrightarrow \quad |x| - |y| \geq -|x - y|.$$

Celkem (2.3). Buď $\varepsilon > 0$. Potom dle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé n větší než n_0 je $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Díky výše odvozené nerovnosti pak ale pro tato n platí i $\big||a_n| - |\alpha|\big| < |a_n - \alpha| < \varepsilon$. První část tvrzení je tímto dokázána.

Ekvivalence v druhé části plyne z rovnosti

$$\big||x| - 0\big| = |x - 0|$$

platné pro každé reálné x. $\square$

Příklad: Předchozí věta tedy říká, že můžeme beztrestně zaměňovat pořadí počítání limity a absolutní hodnoty. Například

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}-2\right| = \left|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-2\right)\right| = |-2| = 2. \qquad \triangle$$

Věta 36: Nechť (a_n) je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Důkaz. Uvažme případ $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Podle předpokladů existuje konstanta $c > 0$ tak, že $c < a_n$ pro každé n a $c < \alpha$. Dále si stačí povšimnout, že[4]

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha}| = \frac{|a_n - \alpha|}{a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\alpha + \cdots + a_n\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}} \le \frac{|a_n - \alpha|}{k \cdot c^{k-1}}.$$

Je-li tedy $\varepsilon > 0$ zadáno libovolně, pak lze podle předpokladů nalézet $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon c^{k-1}}{k}$. Potom ale podle nerovnice výše je

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha}| < \varepsilon.$$

Uvažme případ $\alpha = 0$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pro ε^k existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pokud je n větší než n_0 platí $0 \le a_n < \varepsilon^k$. Pro tato n je pak ale i $0 \le \sqrt[k]{a_k} < \varepsilon$. Čili $\left(\sqrt[k]{a_k}\right)$ konverguje k 0.

Případ $\alpha = +\infty$ se vyšetří analogicky. $\square$

Příklad: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n.$$

Všimněte si, že nelze použít větu o limitě součtu. Dostáváme nedefinovaný výraz $+\infty - (+\infty)$. Skutečně, protože $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 + 2n + 5 = +\infty$ pak podle předchozí věty platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} = +\infty$. K výpočtu naší limity použijeme úpravu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 5} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n}} + 1} = 1.$$

Zde jsme v poslední kroku využili předchozí věty. Konkrétně

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n}\right)} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1. \qquad \triangle$$

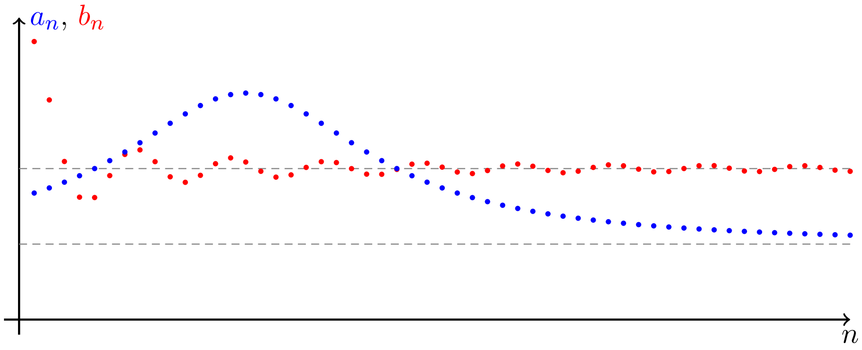
2.7 Nerovnosti a limity

Z nerovnosti mezi limitami lze odvodit nerovnost mezi členy posloupnosti a naopak z nerovnosti mezi členy posloupnosti lze odvodit nerovnost mezi jejich limitami. Hlavním výsledkem této podkapitolky je věta o sevřené posloupnosti, kterou s výhodou využíváme, pokud není možné využít věty o součtu, součinu, či podílu limit.

Věta 37: Nechť reálné posloupnosti (a_n) a (b_n) mají limity v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud

$$\lim a_n < \lim b_n$$

potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ platí $a_n < b_n$.



Obrázek 2.6: Ilustrace k větě 37

Důkaz. Označme $\alpha = \lim a_n$ a $\beta = \lim b_n$, platí $\alpha < \beta$. Předpokládejme, že α i β jsou konečná. Potom pro $\varepsilon := \frac{\beta-\alpha}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro pro $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha(\varepsilon)$ a $b_n \in H_\beta(\varepsilon)$. Protože jsou tato okolí disjunktní platí jistě navíc pro tato n nerovnost $a_n < b_n$.

Podobným způsobem snadno ověříme i případ kdy jsou α či β nekonečná. □

Příklad: Jako příklad uvažme $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ a $b_n = 1 + \frac{2}{n}$. Jejich limity jsou $\lim a_n = 2$ a $\lim b_n = 1$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n > n_0$ přirozené platí $a_n > b_n$. V našem případě lze za n_0 volit číslo 4. △

Důsledek 38: Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\lim a_n > \lim b_n$. Potom podle předchozí věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > b_n$. To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností (a_n) a (b_n). □

Všimněte si, že neostrost nerovnosti je zde důležitá. Například, pro $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$ platí ostrá nerovnost $a_n > b_n$ pro každé přirozené n, ale $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Nyní se dostáváme k velmi důležité větě, kterou často použijeme. Její myšlenka spočívá v tom, že dokážeme-li „dobře vystihnout“ chování dané posloupnosti pomocí posloupností se známými shodnými limitami, pak známe i limitu zkoumané posloupnosti.

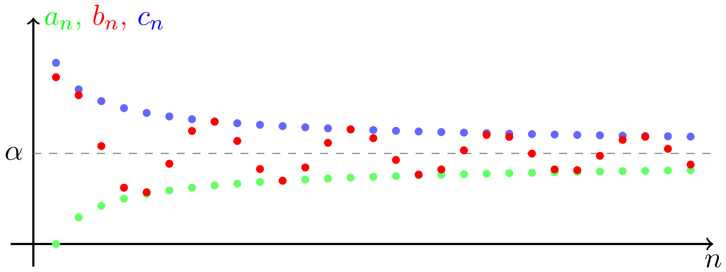
Věta 39 (O sevřené posloupnosti)**:** Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou reálné posloupnosti pro které platí

1. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0)(a_n \leq b_n \leq c_n)$
2. posloupnosti (a_n) a (c_n) mají stejnou limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Potom existuje limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim b_n = \alpha$.

Důkaz. Buď H_α okolí bodu α. Existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > m_0$ patří jak a_n tak c_n do H_α. Pro $n > \max\{n_0, m_0\}$ do tohoto okolí musí patřit i b_n, protože $a_n \leq b_n \leq c_n$. Proto má posloupnost (b_n) limitu rovnou α. □

[4]Dokázáno na cvičení.



Obrázek 2.7: Ilustrace k větě 39.

Příklad: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$. Funkce sin má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1\rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé}\, x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ je podle předchozí věty

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0. \qquad \triangle$$

Příklad: Pokud zkoumáme posloupnost o které máme podezření, že její limitou je $+\infty$, pak nám stačí udělat odhad pouze z jedné strany, zespoda. Skutečně. Uvažme například posloupnost

$$a_n = (2 + (-1)^n)n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vzhledem ke kladnosti a omezenosti závorky očekáváme, že limitou bude $+\infty$. Nelze ale použít větu o limitě součinu, protože limita závorky neexistuje. Každý člen posloupnosti ale můžeme odhadnout zespoda takto,

$$a_n = (2 + (-1)^n)n \geq (2 - 1)n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti (n) víme, že její limitou je $+\infty$. Odtud ihned plyne (prakticky hned z definice), že limitou naší posloupnosti je také $+\infty$. $\triangle$

2.8 Úvod do Landauovy symboliky

K vyjádření rychlosti růstu posloupnosti, či porovnání rychlosti růstu dvou posloupností, se často využívá Landauova[5]symbolika (též známá pod označením $\mathcal{O}$-notace).

Definice 40: Nechť (a_n) a (b_n) jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, když existuje posloupnost (α_n) taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé}\, n \in \mathbb{N}.$$

[5]Edmund Landau, německý matematik, 1877 – 1938.

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna}\, n \geq n_0.$$

Jestliže $a_n \sim b_n$, pak se pro velká n obě posloupnosti „chovají stejně“, jsou tzv. asymptoticky ekvivalentní.

Příklad: Ověřte, že $\sim$ je relací ekvivalence na množině všech posloupností. △

Tvrzení $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ naopak říká, že (a_n) neroste rychleji než (b_n) pro velká n. Je tedy značně hrubší než $\sim$.

Pokud $b_n > 0$ pak lze definici uvedenou výše přeformulovat do následujícího tvaru

$$a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$
$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{posloupnost} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ je omezená.}$$

Příklad: Například platí

$$\begin{aligned} n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\ 2n &= \mathcal{O}(n^2), \\ n &= \mathcal{O}(n^2), \\ 4n^2 &= \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

△

Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se. Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.

2.9 Příklady

V této podkapitole vypočteme několik základních limit, které se často hodí znát při výpočtech. V předešlé části textu jsme totiž odvodili několik vět, které však v podstatě nelze použít, neznáme-li limity aspoň některých jednoduchých posloupností.

Připomeňme, že hned po zavedení pojmu limity posloupnosti jsme si prakticky odvodili nejelementárnější limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Přistupme nyní k dalším příkladům.

Příklad: Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí
$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$
Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme
$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$
Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. △

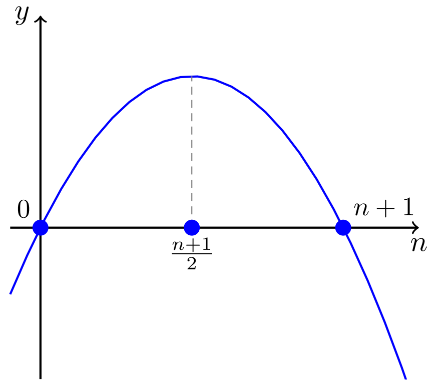
Příklad: Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- Případ $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$
V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

- Případ $0 < a < 1$: Z předchozí bodu plyne $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, tudíž
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$
△

Příklad: Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$
Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém“ pořadí:
$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \\ &= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdots (n \cdot 1) = \\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$
Z grafu paraboly $f(x) = x(n+1-x)$ je zřejmé (vizte obrázek č. 2.8), že
$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n$$
a proto $(n!)^2 \geq n^n$. Konečně, $2n$-tá odmocnina dává
$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$
△

Příklad (!!!): Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti (a^n) platí:
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$



Obrázek 2.8: Ilustrace k výpočtu příkladu výpočtu limity posloupnosti $\sqrt[n]{n!}$.

- Jednoduché případy: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $((-1)^n)$ neexistuje.
- Nechť $0 < |a| < 1$. Platí
$$|a^{n+1}| = |a^n| \cdot |a| < |a^n|.$$
Posloupnost $\left(|a^n|\right)$ je tedy klesající a omezená, $0 < |a^n| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim_{n\to\infty} |a^n|$.
Posloupnost $\left(|a^{n+1}|\right)$ je vybraná z $\left(|a^n|\right)$ a proto mají stejnou limitu. Konečně
$$L = \lim_{n\to\infty} |a^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot |a^n| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} |a^n| = |a| \cdot L.$$
Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.
- Případ $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že (a^n) je rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim_{n\to\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí
$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot L.$$
Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$.
- Případ $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $(a^{2n}) = \left((a^2)^n\right)$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.
Limitu vybrané posloupnosti (a^{2n+1}) snadno spočteme
$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$
Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim_{n\to\infty} a^n$, tedy neexistuje. △

Shrňme si doposud odvozené limity v tabulce č. 2.1.

posloupnost	limita
(n^a)	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$(\sqrt[n]{n})$	1
$(\sqrt[n]{a})$ pro $a > 0$	1
$(\sqrt[n]{n!})$	$+\infty$
(a^n)	$\begin{cases} 0, & \lvert a\rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$

Tabulka 2.1: Známé posloupnosti a jejich limity.

2.10 Rekurentně zadané posloupnosti

Doposud jsme se v příkladech setkávali pouze s explicitně zadanými posloupnostmi, tj. pro dané n bylo a_n explicitně dáno pomocí vzorce obsahujícího pouze n. Pokud je n-tý člen posloupnosti zadán pomocí předcházejících členů, nazýváme danou posloupnost **rekurentní**. Rekurentní posloupnost nemusí být možné převést na explicitně zadanou. Na rekurentní posloupnosti narazíme velmi často, např. Newtonova metoda, o které budeme mluvit později, nám dává rekurentní posloupnost aproximující řešení rovnic tvaru $f(x) = 0$.

Příklad (Fibbonacci)**:** Jednou z nejznámějších rekurentně zadaných posloupností je Fibbonacciho posloupnost $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná předpisem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots, \quad F_1 = F_2 = 1. \qquad \triangle$$

Příklad: Uvažme posloupnost (a_n) definovanou předpisem

$$a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \text{ pro } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Nejprve si všimněme, že kdyby limita posloupnosti existovala (označme ji a), pak z definičního vztahu plyne

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 2} = \sqrt{a + 2}.$$

Tento vztah je v $\overline{\mathbb{R}}_+$ splněn buď pro $a = 2$ nebo $a = +\infty$. První možnost by nastala v případě omezenosti, druhá v případě neomezenosti, posloupnosti (a_n).

Pokusme se nejprve ukázat, že (a_n) je monotónní. Zřejmě $a_n > 0$, $n \geq 1$, a tedy

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad &\Longleftrightarrow \quad a_n^2 < a_n + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < (2 - a_n)(a_n + 1) \\ &\Longleftrightarrow \quad a_n < 2. \end{aligned}$$

Posloupnost roste, právě když $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tuto nerovnost můžeme dokázat matematickou indukcí:

1. Pro $n = 1$: $a_n = 1 < 2$ platí z definice.

2. Předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, platí $a_n < 2$: Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \overset{\text{I.P.}}{<} \sqrt{2+2} = 2.$$

Ukázali jsme, že posloupnost (a_n) je rostoucí a shora omezená. Má tedy konečnou limitu, která je nutně rovna číslu 2. △

Studiem rekurentních posloupností se podrobněji zabývá předmět BI-ZDM. Pro některé typy rekurentních posloupností (např. lineárních s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou) existují algoritmy na jejich řešení (tj. postupy pro získání jejich explicitního vyjádření). My se s rekurentní posloupností setkáme při studiu Newtonovy metody a zkoumání složitostí algoritmů v kapitole 9.2.

2.11 Číselné řady

V této části se budeme zabývat speciálním typem číselných posloupností, číselnými řadami. Řady vznikají postupným sčítáním členů zadané posloupnosti. Začněme nejprve definicí.

Definice 41: Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots,$$

kde $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je zadaná číselná posloupnost, nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě. Součtem konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Konvergence řady se zachová, změníme-li konečný počet členů řady. Speciálně konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je ekvivalentní konvergenci řady $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ pro libovolně zvolené $n_0 \in \mathbb{N}$.

Poznámka: Je důležité rozlišovat mezi pojmy „posloupnost" a „řada". Častou chybou je vzájemné pletení a nepochopení těchto pojmů. Například posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = n^2$ je dobré si představovat jako sérii po sobě jdoucích čísel

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro stejnou posloupnost (a_n) jako sérii po sobě jdoucích čísel

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots$$

Příklad: Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{2.4}$$

konverguje. Skutečně, členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{2.5}$$

Takže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. V závislosti na q proto součet můžeme vyjádřit následovně

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Poznamenejme, že z rovnice (2.5) také plyne divergence řady (2.4) pro $q > 1$ nebo $q \leq -1$. Pokud $q = 1$, pak lze také snadno ověřit, že diverguje. △

O některých řadách můžeme rovnou rozhodnout, že divergují, aniž bychom složitě zkoumali jejich částečné součty. Máme totiž k dispozici následující větu.

Věta 42 (Nutná podmínka konvergence)**:** Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, potom pro limitu sčítanců platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz. Označme $S \in \mathbb{R}$ součet naší konvergentní řady a (s_n) posloupnost jejích částečných součtů. Pro libovolné kladné celé n platí

$$0 \leq |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ dostáváme z věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Příklad: Předchozí větu používáme k vyvrácení konvergence. Věta vlastně říká, že pokud posloupnost sčítanců nekonverguje k nule (nebo vůbec nemá limitu), pak příslušná řada diverguje. Například o řadách

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k+3},$$

můžeme ihned tvrdit, že divergují, protože (popořadě)

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} (-1)^k \text{ neexistuje}, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+3} = 1.$$ △

Podmínka v předchozí větě je pouze nutná. Pokud sčítanci konvergují k nule, tak stále nemůžeme tvrdit, že řada konverguje. To nám ukazuje následující příklad.

Příklad: Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, pro $k = 1, 2, \ldots$ Víme již, že platí

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty (s_n) platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Zkoumaná řada diverguje. △

K odvození dalších kritérií pro testování konvergence řad budeme opět potřebovat Bolzanovo-Cauchyovo kritérium.

Věta 43 (Bolzano-Cauchy)**:** Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Důkaz. Jedná se pouze o použití Bolzanova-Cauchyova kritéria konvergence na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů. □

Všimněte si, že má-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nezáporné členy, pak je posloupnost jejích částečných součtů monotónní. Víme tedy, že tato řada buď konverguje, nebo je limita jejích částečných součtu rovna $+\infty$. Máme-li řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s členy různých znamének, pak je přirozené ptát se, v jakém vztahu je její konvergence vzhledem k řadě $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, která má už nezáporné členy.

Definice 44: Číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta 45: Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Důkaz. Použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéra pro konvergenci řady. Buď $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konvergentní řada. Potom pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tedy konverguje. □

Poznamenejme, že řady které jsou konvergentní, ale nejsou absolutně konvergentní, jsou citlivé na změnu pořadí sčítání členů. Jinak řečeno, u absolutně konvergentní řady nezáleží na pořadí, v jakém členy sčítáme, výsledek bude vždy stejný. Tak tomu ale není u řad které konvergují neabsolutně.

Věta 46 (Leibniz[6])**:** Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost s nezápornými členy konvergující k nule. Potom je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergentní.

Důkaz. Důkaz Leibnizova kritéria vynecháváme. Plyne z Dirichletova kritéria, které jsme si ani nevyslovili, natož dokázali. □

Příklad: Příkladem konvergentní řady, která ale není absolutně konvergentní je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Skutečně, tato řada konverguje podle Leibnizova kritéria, protože posloupnost $(1/k)$ má kladné členy a monotónně konverguje k nule. Řada z absolutních hodnot členů je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ o které již víme, že diverguje. △

Kritéria, která dále vyslovíme, jsou prakticky použitelná k ověřování absolutní konvergence řad. Začněme nejprve srovnávacím kritériem.

[6] Gottfried Leibniz, německý matematik, 1646 – 1716.

Věta 47 (Srovnávací kritérium)**:** Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí odhad $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

Důkaz. Opět použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu věty 45. Tvrzení opět plyne z odhadu založeném na trojúhelníkové nerovnosti,

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots b_{n+p}. \qquad \square$$

Již víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $|q| < 1$. Tohoto faktu s výhodou využijeme v důkazu následující věty.

Věta 48 (d'Alembertovo[7] kritérium)**:** Buďte $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro všechna $k \in \mathbb{N}$ od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Důkaz. Nechť tedy pro každé $k \geq k_0$ platí odhad $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$. Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Už ale víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $|q| < 1$. Podle srovnávacího kritéria tedy konverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. $\square$

Poznámka: K splnění podmínky d'Alembertova kritéria například stačí, když

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q < 1.$$

Dále poznamenejme, že pokud všechna a_k jsou kladná a

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q > 1 \tag{2.6}$$

pro $k \geq k_0$, potom řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence. Skutečně, podle podílového kritéria pro posloupnosti pak totiž platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$. K splnění podmínky (2.6) stačí, aby

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

Poznamenejme, že d'Alembertovo kritérium zdaleka není všemocné. Například o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ víme, že diverguje. Ovšem pro limitu podílů platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1.$$

D'Alembertovo kritérium tedy o konvergenci, resp. divergenci, této konkrétní řady **nerozhodne**. Existují další kritéria pro vyšetřování konvergence číselných řad (Cauchyovo, Gaussovo, a další). V další části přednášky odvodíme ještě integrální kritérium.

Přistupme nyní k první zajímavé aplikaci číselných řad. Pomocí číselné řady můžeme dát přirozený význam nekonečnému desetinnému číselnému rozvoji.

[7] Jean d'Alembert, francouzský matematik, 1717 – 1783.

Příklad (Desetinný rozvoj)**:** Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo. Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

a řada $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje. △

2.12 Eulerovo číslo

Eulerovo[8] číslo je jedna z nejdůležitějších matematických konstant. V této kapitole budeme Eulerovo číslo nejprve definovat jako součet jisté číselné řady a poté se budeme věnovat dalším způsobům jeho výpočtu a vlastnostem.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Jedná se o řadu nezáporných členů pro jejichž podíly platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada konverguje.

Poznámka: Konvergenci této řady můžeme ukázat i přímo (z definice). Posloupnost jejích částečných součtů[9]

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

je monotónní a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Tímto postupem získáváme i horní odhad hodnoty její limity. Součet zkoumané řady tedy leží mezi čísly 1 a 3.

Definice 49 (Eulerovo číslo)**:** Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

konverguje, její součet značíme e a nazýváme **Eulerovým číslem**.

[8] Leonhard Euler, švýcarský matematik, 1707 – 1783.

[9] Do konce této podkapitoly bude symbol s_n vyhrazen pro tento součet.

Při výpočtech limit často narazíme na potřebu vypočíst limitu posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.7}$$

Všimněte si, že na ní nelze použít žádnou z dosud probíraných vět na výpočet limity. Nejedná se o součin/podíl/odmocninu z žádných známých limit.

Lemma 50: Posloupnost (a_n) konverguje a její limita je e. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Poznámka (Častá chyba)**:** Pozor, ačkoliv v limitě

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2.8}$$

výraz v závorce konverguje k 1, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, a konstantní posloupnost $1^n = 1$ konverguje k 1, **není limita** (2.8) **rovna** 1!

Důkaz. Pomocí binomické věty a úpravou kombinačních čísel upravíme[10] výraz pro a_n,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Odtud ihned plyne odhad $a_n < s_n < 3$. Dále lze výraz výše odhadnout následovně

$$a_n < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) = a_{n+1}.$$

Při odhadu jsme zvětšili každý výraz v závorce a přidali jeden kladný člen. Posloupnost (a_n) je tedy monotónní a omezená. Označme její limitu a.

Pro $m > n$ máme odhad

$$a_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right)$$

Odtud limitním přechodem $m \to \infty$ dostáváme nerovnost

$$a \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Uzavíráme, že pro každé n platí nerovnost

$$a_n < s_n \leq a.$$

Podle věty o limitě sevřené posloupnosti získáváme kýženou rovnost $a = e$. Tím je důkaz lemmatu dokončen. $\square$

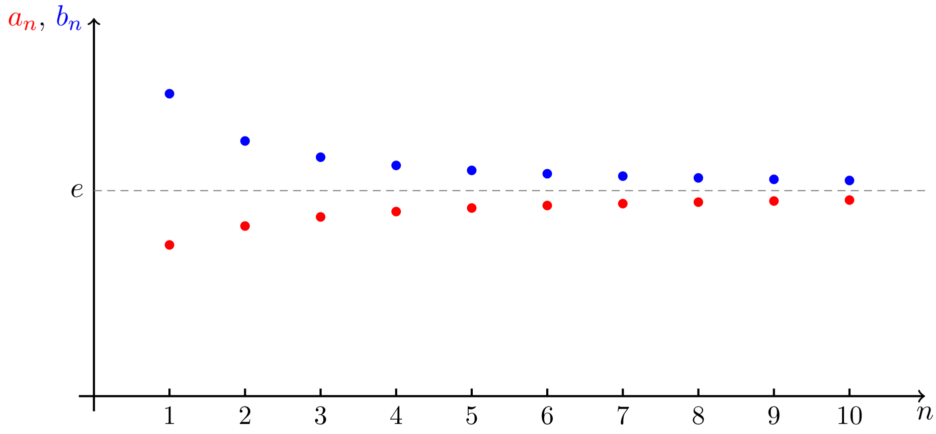
[10] Pro $m < n$ se standardně klade

$$\prod_{k=n}^{m} \alpha_k = 1.$$

Uvažme dále posloupnost
$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{2.9}$$
Protože platí rovnost
$$b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
je limita posloupnosti (b_n) také rovna e. Ukážme, že posloupnost (b_n) je klesající. Pro každé n by tedy mělo platit
$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n. \tag{2.10}$$
Po vynásobení kladným číslem $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$ je tato nerovnost ekvivalentní
$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \left(\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}\right)^{n+1}.$$
Upravíme pravou stranu této nerovnosti:
$$\begin{aligned}\left(\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{(n+2)n}\right)^{n+1} = \\ &= 1 + \frac{n+1}{(n+2)n} + \text{další členy binomické formule.}\end{aligned}$$
Ukážeme-li
$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < 1 + \frac{n+1}{(n+2)n}$$
budeme hotovi. Protože $\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$, dostáváme nerovnost
$$\frac{1}{n+1} < \frac{n+1}{(n+2)n},$$
což je ekvivalentní
$$n(n+2) < (n+1)^2.$$
To však zřejmě platí, čímž je nerovnost (2.10) dokázána a (b_n) je tedy klesající.

Z vlastností posloupností (a_n) a (b_n) je zřejmé, že nerovnosti
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$
platí pro každé kladné přirozené n. Jinak řečeno $e \in (a_n, b_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tato vlastnost nám umožňuje získat přibližnou hodnotu čísla e a **znát chybu**, které se dopustíme nahradíme-li e hodnotou některého členu a_n, či b_n pro konkrétní n. Grafické znázornění a tabulku hodnot prvních několika členů naleznete na obrázku č. 2.9 a v tabulce č. 2.2.

Poznámka (Rychlost konvergence (a_n) a (b_n) k e)**:** Pro délku intervalu (a_n, b_n) platí
$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) \cdot b_n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot b_n > \\ &> \frac{e}{n+1} > \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$
Tedy ani po výpočtu a_{1000} a b_{1000} neznáme cifru na **třetím** místě za desetinnou čárkou v Eulerově čísle e.



Obrázek 2.9: Posloupnosti (a_n) a (b_n) z rovnic (2.7) a (2.9).

n	a_n	b_n
1	2.0000000	4.0000000
2	2.2500000	3.3750000
3	2.3703704	3.1604938
4	2.4414062	3.0517578
5	2.4883200	2.9859840
6	2.5216264	2.9418974
7	2.5464997	2.9102854
8	2.5657845	2.8865076
9	2.5811748	2.8679720
10	2.5937425	2.8531167

Tabulka 2.2: Členy posloupností (a_n) a (b_n) s přesností na osm cifer. Vidíme, že posloupnosti nekonvergují k e příliš rychle ($e \approx 2.7182818$).

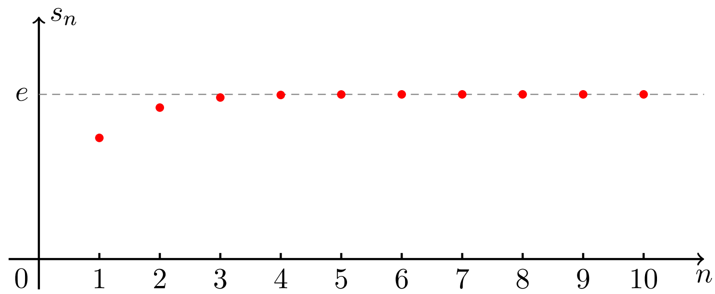
Lemma 51 (Odhad chyby při výpočtu e pomocí řady)**:** Pro rozdíl e od s_n (definice pomocí řady) platí

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Důkaz. Pro $n \geq 1$ platí odhad

$$e - s_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!} \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^{k-1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pro $k \geq 2$ je totiž $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. □



Obrázek 2.10: Grafické znázornění posloupnosti (s_n).

n	s_n
1	2.0000000
2	2.5000000
3	2.6666667
4	2.7083333
5	2.7166667
6	2.7180556
7	2.7182540
8	2.7182788
9	2.7182815
10	2.7182818

Tabulka 2.3: Prvních deset členů posloupnosti s_n. Výpočet je proveden s přesností na 8 cifer.

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$. Protože

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{d_n:=}\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

a posloupnost (d_n) je vybraná z posloupnosti (a_n) která konverguje k e, platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{d_n} = \sqrt{e}. \qquad \triangle$$

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Nejprve upravme výraz

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Posloupnost v jmenovateli prvního zlomku je opět vybraná z (a_n) a tudíž

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\cdot 1 = e^{-1}. \qquad \triangle$$

Příklad: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$. Výraz upravíme následovně,

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}})\right)^{\frac{n}{3}}}_{d_n:=}\Bigg)^3.$$

Posloupnost (d_n) **není** vybraná za naší (a_n). Úplně stejně jako o (a_n) však můžeme i o (d_n) ukázat, že je rostoucí. Tudíž má limitu. Ovšem nyní (a_n) je vybraná z (d_n), $d_{3n} = a_n$. Takže limita (d_n) je e. Uzavíráme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3. \qquad \triangle$$

Poznámka: Z předchozích příkladů by mělo být zřejmé, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}},$$

pro $p\in\mathbb{Z}$ a $q\in\mathbb{N}$, $q\geq 1$.

2.13 Obecná mocnina a exponenciální funkce

V této kapitolce ukážeme jak, pomocí limit posloupností definovat obecnou mocninu. Definice nám přímo dává návod, jak hodnotu obecné mocniny počítat.

Připomeňme, že pro $a\in\mathbb{R}$ a kladné $n\in\mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Při této definici platí

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{a} \quad (a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

pro kladná $n,m\in\mathbb{N}$.

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

1. Klademe $a^0 := 1$.
2. Pro $n\in\mathbb{Z}$, $n\leq -1$ a $a\neq 0$, definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$.
3. Je-li $q\in\mathbb{N}$ a $a>0$ položíme $a^{\frac{1}{q}} := b$, kde $b^q = a$, $b>0$ (takové b existuje zřejmě právě jedno).
4. Konečně, pro $p\in\mathbb{Z}$, kladné $q\in\mathbb{N}$ a $a>0$ klademe

$$a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Stále platí pravidla $a^{r+s} = a^r\cdot a^s$ a $(a^r)^s = a^{rs}$ pro $a>0$, $r,s\in\mathbb{Q}$. Zbývá ukázat, jak definovat a^x pro iracionální x.

Lemma 52: Pro dané iracionální x existují posloupnosti (α_n) a (β_n) takové, že $\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{Q}$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, (α_n) je rostoucí, (β_n) je klesající a obě mají limitu x.

Důkaz. Posloupnosti požadovaných vlastností zřejmě zkonstruujeme jako kraje smršťujících se uzavřených intervalů obsahujících x. Vizte diskuzi o axiomu úplnosti. □

Definice 53: Pro iracionální x a $a > 0$ položíme

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n},$$

kde (α_n) a (β_n) jsou posloupnosti z předchozího Lemmatu.

Poznámka (Korektnost definice)**:** Všimněte si, že pro racionální r a s splňující $r < s$ a kladné $a > 1$ platí

$$a^r \leq a^s.$$

Odtud plyne, že (a^{α_n}) je rostoucí, (a^{β_n}) je klesající a platí $a^{\alpha_n} \leq a^{\beta_n}$ pro každé n. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existují konečné limity

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} \leq \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n}.$$

Dále lze ukázat, že tyto limity jsou shodné a nezávisí na volbě posloupností (α_n), (β_n). Případ $a < 1$ se ověří podobně.

Poznámka: Pro $a > 0$ je funkce $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f_a(x) := a^x$ s $D_{f_a} = \mathbb{R}$

- rostoucí pokud $a > 1$,
- klesající pokud $0 < a < 1$,
- konstantní pokud $a = 1$.

Vyjma posledního případu je $H_f = (0, +\infty)$. Stále platí $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ a $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$.

Věta 54: Nechť posloupnost (b_n) konverguje k $b \in \mathbb{R}$ a nechť $a > 0$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = a^b.$$

Nechť posloupnost kladných čísel (a_n) konverguje k $a \in \mathbb{R}^+$ a $b \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^b = a^b.$$

Důkaz. K důkazu staří použít definici obecné mocniny. Vzhledem k technické náročnosti tento důkaz vynecháváme. □

Příklad: Například platí

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{3+\frac{1}{n}} = 2^3,$$

nebo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^\pi = 2^\pi. \qquad \triangle$$

Definice 55: Buď $0 < a \neq 1$, pak inverzní funkci k funkci f_a nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$. Platí

- $D_{\log_a} = (0, +\infty)$, $H_{\log_a} = \mathbb{R}$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $x, y > 0$,
- $\log_a\left(x^y\right) = y \log_a(x)$, $x > 0$ a $y \in \mathbb{R}$.

Věta 56: Pro $a > 0$, $a \neq 1$ a posloupnost (b_n) kladných čísel konvergující k $b \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\lim_{n\to+\infty} \log_a b_n = \log_a b.$$

Důkaz. Jedná se o důsledek věty č. 54, jejíž důkaz jsme však vynechali. Podobně vynecháváme i důkaz tohoto tvrzení. □

Příklad: Například platí

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right) = \ln \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3} = \ln\frac{1}{2}.$$ △

Definice 57: Funkci $x \mapsto e^x$ nazýváme **exponenciální funkcí**, logaritmus o základu e nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme $\ln = \log_e$.

Poznámka: Exponenciální funkce a přirozený logaritmus jsou jedny z nejdůležitějších funkcí vůbec. Všimněte si, že přímo z jejich definice plyne pro $a > 0$ důležitý vztah $a = e^{\ln a}$ a proto

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Věta 58: Je-li (a_n) posloupnost splňující $\lim |a_n| = +\infty$, pak

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Důsledek 59: Pro reálné $x \in \mathbb{R}$ platí $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Důkaz. Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Pokud $x \neq 0$, pak

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x,$$

protože $\lim \left|\frac{n}{x}\right| = +\infty$. □

Rejstřík