Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 1

Rozjezd

Sumační zápis, manipulace se sumami, důkaz matematickou indukcí, aritmetická a geometrická posloupnost, Pascalův trojúhelník, kombinační čísla.

Značení
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ .... přirozená čísla
$\mathbb{Z}$ .... celá čísla
$\mathbb{R}$ .... reálná čísla

Věnujme se nyní nejprve zkrácenému zápisu součtů a součinů. Mějme $n \in \mathbb{N}$, čísel, označme je a_1, a_2, $a_3, \ldots$, a_n. Součet (neboli **sumu**) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ zkráceně zapisujeme

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

kde i je tzv. **sčítací index**, který není pevný, ale narůstá po jedničce od **dolní meze** (v našem případě 1) až po **horní mez** (v našem případě n). Podobně lze zkráceně zapsat součin

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n =: \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Stejný součet lze zapsat mnoha různými způsoby, například platí (zdůvodněte!)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=3}^{n+2} a_{j-2}.$$

Příklad 1.1: Zapište součet zkráceně pomocí sumy

a) $-8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 0 + 1 + 2 + 3$,
b) $6 + 9 + 12 + 15 + 18 + \cdots + 72$,
c) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$,
d) $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64$,
e) $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16$.

Řešení. Uvádíme pouze jeden z možných zápisů.

$$\text{a) } \sum_{i=-8}^{3} i, \quad \text{b) } \sum_{i=2}^{24} 3i, \quad \text{c) } \sum_{i=1}^{8} i^2, \quad \text{d) } \sum_{i=1}^{8} (-1)^{i+1} i^2, \quad \text{e) } \sum_{i=-1}^{4} 2^i = \sum_{i=1}^{6} 2^{i-2}.$$

Příklad 1.2: Zapište součet c) příkladu 1.1 ve tvaru $\sum_{i=5}^{?} ?$.

Řešení. Opět uvádíme pouze výsledek.

$$\sum_{i=5}^{12} (i-4)^2.$$

Díky komutativnímu, asociativímu a distributivnímu zákonu platí

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha\, a_i = \alpha\, a_1 + \alpha\, a_2 + \ldots + \alpha\, a_n = \alpha(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.2}$$

Pro tyto vztahy je podstatné, že meze sčítacích indexů jsou shodné.

Nyní už umíme součet zkráceně zapsat. Často je snahou najít pro zadaný součet explicitní výsledek. Snad nejjednodušším součtem je součet konstantních členů, tj. je-li $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c \in \mathbb{R}$, pak triviálně platí

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n\text{-krát}} = n\, c.$$

Zaveďme nyní pojem aritmetické posloupnosti. Nekonečnou posloupnost čísel a_1, a_2, $a_3, \ldots$, kde druhý a každý další člen se získá přičtením konstanty (označme ji d) ke členu předchozímu, se nazývá **aritmetická posloupnost**. Platí tedy $a_{i+1} = a_i + d,\ i = 1, 2, 3, \ldots$.

Příklad 1.3: Sečtěte prvních n členů aritmetické posloupnosti 1, 2, 3, … (tj. $a_1 = 1$, $d = 1$).

Řešení.

$$S_n := 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

Sčítáme-li stejná čísla v opačném pořadí pak zjevně platí

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)$$

a proto podle (1.1)

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) = \sum_{i=1}^{n} (n+1) = n(n+1),$$

z čehož plyne

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.3}$$

Příklad 1.4: S pomocí výsledku předchozího příkladu sečtěte prvních n členů aritmetické posloupnosti s koeficienty a_1 a d.

Řešení.

$$s_n := a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+(n-1)d) = \sum_{i=1}^{n}(a_1+(i-1)d) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_1 + d\sum_{i=1}^{n}(i-1) = n\,a_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2} = n\frac{a_1+(a_1+(n-1)d)}{2} = n\frac{a_1+a_n}{2}.$$

Součet aritmetické posloupnosti je tedy dán násobkem počtu členů s průměrnou hodnotou prvního a posledního členu. Vzoreček najde uplatnění v karbanu, chceme-li rychle sečíst hodnotu postupky!

Příklad 1.5: Sečtěte

$$\text{a)}\ \sum_{i=1}^{30}(2i-1), \quad \text{b)}\ \sum_{k=-2}^{5}(4k+1) \quad \text{c)}\ \sum_{i=5}^{11}2i + \sum_{i=5}^{10}(1-2i).$$

a) 900, b) 56, c) 28.

Zaveďme pojem geometrické posloupnosti. Nekonečnou posloupnost čísel a_1, a_2, $a_3, \ldots$, kde druhý a každý další člen se získá násobením předchozího členu konstantou (tzv. **kvocientem**, označme jej zde q), se nazývá **geometrická posloupnost**. Platí tedy $a_{i+1} = a_i q$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Příklad 1.6: Sečtěte prvních n členů geometrické posloupnosti.

Řešení. V rámci řešení procvičíme i manipulaci se sumami.

$$S_n := a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_1q^{i-1} = a_1\sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = a_1\sum_{i=0}^{n-1} q^i =$$
$$= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n - a_1q^n =$$
$$= a_1 + q(a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}) - a_1q^n = a_1 + q\,S_n - a_1q^n$$

a tedy

$$a_1q^n - a_1 = q\,S_n - S_n$$

čili pro $q \neq 1$

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Jaký je výsledek pro $q = 1$?

Příklad 1.7: Sečtěte $\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\,3^{i+2}\right)$.

Řešení.

$$\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\,3^{i+2}\right) = -\frac{1}{2}\,3^2\sum_{i=0}^{n}3^i = -\frac{1}{2}\,3^2\frac{3^{n+1}-1}{3-1}.$$

Příklad 1.8: Sečtěte

$$\text{a)}\ \sum_{j=1}^{n}3^{-j}, \quad \text{b)}\ \sum_{i=-1}^{4}2^{i-1}, \quad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{6}(-1)^k 2^{k+1}, \quad \text{d)}\ \sum_{\ell=0}^{n}q^\ell,\ \text{kde } q \neq 1.$$

a) $\frac{3^{-n}}{2}(3^n-1)$ b) $\frac{63}{4}$ c) 84, d) $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Příklad 1.9: Tenisového turnaje hraného obvyklým způsobem se zúčastnilo 2^n, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, hráčů. Kolik utkání se odehrálo?

Řešení. Jelikož v každém utkání vypadne právě jeden hráč a neporažen zůstane jen absolutní vítěz, odehrálo se $2^n - 1$ utkání.

Úlohu můžeme řešit i hrubou silou. V prvním kole se hrálo $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ utkání, v druhém potom $\frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$, atd. Poslední n-té kolo tvořilo pouze $1 = 2^0$ (finálové) utkání. Celkový počet utkání je tedy dán součtem prvních n členů geometrické řady s kvocientem 2 a prvním členem $a_1 = 1$, tj.

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Připomeňme princip **důkazu matematickou indukcí**. Chceme ukázat platnost výroku $A(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To lze provést ve dvou krocích. V prvním dokážeme platnost $A(1)$ a v druhém ukážeme, že pravdivost $A(n)$ implikuje pravdivost $A(n+1)$.

Příklad 1.10: Dokažte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, pro $n \in \mathbb{N}\{0\}$, matematickou indukcí.

Řešení. Dva kroky matematické indukce:

1. krok Pro $n = 1$ zjevně platí

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1.$$

2. krok Předpokládejme platnost formule pro n. Potom

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Připomeňme „vzorce“:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2),\\
a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3).
\end{aligned}$$

Příklad 1.11: Dokažte

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Řešení. Důkaz samozřejmě provedeme matematickou indukcí. První krok je zřejmý. Nechť nyní formule platí pro n. Ukážeme její platnost pro $n+1$.

$$\begin{aligned}
a^{n+1}-b^{n+1} &= a(a^n-b^n)+ab^n+b(a^n-b^n)-ba^n=(a+b)(a^n-b^n)+ab^n-ba^n= \\
&=\{\text{indukční přepoklad}\}=(a-b)\sum_{i=0}^{n-1}(a^{i+1}b^{n-1-i}+a^ib^{n-i})+ab^n-ba^n= \\
&=(a-b)\left(\sum_{i=1}^{n}a^ib^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1}a^ib^{n-i}\right)+ab^n-ba^n \\
&=2(a-b)\sum_{i=0}^{n}a^ib^{n-i}-(a-b)b^n-(a-b)a^n+ab^n-ba^n \\
&=2(a-b)\sum_{i=0}^{n}a^ib^{n-i}-(a^{n+1}-b^{n+1})
\end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{i=0}^{n}a^ib^{n-i}.$$

Zaveďme **Pascalův trojúhelník** jakožto následující schéma:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & \text{atd.} & & & &
\end{array}$$

Každý nehraniční prvek je součtem dvou nad ním stojících prvků, hraniční prvky jsou jedničky. Označme k-tý prvek (počítáno od 0) v n-tém řádku (počítáno rovněž od 0) symbolem $\binom{n}{k}$, $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$. Z definice Pascalova trojúhelníku potom platí

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

pro $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$.

Příklad 1.12: Dokažte, že prvky Pascalova trojúhelníku jsou kombinační čísla, tj.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Řešení. Důkaz provedeme matematickou indukcí po řádcích. Pro nultý i první řádek formule zjevně platí, stejně tak na hranách, kde dává jedničku. Ukážeme platnost formule mimo hrany

$n+1$-řádku za předpokladu její platnosti na řádku n-tém.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \{\text{indukční předpoklad}\} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} +$$
$$+ \frac{n+1-k}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

Příklad 1.13: Pomocí matematické indukce dokažte binomickou větu: pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Cvičení č. 2

Funkce a jejich vlastnosti

Funkce, definiční obor, obor hodnot, vzor a obraz množiny, prostá funkce, složená funkce, inverzní funkce, elementární funkce.

Značení

f^{-1} .... inverzní funkce k funkci f
$f(A)$ .... obraz množiny A při zobrazení f
$f^{-1}(A)$ .... vzor množiny A při zobrazení f
$f \circ g$ .... složená funkce, $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
D_f .... definiční obor funkce f
H_f .... obor hodnot funkce f
$f|_M$ .... zúžení funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na množinu $M \subset D_f$, tj. funkce $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $h(x) = f(x),\ \forall x \in D_h = M \subset D_f$

Toto cvičení je stále ještě z větší části opakovací. Funkce a pojmy zde vyskytující se by studentům měly být známé. Novými pojmy mohou být vzor a obraz množiny, které byly probrány na první úvodní přednášce. Než začnete řešit následující sadu příkladů doporučuji připomenout si vlastnosti (definiční obor, obor hodnot a graf) mocninných funkcí, odmocnin, logaritmu a exponenciální funkce.

Příklad 2.1: Určete přirozené definiční obory následujících funkcí.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$,

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x+1}}{\ln x}$,

c) $h(x) = x^{-2} + \dfrac{1}{e^{x-1} - 1}$

Řešení. Uveďme řešení aspoň jednoho bodu, třeba b). Abychom určili přirozený definiční obor funkce g je potřeba nalézt všechna reálná x pro která má výraz

$$\frac{\sqrt[5]{x+1}}{\ln x}$$

smysl jakožto reálné číslo. Jmenovatel zlomku musí být nenulový a argument logaritmu musí být kladný. V čitateli se vyskytuje lichá odmocnina jejíž definiční obor je celé $\mathbb{R}$. Přípustná x tedy musí splnit dvě podmínky

$$\ln x \neq 0 \quad \text{a} \quad x > 0.$$

Logaritmus (libovolného základu) je nulový pouze pro $x = 1$. Dostáváme proto výsledek

$$D_g = (0, +\infty) \setminus \{1\}.$$

Podobným postupem bychom dospěli k definičním oborům ve zbývajících bodech a) a c).

$$D_f = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty), \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Příklad 2.2: Nalezněte přirozený definiční obor D_f je-li

a) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$,

b) $f(x) = \sqrt[4]{3 - x} + \dfrac{1}{\ln(x + 1)}$,

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

a) $D_f = \langle -1, 1\rangle$, b) $D_f = (-1, 3\rangle \setminus \{0\}$, c) $D_f = (-1, 1\rangle \cup \langle 2, 3)$.

Příklad 2.3: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$f(x) = x^2 + 4x + 5.$$

Určete $f^{-1}(\{0, 1\})$ a $f(\{0, 1\})$. Rozhodněte zda je f prostá.

Řešení. $f(\{0, 1\}) = \{5, 10\}$. Nalezení $f^{-1}(0)$ je ekvivalentní řešení rovnice

$$x^2 + 4x + 5 = 0,$$

která ale žádné reálné řešení nemá. K určení $f^{-1}(1)$ řešíme rovnici

$$x^2 + 4x + 5 = 1, \text{ tj. } (x + 2)^2 = 0,$$

která má jeden dvojnásobný kořen -2. Máme tedy $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{-2\}$. Jelikož f je kvadratická funkce, nemůže být ze své podstaty prostá. Snadno např. nahlédneme, že $f(-3) = f(-1)$.

Příklad 2.4: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 4.$$

Určete $f\big((-1, 1\rangle\big)$ a $f^{-1}\big((0, +\infty)\big)$.

Řešení. Funkce f je opět kvadratická. Můžeme si usnadnit práci vytknutím dvojky,

$$f(x) = 2(x^2 + x - 2),$$

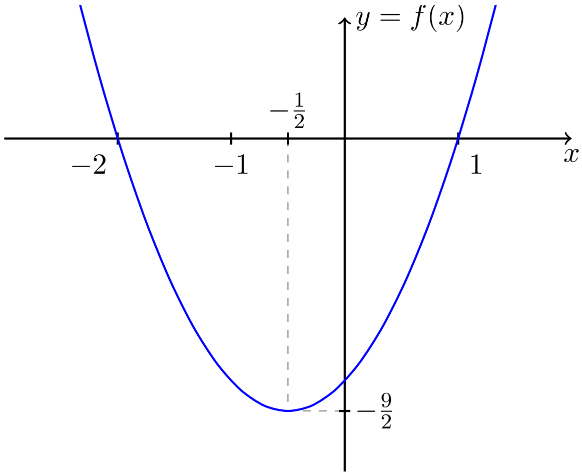
a určit průsečíky s osou x,

$$x_\pm = \frac{1}{2}\Big(-1 \pm \underbrace{\sqrt{1 + 8}}_{3} \Big) = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Vrchol (vzhledem ke kladnosti konstanty u x^2 fakticky minimum) paraboly se nachází v bodě o souřadnicích

$$\left(\frac{x_+ + x_-}{2}, f\Big(\frac{x_+ + x_-}{2}\Big) \right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Na základě těchto informací již můžeme načrtnout graf funkce f.



Obrazem množiny $(-1,\, 1\rangle$ je proto množina $\left\langle -\frac{9}{2}, 0\right\rangle$. Vzorem množiny $(0, +\infty)$ je množina $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Příklad 2.5: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadána předpisem

$$f(x) := \sqrt{2 - 3x}.$$

Načrtněte graf této funkce. Určete přirozený definiční obor D_f a obor hodnot H_f. Dokažte, že je tato funkce prostá.

Řešení. Argument sudé odmocniny musí být nezáporný, tedy musí platit $2 - 3x \geq 0$, tzn. $D_f = (-\infty, 2/3\rangle$. Graf necháme na doplnění čtenářem. $H_f = \langle 0, \infty)$. Nechť nyní $x_1, x_2 \in D_f$ a současně $f(x_1) = f(x_2)$. Potom odvodíme $x_1 = x_2$. Funkce f je tedy prostá na D_f.

Příklad 2.6: Řešte úlohu 2.5 pro funkci

$$f(x) = \sqrt[3]{2 - 3x}.$$

Řešení. Třetí odmocnina je definována na celém $\mathbb{R}$ a proto $D_f = \mathbb{R}$. $H_f = \mathbb{R}$. Prostost ověříme podobně.

Příklad 2.7: Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) := x + |x|.$$

Je f prostá? Jaký je její obor hodnot? Jaká množina je vzorem množiny $\langle 0, 1\rangle$?

Není prostá. $H_f = \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(\langle 0, 1\rangle) = (-\infty, 1/2\rangle$.

Příklad 2.8: Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) := 2x + |x|.$$

Je f prostá? Je na? Nalezněte vzor množiny $\langle -1, 1)$ a obraz množiny $(-1, 2)$. Načrtněte graf funkce f. Nalezněte inverzní funkci f^{-1}, existuje-li.

Je prostá i na. $f((-1, 2)) = (-1, 6)$, $f^{-1}(\langle -1, 1)) = \langle -1, 1/3)$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{for } x \geq 0 \\ x & \text{for } x < 0. \end{cases}$

Před řešením následujících příkladů si připomeňte definici složené funkce a zopakujte pojmy vnější a vnitřní funkce.

Příklad 2.9: Nalezněte nějaké dvě funkce f a g, $f \neq g$, tak, aby

a) $f \circ g = g \circ f$

b) $f \circ g \neq g \circ f$.

Možných řešení je mnoho a necháváme je na čtenářově fantazii.

Připomeňte si definici funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, nejlépe pomocí jednotkové kružnice. Úhly měříme v **obloukové míře**, definujte **radián**.

Příklad 2.10: Načrtněte grafy výše zmíněných goniometrických funkcí, demonstrujte, že nejsou na $\mathbb{R}$ prosté.

Příklad 2.11: Načrtněte grafy arcsin, arccos, arctg a arccotg, které definujeme jako inverze k zúžením (ve stejném pořadí)

$$\sin|_{\langle -\pi/2, \pi/2\rangle}, \ \cos|_{\langle 0,\pi\rangle}, \ \operatorname{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)}, \ \operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}.$$

Příklad 2.12: Určete numerické hodnoty výrazů

$$\arcsin 0, \ \arcsin(-1), \ \arccos \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\arccos \frac{1}{2}, \ \operatorname{arctg} 1, \ \operatorname{arccotg} 1.$$

Příklad 2.13: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$f(x) = 2|x-1| + |x+1|.$$

Nalezněte $f(A)$ pro $A = (0, 2\rangle$, $f^{-1}(B)$ pro $B = (2, 3)$ a obor hodnot H_f.

$f(A) = \langle 2, 5\rangle$, $f^{-1}(B) = (0, 1) \cup (1, 4/3)$, $H_f = \langle 2, +\infty)$

Příklad 2.14: Vypočtěte $f(x+1)$ je-li $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.

$2x^2 + 5x + 3$

Příklad 2.15: Nalezněte inverzní funkci k funkci f, je-li

a) $f(x) = 1 - 3x$,

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

c) $f(x) = 10^{x+1}$,

d) $f(x) = 1 + \ln(x+2)$,

e) $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$.

a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(1-x)$, b) $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x}$, c) $f^{-1}(x) = -1 + \log(x)$, d) $f^{-1}(x) = e^{x-1} - 2$, e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(2)} \ln \frac{x}{1-x}$

Cvičení č. 3

Posloupnosti

Posloupnosti, limita posloupnosti (definice a výpočet), vybraná posloupnost.

Značení

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo stručněji (a_n) . . . . posloupnost
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ . . . . limita posloupnosti
$\overline{\mathbb{R}}$ . . . . rozšířená reálná osa
H_a . . . . okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Příklad 3.1: Nalezněte explicitní předpis pro n-tý člen zadaných posloupností. Posloupnosti indexujte od jedné.

i. Posloupnost všech po sobě jdoucích sudých čísel větších nebo rovno osmi.

ii. Posloupnost $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$

iii. Periodicky se opakující posloupnost $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$

Řešení. Samozřejmě existuje mnoho možných způsobů jak tyto posloupnosti popsat. Například:

i. $a_n = 8 + 2(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots,$

ii. Pomocí dolní celé části můžeme psát

$$a_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

případně

$$a_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{n+1}\right).$$

iii. Stačí vhodně volit hodnoty funkce sin,

$$a_n = \sin\frac{(n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Připomeňme definici několika různých typů posloupností. Posloupnost (a_n) nazýváme

- rostoucí, pokud $a_n < a_{n+1}$,
- klesající, pokud $a_n > a_{n+1}$,
- nerostoucí, pokud $a_n \geq a_{n+1}$,

- neklesající, pokud $a_n \leq a_{n+1}$,

kde se všude požaduje aby daná nerovnost platila pro všechna n z $\mathbb{N}$. Posloupnost nazýváme monotónní, pokud je nerostoucí nebo neklesající.

Příklad 3.2: Rozhodněte o monotonii následujících posloupností[1]

i. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

ii. $a_n = \dfrac{(n+2)^2}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Řešení.

i. Je rostoucí. Protože pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$a_n < a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \;\Leftrightarrow\; n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \;\Leftrightarrow 0 < 1.$$

ii. Je klesající. Podmínka $a_n > a_{n+1}$ je ekvivalentní požadavku

$$\frac{(n+2)^2}{2^n} > \frac{(n+3)^2}{2^{n+1}} \;\Leftrightarrow\; 2n^2 + 8n + 8 > n^2 + 6n + 9 \;\Leftrightarrow\; n^2 + 2n - 1 > 0.$$

Ten je ale splněn pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Skutečně, kvadratické rovnice

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

má řešení $x = -1 \pm \sqrt{2} < 1$.

Příklad 3.3: Rozhodněte o monotonii následujících posloupností.

a) $(n^2 - 2n)_{n=1}^{\infty}$,

b) $(n^2 - 3n)_{n=1}^{\infty}$,

c) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$,

d) $(n + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$.

a) rostoucí, b) neklesající, c) klesající, d) ani jednoho typu.

Připomeňme definici limity číselné posloupnosti, kterou nejlépe zapíšeme pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall H_\alpha)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in H_\alpha).$$

Zde H_α označuje okolí bodu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Stručně řečeno, posloupnost (a_n) má limitu α, právě když v každém okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti až na konečný počet výjimek.

Ukažme si nyní, jak podmínku v definici limity posloupnosti ověřit na konkrétních příkladech.

[1] Podrobněji: určete zda-li se jedná o posloupnost rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající či monotonní.

Příklad 3.4: Pomocí definice limity dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Řešení. Pro $\varepsilon > 0$ zvolíme libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro $n > n_0$ platí

$$\left|\frac{\sin(n)}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Příklad 3.5: Pomocí definice limity dokažte, že

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n + (-1)^n) = +\infty$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

Definici k výpočtu limit používáme zřídka, častěji se opíráme o známé základní limity, například na přednášce zmiňované

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

V kombinaci se znalostí vět o součtu, součinu a podílu limit[2] pak můžeme počítat i limity komplikovanějších posloupností.

Příklad 3.6: Vypočtěte limity:

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} (5n^3 - 7n + 1)$

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^3 - 7n + 1}{n^2 - 3}$

iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^3 - 7n + 1}{n^3 - 3}$

iv. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^3 - 7n + 1}{n^4 - 3}$

Řešení.

i. Abychom mohli použít zmiňovanou větu, je nutné výraz nejprve vhodně upravit (vytknutí nejvíce rostoucího členu),

$$\lim_{n\to+\infty} (5n^3 - 7n + 1) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \left(5 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty \cdot (5 - 0 - 0) = +\infty.$$

[2] Nechť $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$, kde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\lim(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim a_n \cdot b_n = a \cdot b, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

za předpokladu, že jsou výrazy na pravých stranách definovány.

ii. Limita čitatele i jmenovatele je nekonečná, čelíme nedefinovanému výrazu $\frac{+\infty}{+\infty}$. Musíme tedy opět upravovat:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3-7n+1}{n^2-3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(5-\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{5-\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n^2}} = +\infty\cdot\frac{5}{1} = +\infty.$$

iii. Podobným postupem jako v *ii.* dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3-7n+1}{n^3-3} = 5.$$

iv. Podobným postupem jako v *ii.* dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3-7n+1}{n^4-3} = 0.$$

Příklad 3.7: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-4}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}}.$$

5/4.

Příklad 3.8: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Řešení. Podle formulky odvozené na prvních cvičeních $1+2+3+\cdots+n-1=(n-1)n/2$ a tudíž:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zdůrazněme, že nelze použít větu o limitě součtu, neboť počet sčítanců roste s n do nekonečna. Pokud bychom nesprávně tuto větu použili, získali bychom nesprávný výsledek $0+0+0+\cdots+0=0$.

Příklad 3.9: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1}+\frac{1-n^3}{n^2-1}.$$

Je zkoumaná posloupnost nerostoucí nebo neklesající?

-1, je nerostoucí i neklesající.

K větě o limitě součtu poznamenejme, že ji nelze obrátit. Z existence limity $\lim(a_n+b_n)$ obecně neplyne existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$. Např. uvažte $a_n=(-1)^n$ a $b_n=(-1)^{n+1}$, pak $a_n+b_n=0$.

Příklad 3.10: Vypočtěte limity

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right).$$

Řešení. V obou se vyskytuje nedefinovaný výraz $+\infty - (+\infty)$. Rozšíříme-li vhodnou jedničkou dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{2/3} \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + ((n+1)n)^{1/3} + n^{2/3}} = \frac{1}{3}.$$

Poznamenejme, že výrazy podobného typu lze výhodně upravovat použitím vzorce pro $a^n - b^n$ odvozeného na prvním cvičení. Zde ve tvaru

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a-b}{a^{(n-1)/n} + a^{(n-2)/n}b^{1/n} + \cdots + a^{1/n}b^{(n-2)/n} + b^{(n-1)/n}}.$$

Příklad 3.11: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}.$$

$+\infty$.

Příklad 3.12: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n}{n+1}.$$

Řešení. Exponent u -1 není nic jiného než součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, ten je s rostoucím n napřeskáčku dvakrát sudý a dvakrát lichý. Limita tedy neexistuje, lze sestrojit vybrané posloupnosti jdoucí k ± 1.

Další základní limitou z přednášky, která se nám bude ve zbytku cvičení hodit, je

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & |a| < 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Příklad 3.13: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}} \ ?$$

1.

Příklad 3.14: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+1}}.$$

2.

Příklad 3.15: Buď $a > 0$. Vypočtěte následující limity:

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{a}$,

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{-a}$.

Řešení.

i. Na přednášce zaznělo $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (případně zazní, připomeňte). Máme určit limitu vybrané posloupnosti a ta je stejná.

ii. Vzhledem k lichým odmocninám $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$. Limita je potom -1.

Domácí cvičení 3.16: Vypočtěte následující limity, nebo dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n+1)}{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+(-1)^n)\, n$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3^n}+\frac{1}{2^n}}$.

a) 0, b) neexistuje, c) 1.

Domácí cvičení 3.17: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right).$$

$\frac{1}{2}$.

Domácí cvičení 3.18: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+1}$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2}{n+4} - \dfrac{1+2n}{2+\frac{1}{n}}$,

a) 3, b) 1, c) 4/3, d) -4.

Domácí cvičení 3.19: Dokažte

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100n}{n^2+1} = 0$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1} = 0$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Cvičení č. 4

Posloupnosti, pokračování

Věta o sevřené posloupnosti, Eulerovo číslo, podílové kritérium.

Značení

e .... Eulerovo číslo

Připomeňme větu o limitě sevřené posloupnosti: nechť pro posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) platí

i) existují limity $\lim a_n = \lim c_n =: \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,

ii) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že nerovnost $a_n \leq b_n \leq c_n$ platí pro každé $n \geq n_0$,

potom existuje limita posloupnosti (b_n) a její hodnota je α. Dále také připomeňme limity probrané na přednášce

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Příklad 4.1: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^3 + 5}.$$

Řešení. Pro všechna kladná $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{4n^3+5} \leq \sqrt[n]{9n^3} = \sqrt[n]{9}\,\sqrt[n]{n}^3.$$

Posloupnosti dolních i horních odhadů mají stejnou limitu, jmenovitě jedničku. Tudíž limita sevřené posloupnosti existuje a rovná se rovněž jedné.

Příklad 4.2: Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)! + (n+2)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

1.

Příklad 4.3: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}.$$

Zde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x, tedy celé číslo $\lfloor x \rfloor$ splňující $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Na přednášce bylo Eulerovo číslo definováno jako součet číselné řady

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Dále jsme odvodili rovnost

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Důrazně na tomto místě upozorňujeme na častou nesprávnou úpravu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq \lim_{n\to\infty} (1+0)^n = 1.$$

Toto „částečné limitění“ samozřejmě nelze ospravedlnit a představuje tak pouze častý omyl.

Příklad 4.4: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}.$$

Řešení. Stačí upravit na známou limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e^3.$$

Příklad 4.5: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Nyní

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2} = \sqrt{e},$$

protože $\big((1+1/(2n))^{2n}\big)$ je vybraná z $\big((1+1/n)^n\big)$ a $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ pokud (a_n) je posloupnost s nezápornými členy splňující $\lim a_n = \alpha \geq 0$, což také víme z přednášky.

Příklad 4.6: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n.$$

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3.$$

Z posloupnosti $\big((1+\frac{1}{\frac{n}{3}})^{\frac{n}{3}}\big)$ totiž lze vybrat podposloupnost konvergentní k e a zároveň je tato posloupnost monotónní[1] a tedy má limitu.

Příklad 4.7: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n.$$

[1] Což lze ukázat stejně jako na přednášce.

Řešení. Tento případ můžeme převést na limitu typově shodnou s předchozím příkladem,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n-4+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{4}{n-4}\right)^{n-4}\cdot\left(1+\frac{4}{n-4}\right)^4} = \frac{1}{e^4} = e^{-4}$$

Poznamenejme, že z těchto příkladů by mělo být patrné, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}}$$

pro $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$.

Příklad 4.8: Vypočtěte následující limity

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{2n}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n\cdot\left(\dfrac{3+n}{n^2}\right)^n$,

a) e^2, b) e^3.

Příklad 4.9: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2+4n+2\right)}{\ln\left(3n^4+5\right)}.$$

Řešení. V průběhu řešení užijeme znalosti na přednášce uvedeného tvrzení, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ implikuje $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = \ln a$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2+4n+2\right)}{\ln\left(3n^4+5\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\right)}{\ln\left(n^4\left(3+\frac{5}{n^4}\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n+\ln\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{4\ln n+\ln\left(3+\frac{5}{n^4}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{4+\frac{1}{\ln n}\ln\left(3+\frac{5}{n^4}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Připomeňte si důležitou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ v závislosti na hodnotě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.10: Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(3^n+5\right)}{\ln\left(4^n-2\right)}.$$

$\frac{\ln 3}{\ln 4}$.

Příklad 4.11: Dokažte *podílové kritérium*: Buď (a_n) posloupnost kladných členů. Pokud existuje kladné $q \in \mathbb{R}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovno než n_0 je

(a) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Řešení. Případ (a). Pro $n \geq n_0$ zřejmě máme $0 < a_n < a_{n_0} q^{n-n_0}$. Tvrzení pak plyne z věty o sevřené posloupnosti a předpokladu $0 < q < 1$

Případ (b). Pro $n \geq n_0$ zřejmě máme $a_n > a_{n_0} q^{n-n_0}$. Tvrzení pak plyne přímo z definice limity a předpokladu $q > 1$.

Poznamenejme, že k ověření podmínky stačí zkoumat hodnotu limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Tato však nemusí vždy existovat.

Příklad 4.12: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^5}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n^3}$.

a) 0, b) $+\infty$, c) $+\infty$.

Následují další příklady vhodné k samostatnému procvičení, ale je možné se jim věnovat i na cvičení podle časových možností.

Domácí cvičení 4.13: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

a) 1, b) 1, c) 0, d) 0

Domácí cvičení 4.14: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2+\sin(n)}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{-n}+3^{-n}}{4^{-n}+9^{-n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\,((-1)^n n)$,

a) 0, b) $+\infty$, pečlivě zdůvodněte! c) $+\infty$, d) neexistuje

Domácí cvičení 4.15: a) Existuje konvergentní aritmetická posloupnost?

b) Které geometrické posloupnosti jsou konvergentní?

Výsledek tohoto příkladu naleznete níže. Pokuste se nejprve sami na otázky odpovědět, teprve poté svou odpověď konzultujte s řešením.

Domácí cvičení 4.16: Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n},$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2n^2+3n^3-1)}{\ln n}.$

a) e^{-1}, b) 0, c) 3.

Domácí cvičení 4.17: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+4n+3}{n^2+3n+2}\right)^n,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right),$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2+n}\right)^n.$

a) e, b) -2, c) 0.

Výsledek Domácího cvičení 4.15: a) Ano, s diferencí $d = 0$, tedy ty které jsou konstantní. b) geometrická posloupnost konverguje právě tehdy když její kvocient splňuje $q \in (-1, 1\rangle$.

Cvičení č. 5

Číselné řady

Opakování příkladů na limity, číselné řady.

Na rozcvičení je možno zopakovat si výpočet limity posloupnosti na následujícím příkladě.

Příklad 5.1: Vypočtěte následující limity, případně dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 e^n - 2^n}{n^5 + 4^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n^2+2n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n^2+n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (2+(-1)^n)n$.

a) 0, b) e^{-1}, c) 1, d) $+\infty$.

Na tomto příkladě demonstrujeme definici konvergence číselné řady.

Příklad 5.2: U následujících řad $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ nejprve najděte částečný součet $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$ a rozhodněte o konvergenci, případně nalezněte součet.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$,

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{3^k + 2^k}{6^k}$,

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

Řešení.

a) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{1+n}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1,$$

řada konverguje a její součet je 1.

b) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + 2^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

řada konverguje a její součet je $\frac{7}{2}$.

c) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1,$$

řada konverguje a její součet je 1.

Vyjma definice máme k vyšetřování (absolutní) konvergence číselných řad z přednášky k dispozici následující kritéria:

- nutnou podmínku konvergence,
- Leibnizovo kritérium,
- d'Alembertovo kritérium,
- srovnávací kritérium.

Příklad 5.3: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2^{-k})$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k3^{-k}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{2^k}$.

Řešení.

a) Řada diverguje. Není splněna nutná podmínka konvergence. Zde

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + 2^{-k}\right) = 1 \neq 0.$$

b) Řada konverguje, lze použít d'Alembertova kritéria:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)3^{-k-1}}{k3^{-k}} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{3} < 1.$$

c) Řada absolutně konverguje, použijeme srovnávací kritérium:

$$\text{pro } k \in \mathbb{N} \text{ je } \left|\sin(k) \cdot 2^{-k}\right| \leq 2^{-k} \quad \text{a řada } \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \text{ konverguje.}$$

Poznamenejme, že v tomto případě nelze použít d'Alembertovo kritérium.

Příklad 5.4: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\Big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\Big)$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

Řešení.

a) Diverguje, protože

$$\frac{1+k}{1+k^2} \geq \frac{1+k}{2k^2} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k}$$

pro každé $k = 1, 2, 3\ldots$ a o řadě $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ z přednášky víme, že diverguje.

b) Diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence.

c) Lze použít d'Alembertovo kritérium k vyšetření absolutní konvergence a ukázat konvergenci řady.

Příklad 5.5: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^k\right)\frac{1}{2^k}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 3^{2k}}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{2^k + 3^k}$

Řešení. V prvním příkladě lze použít srovnávací kritérium, v ostatní d'Alembertovo. Výsledky: a) konverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) konverguje, e) diverguje.

Domácí cvičení 5.6: Vyšetřete konvergenci následujících řad

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} 2^k,$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{30} 3^{-k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+3}{k^4+3}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+k}{1+k^2}.$

a) diverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) konverguje.

Cvičení č. 6

Limita funkce

Limita funkce; jednostranná limita; existence limity; výpočet limit.

Značení

$\lim_{x\to a} f(x) = c$ .... limita funkce f v bodě a

$\lim_{x\to a_+} f(x) = c$ .... limita funkce f v bodě a zprava

$\lim_{x\to a_-} f(x) = c$ .... limita funkce f v bodě a zleva

Na přednášce se limita reálné funkce reálné proměnné definovala následovně: Nechť funkce f je definována na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s možnou výjimkou bodu a samotného a nechť $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Řekneme, že f má v bodě a limitu c, pokud pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a tak, že pokud $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ pak $f(x) \in H_c$.

K výpočtu limit máme nyní k dispozici věty o limitách součtu, součinu, podílu, složené funkce a Heineho větu. Dále máme z přednášky odvozené limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Také již můžeme využívat spojitost exponenciály, logaritmu, sinu, kosinu…Někteří už na přednášce měli, jiní mít teprve budou.

Příklad 6.1: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$$

Řešení. Jelikož -1 je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli, musíme vytknout výraz $(x+1)$, na tomto místě si připomeňte dělení polynomu polynomem.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 6.2: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

6.

Příklad 6.3: Pomocí definice vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0_\pm} \frac{1}{x}.$$

Řešení. Na této limitě znovu demonstrujeme definici. Buď $H_{+\infty}(c) = (c, +\infty)$ zadané okolí $+\infty$, $c > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{c}$. Potom pro $x \in H_0^+(\delta) \setminus \{0\} = (0, \delta)$ platí $0 < x < \delta$ a proto $\frac{1}{x} > c$, čili $\frac{1}{x} \in H_{+\infty}(c)$ a

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Podobně lze nalézt druhou limitu,

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Příklad 6.4: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}.$$

$+\infty$.

Příklad 6.5: Vypočtěte limity

$$\lim_{x \to 1_\pm} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}.$$

Řešení. Po úpravě

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{x^2 + x - 6}{x - 3}$$

ihned uzavíráme

$$\lim_{x \to 1_\pm} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \pm\infty \cdot \frac{1 + 1 - 6}{-2} = \pm\infty.$$

Příklad 6.6: Vypočtěte limity:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^x.$$

Řešení.

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

Jako argument lze použít známé číselné limity $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$, resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, monotonii e^x a Heineho větu. Načrtněte též průběh exponenciály.

Příklad 6.7: Vypočtěte limity:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

Řešení.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x \cdot (1 + e^{-x}))}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-x}) = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 0.$$

Příklad 6.8: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}.$$

Řešení. Pomocí věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+y\right)}{y}=1.$$

Navíc jsme použili znalost jedné z limit uvedené na začátku této kapitoly, teď je vhodný čas tyto limity připomenout, protože budou potřeba dále.

Příklad 6.9: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}.$$

3.

Příklad 6.10: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{4x}}{x}.$$

-1.

Příklad 6.11: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(5x\right)}{x}.$$

5.

Příklad 6.12: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x\right)}{\sin\left(3x\right)}.$$

$\frac{2}{3}$.

Příklad 6.13: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

$\frac{1}{2}$.

Příklad 6.14: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

Řešení. Zde máme k dispozici větu o limitě sevřené funkce. Jelikož

$$\forall x>0:\ -\frac{1}{x}<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{x}$$

a obě mezní funkce mají stejnou (nulovou) limitu, je nulová i limita hledaná.

Příklad 6.15: Vypočtěte jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 1\pm}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}.$$

Řešení.

$$\lim_{x\to 1\pm}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}=\mp\frac{\pi}{2}.$$

Pro ilustraci načrtněte graf funkce $\operatorname{arctg} x$.

Domácí cvičení 6.16: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\frac{\pi}{2}$.

Domácí cvičení 6.17: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-8x}{x^3-3x^2-4x+12}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2+} \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+x+6}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-e^{-x}}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1}$.

a) -3, b) $-\infty$, c) $\frac{1}{2}$, d) e.

Domácí cvičení 6.18: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x}\,(2\sin(x)+x)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(2x)}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)}$.

a) 3, b) -1, c) $\frac{1}{2}$, d) 2.

Domácí cvičení 6.19: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$,

a) $+\infty$, b) 0, c) 0.

Domácí cvičení 6.20: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos x-\sin x}{\cos(2x)}$,

c) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln(x) - 1}{x - e}$,

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

a) 0, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{1}{e}$, d) $\frac{3}{2}$.

Cvičení č. 7

Spojitost a derivace funkce

Spojitost funkce; různé případy nespojitosti; derivace; výpočet derivace.

Značení

$\lfloor x \rfloor$ .... dolní celá část x

$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ .... znaménko (signum) x

$f'(a)$ .... derivace funkce f v bodě a

Příklad 7.1: Načrtněte graf funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Rozhodněte, kde je f spojitá, případně spojitá zleva nebo zprava.

Řešení. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, v bodech $x \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale zleva nespojitá. Skutečně, pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ totiž existuje okolí H_a bodu a tak, že pro $x \in H_a$ je $\lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor$ a proto

$$\lim_{x \to a} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a} \lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

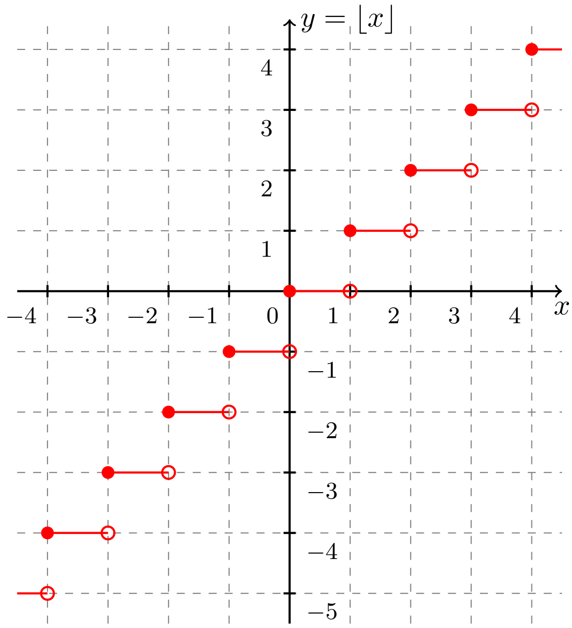
Pokud ale $a \in \mathbb{Z}$, pak podobně

$$\lim_{x \to a+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a+} \lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor$$

a

$$\lim_{x \to a-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a-} \big(\lfloor a \rfloor - 1 \big) = \lfloor a \rfloor - 1.$$

Nakonec uvádíme náčrtek.



Příklad 7.2: Načrtněte graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$. Rozhodněte, kde je f spojitá, případně spojitá zleva nebo zprava.

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus A$, kde $A := \{k\pi |\, k \in \mathbb{Z}\}$. V bodech množiny A není spojitá ani zleva ani zprava.

Příklad 7.3: Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - x - 2}$$

a rozhodněte, v kterých bodech mimo definiční obor je možné tuto funkci dodefinovat tak, aby výsledná funkce byla spojitá.

Řešení. Protože platí rovnost

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1),$$

je definičním oborem funkce f množina $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{-1, 2\}$. Číslo 2 je ale i kořenem polynomu v čitateli, takže

$$\lim_{x \to 2} = \frac{5}{3}.$$

V bodě 2 je možné funkci spojitě dodefinovat hodnotou $\frac{5}{3}$. V bodě -1 to možné není. Pro jednostrané limity totiž platí

$$\lim_{x \to -1_\pm} f(x) = \mp\infty.$$

Příklad 7.4: Rozhodněte, zda-li je možné funkci

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

spojitě dodefinovat v bodě 0. Co lze říci na stejnou otázku pro funkci

$$g(x) = f(x)^2?$$

f nemá v bodě 0 limitu, nelze ji spojitě dodefinovat. Funkci g lze v bodě 0 spojitě dodefinovat $\frac{\pi^2}{4}$.

Příklad 7.5: Zderivujte následující funkce a určete jejich definiční obory, stejně tak určete definiční obory zderivovaných funkcí.

$$a)\ f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}, \quad c)\ (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}.$$

Řešení.

$$a)\ f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3x^{2/3}},\ D_f = \langle 0, \infty),\ D_{f'} = (0, \infty)$$
$$b)\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3},\ D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$c)\ f'(x) = -20(12x+17)(5+2x)^9(3-4x)^{19},\ D_f = D_{f'} = \mathbb{R}.$$

Příklad 7.6: Zderivujte následující funkce.

$$a)\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad b)\ f(x) = x^x, \quad c)\ f(x) = x^2 + 2^x.$$

Řešení.

$$a)\ f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$
$$b)\ f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)' = (\ln x + 1)x^x$$
$$c)\ f'(x) = 2x + 2^x \ln 2.$$

Domácí cvičení 7.7: Zderivujte následující funkce.

$$a)\ f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}, \quad b)\ f(x) = 3^{x^2}.$$

a) $f'(x) = e^{e^x} e^x$, b) $2\ln(3)3^{x^2}x$

Příklad 7.8: Zderivujte následující funkce a určete jejich definiční obory, stejně tak určete definiční obory zderivovaných funkcí.

$$a)\ f(x) = \ln(\sin x), \quad b)\ f(x) = \ln(\ln(\sin x)), \quad c)\ f(x) = \operatorname{arctg} x^3, \quad d)\ f(x) = \arcsin\frac{1}{x}.$$

Řešení.

$$a)\ f'(x) = \operatorname{cotg} x,\ D_f = D_{f'} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$
$$b)\ D_f = \emptyset,\ \text{tudíž derivaci netřeba dále počítat}$$
$$c)\ f'(x) = \frac{3x^2}{1+x^6},\ D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$
$$d)\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}},\ D_f = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty),\ D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Domácí cvičení 7.9: Zderivujte funkci $f(x) = \sin(\ln x)$.

$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

Příklad 7.10: Dokažte, že platí:

$$|x|' = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{pro } x \neq 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. V bodě $x = 0$ je derivace zleva rovna -1, kdežto derivace zprava je rovna 1, tudíž derivace v tomto bodě neexistuje.

Zopakujme pojem **tečna ke grafu funkce**. Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě a je dána předpisem $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, pokud $f'(a) \in \mathbb{R}$ a předpisem $x = a$, pokud $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$ a funkce f je v bodě a spojitá[1]. Derivace funkce f v bodě a je rovna tangens úhlu α, který tečna grafu funkce f v bodě a svírá s osou x.

Příklad 7.11: Nalezněte body, ve kterých je tečna funkce

$$f(x) = \frac{1}{4}x^{5/3} + \frac{1}{3}x - 3\sqrt[3]{x}$$

rovnoběžná s osou x nebo y.

Řešení. Prvnímu případu odpovídají řešení rovnice

$$f'(x) = \frac{5}{3 \cdot 4}x^{2/3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x^{2/3}} = 0,$$

jež jsou dvě, $x = \pm\left({}^{6}\!/_{5}\right)^{3/2}$. Druhému případu potom body z D_f, kde $f'(x) = \pm\infty$, tedy $x = 0$.

Příklad 7.12: Nalezněte body, ve kterých tečna funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$$

svírá s osou x úhel $45°$.

Řešení. Řešíme tedy rovnici

$$f'(x) = \operatorname{tg} 45° = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x - 1 = 0,$$

jejímž jediným řešením je $e^x = 1$, čili $x = 0$.

Příklad 7.13: Určete obsah trojúhelníka, který je ohraničen tečnou ke grafu funkce

$$f(x) = x^{-1}$$

v bodě a, $a > 0$, osou x a osou y. Pro jakou hodnotu parametru a je tato plocha největší?

---

[1] Například tečnu k sgn v bodě 0 nedefinujeme, sice $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$ ale sgn v 0 není spojitá, pojem tečny tak postrádá smysl.

Řešení. Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě a zní

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}.$$

Průsečíky tečny s osami x a y tedy jsou body $(2a, 0)$ a $(0, 2a^{-1})$. Plocha hledaného trojúhelníku je konstantní a rovna 2. V tomto příkladě tedy ještě není nutné umět hledat extrémy funkce, to bude obsahem dalších cvičení.

Příklad 7.14: Spočtěte 1., 2., a 3. derivaci funkce $f(x)$ a určete $f^{(n)}(x)$ pro kladné přirozené n v následujících případech:

$$a)\ f(x) = \mathrm{e}^x,\ b)\ x^3,\ c)\ x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N},\ d)\ x^\alpha,\ \alpha \notin \mathbb{N},\ e)\ f(x) = \sin x,\ f)\ f(x) = \cos x.$$

Řešení.

$$a)\ f^{(n)} = \mathrm{e}^x$$

$$b)\ f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,\ f^{(n)} = 0 \text{ pro } n > 3$$

$$c)\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} & \text{pro } \alpha \geq n \\ 0 & \text{pro } \alpha < n \end{cases}$$

$$d)\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$e)\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cos x & \text{pro } n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N} \\ (-1)^m \sin x & \text{pro } n = 2m,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \end{cases}$$

$$f)\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & \text{pro } n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \\ (-1)^m \cos x & \text{pro } n = 2m,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1. \end{cases}$$

Domácí cvičení 7.15: Je funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \leq x < 3, \\ 4 - x, & x \geq 3, \end{cases}$$

spojitá na svém definičním oboru?

Ano.

Domácí cvičení 7.16: Pro jakou hodnotu reálného parametru $a \in \mathbb{R}$ je funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

spojitá?

Je spojitá pro $a = 1$.

Domácí cvičení 7.17: Funkce $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ není definována v bodě $x = 1$. Lze ji dodefinovat tak, aby byla v bodě 1 spojitá?

Ano, lze. Definujeme $f(1) := \frac{2}{3}$.

Domácí cvičení 7.18: Funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^{2x}-1}$ není definována v bodě $x = 0$. Lze ji v tomto bodě dodefinovat tak, aby byla v bodě 0 spojitá?

Ano, a to hodnotou $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

Domácí cvičení 7.19: Vypočtěte derivace následujících funkcí

$$a)\ f(x) = \operatorname{arctg} e^x, \quad b)\ f(x) = x\sin(x)\cos(x), \quad c)\ f(x) = \ln|x|, \quad d)\ f(x) = \frac{1}{\arcsin(x)}.$$

a) $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) + x\cos(2x)$, c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, d) $f'(x) = -\dfrac{1}{(\arcsin(x))^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Domácí cvičení 7.20: Pro funkci f najděte body $a \in D_f$ tak, že její tečna v bodě a svírá úhel α s osou x.

$$\begin{aligned} &a)\ f(x) = x^3, \quad \alpha = \frac{\pi}{3},\\ &b)\ f(x) = \left(x^2 - x\right)^{1/3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2},\\ &c)\ f(x) = -\operatorname{arctg}(x), \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

a) $a = \pm 3^{-1/4}$, b) $a \in \{0, 1\}$, c) $a = 0$.

Domácí cvičení 7.21: Vypočtěte derivace následujících funkcí (a, b, c, d jsou kladné reálné parametry)

$$a)\ f(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{a} + \frac{b^2}{x^2} + \frac{x^2}{b^2}, \quad b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2, \quad c)\ f(x) = \sqrt{x}\left(x^3 - \sqrt{x} + 1\right),$$

$$d)\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad e)\ f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right), \quad f)\ f(x) = \left(x^2 - 3x + 3\right)\left(x^2 + 2x - 1\right).$$

a) $f'(x) = -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{1}{a} - 2\dfrac{b^2}{x^3} + 2\dfrac{x}{b^2}$, b) $f'(x) = -2\left(\dfrac{1}{2} - x\right)$, c) $f'(x) = \dfrac{7}{2}x^{5/2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1$, d) $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, e) $f'(x) = -\dfrac{1+x}{2x^{3/2}}$, f) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$.

Domácí cvičení 7.22: Pro funkci $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$ vypočtěte $f(1)$, $f'(1)$, $f(4)$, $f'(4)$, $f(a^2)$ a $f'(a^2)$. ($a \in \mathbb{R}$.)

$f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f(4) = 8$, $f'(4) = \frac{5}{2}$, $f(a^2) = 3a^2 - 2|a|$, $f'(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}$.

Domácí cvičení 7.23: Pro funkci $f(x) = \frac{x^2-5x-1}{x^3}$ spočtěte $f(-1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$, $f'\left(\frac{1}{a}\right)$ pro $a \neq 0$.

$f(-1) = -5$, $f'(-1) = -8$, $f'(2) = \frac{19}{16}$, $f\left(\frac{1}{a}\right) = a^2\left(3a^2 + 10a - 1\right)$

Domácí cvičení 7.24: Nalezněte derivace následujících funkcí

$$a)\ f(x) = \frac{x}{1-\cos(x)}, \quad b)\ f(x) = x\sin x + \cos x, \quad c)\ f(x) = \sin\left(\sin(x)\right), \quad d)\ f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

$$e)\ f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}, \quad f)\ f(x) = \arcsin\frac{2}{x}, \quad g)\ f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x.$$

a) $f'(x) = \dfrac{1 - \cos(x) - x\sin(x)}{\left(1-\cos(x)\right)^2}$, b) $f'(x) = x\cos(x)$, c) $f'(x) = \cos\left(\sin(x)\right)\cdot\cos(x)$, d) $f'(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{1/2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{3/2}}$, e) $f'(x) = \dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$, f) $f'(x) = -\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$, g) $f'(x) = -2\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2$.

Domácí cvičení 7.25: Vypočtěte derivace následujících funkcí (a, b jsou reálné parametry)

$$a)\ f(x) = 2^x, \quad b)\ f(x) = x \cdot 10^x, \quad c)\ f(x) = 2^{\frac{x}{\ln(x)}}, \quad d)\ f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x},$$
$$e)\ f(x) = ae^{-b^2x^2}, \quad f)\ f(x) = a^x x^a \text{ (zde } a > 0), \quad g)\ f(x) = 2^{3^x}, \quad h)\ f(x) = e^{\sqrt{x+1}}.$$

a) $f'(x) = 2^x \ln(2)$, b) $f'(x) = \Big(1 + x\ln(10)\Big) \cdot 10^x$, c) $f'(x) = \frac{\ln(2)}{\ln^2(x)}\Big(\ln(x) - 1\Big)2^{\frac{x}{\ln(x)}}$, d) $f'(x) = \frac{2e^x}{\Big(e^x - 1\Big)^2}$,
e) $f'(x) = -2ab^2xe^{-b^2x^2}$, f) $f'(x) = \Big(x\ln(a) + a\Big)a^x x^{a-1}$, g) $f'(x) = 2^{3^x} \cdot \ln(2) \cdot 3^x \cdot \ln(3)$, a) $f'(x) = e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Cvičení č. 8

Extrémy reálných funkcí

Extrémy reálných funkcí; vyšetřování průběhu reálných funkcí.

Příklad 8.1: Určete největší a nejmenší hodnoty nabývané následujícími funkcemi na zadaných intervalech.

1. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ na $\langle 0, 4\rangle$
2. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ na $\langle 0, 4\rangle$
3. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ na $\langle 0, \infty)$

Řešení.

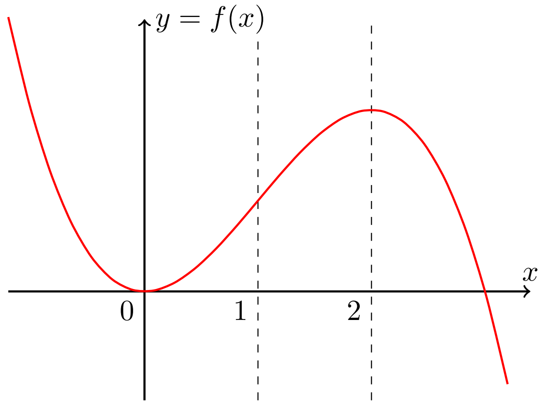
1. $f(0) = f(4) = 0$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ je nulová v bodě 1 a přitom $f(1) = -1$. Na daném intervalu tedy f nabývá maxima v krajních bodech (s hodnotou 0) a minima v bodě 1 (s hodnotou -1).
2. $f'(x) = 2(x+1)^{-2} > 0$, funkce f je tedy na daném intervalu rostoucí, maxima nabývá v pravém krajním bodě (s hodnotou $f(4) = \frac{3}{5}$) a minima v levém krajním bodě (s hodnotou $f(0) = -1$).
3. $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$ je nulová v bodě 1 a v tomto bodě má f maximum s hodnotou e^{-1}. Minimum s hodnotou 0 je potom nabýváno v levém krajním bodě.

Příklad 8.2: Nalezněte extrémy, určete limity v krajních bodech definičního oboru a bodech nespojitosti, vyšetřete konvexnost/konkávnost funkce

$$f(x) = 3x^2 - x^3$$

a načrtněte její graf.

Řešení. Derivace $f'(x) = 6x - 3x^2$ je nulová pro $x = 0$ ($f(0) = 0$) a $x = 2$ ($f(2) = 4$), přitom $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$. Nahlédneme, že v bodě 0 má f ostré lokální minimum a v bodě 2 ostré lokální maximum. (Lze ověřit z druhé derivace.) Dále $f''(x) = 6(1-x)$, a proto shrnujme, že f je konvexní na $(-\infty, 1)$ a konkávní na intervalu $(1, \infty)$.



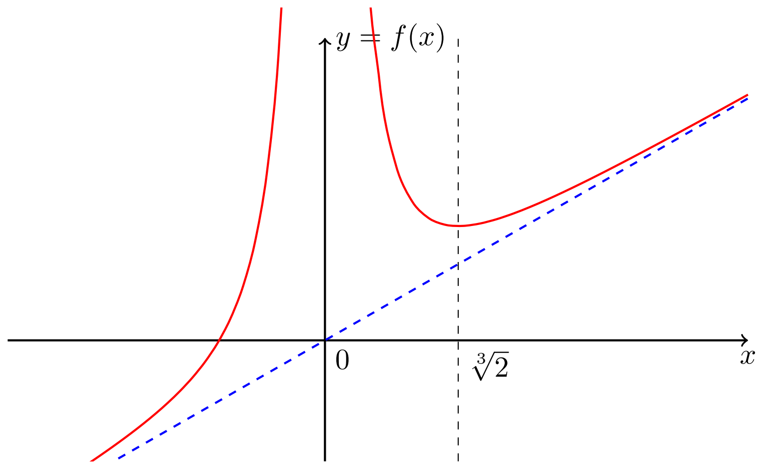
Než se pustíme do následujícího příkladu připomeňte si pojem **asymptoty** grafu funkce.

Příklad 8.3: Vyšetřete průběh funkce (včetně asymptot)

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

a načrtněte její graf.

Řešení. Zřejmě $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Derivace $f'(x) = 1 - 2x^{-3}$ je nulová v bodě $\sqrt[3]{2}$. Dále máme $\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. V bodě $\sqrt[3]{2}$ je tedy nutně ostré lokální minimum. $f''(x) = 6x^{-4} > 0$, a funkce f je tudíž na D_f konvexní. Dále $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = 0$, přímka $y = x$ tedy představuje asymptotu v $\pm\infty$. Vedle toho je přímka $x = 0$ svislou asymptotou.



Příklad 8.4: Vyšetřete průběh následujících funkcí

1. $f(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$,
2. $f(x) = (x + 1)^{2/3} \cdot x^2$,
3. $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$.

Řešení.

1. Definičním oborem zadané funkce je množina $D_f = \mathbb{R}$. Pro první a druhou derivaci platí

$$f'(x) = 3x \cdot (x^2+1)^{1/2},$$
$$f''(x) = 3 \cdot \Big((x^2+1)^{1/2} + x^2(x^2+1)^{-1/2}\Big), \quad x \in D_f.$$

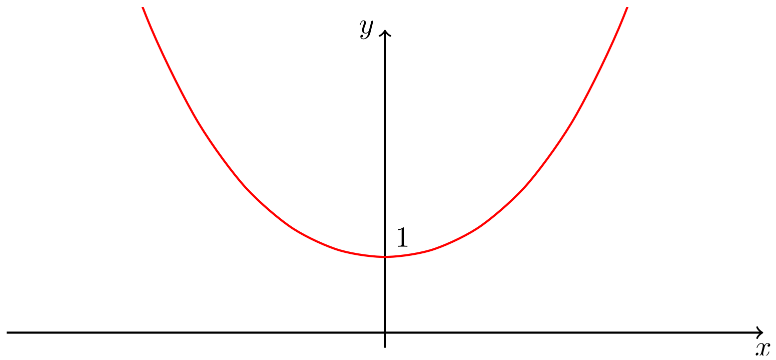
Uzavíráme, že funkce je spojitá na svém definičním oboru, klesá na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a roste na intervalu $\langle 0, +\infty)$. V bodě 0 nastává lokální minimum. Funkce je konvexní na $\mathbb{R}$. Pro limity na „krajích“ definičního oboru platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2+1)^{3/2} = +\infty.$$

Asymptoty v $\pm\infty$ neexistují, protože

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \cdot (x^2+1)^{3/2} = \pm\infty.$$

Průsečíky s osou x neexistují. Prusečík s osou y je pouze jeden, $(0, 1)$.



2. Definičním oborem zadané funkce je množina $D_f = \mathbb{R}$. Pro derivaci platí

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{4x+3}{3(x+1)^{1/3}}, \quad x \neq -1,$$
$$f'(-1) = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)^{2/3} \cdot x^2 - 0}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2}{(x+1)^{1/3}} \quad \text{neexistuje.}$$

Derivace v bodě -1 neexistuje, ale přesto je zde funkce spojitá,

$$\lim_{x\to-1} f(x) = 0 = f(-1).$$

Ze znaménka derivace dále odvodíme monotonii.

interval	$(-\infty, -3/4)$	$(-3/4, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
znaménko derivace	$-$	$+$	$-$	$+$
monotonie	klesá	roste	klesá	roste

3. Definičním oborem funkce f je množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Pro limity platí

$$\lim_{x\to-2_\pm} f(x) = \frac{x^2}{2+x} = \pm\infty,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Protože

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\cdot x = -2,$$

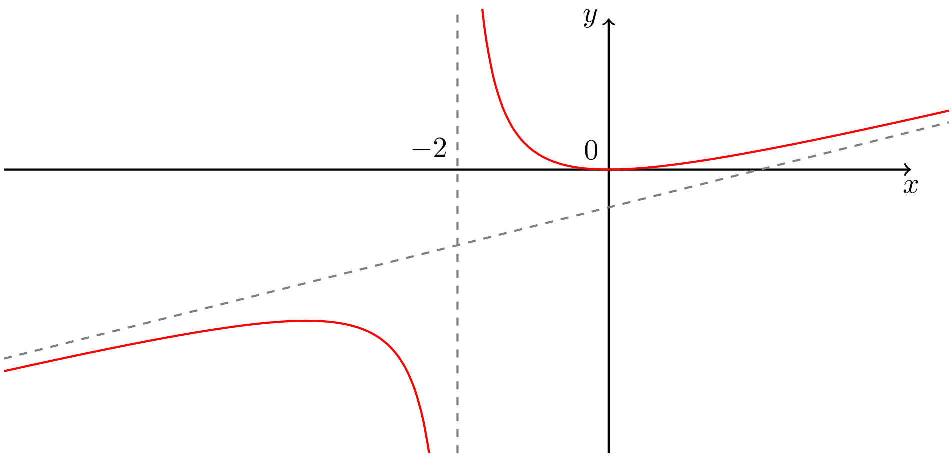
je asymptotou přímka $x = -2$ a v $\pm\infty$ přímka $y = x - 2$. Jediným průsečíkem s osami je bod $(0,0)$. Pro derivace funkce f platí

$$f'(x) = \frac{x(x+4)}{(2+x)^2},$$
$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3}, \quad x \neq -2.$$

Naše funkce f je tedy konvexní na intervalu $(-2, +\infty)$ a konkávní na intervalu $(-\infty, -2)$. Typ monotonie vyčteme z první derivace:

interval	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
znaménko derivace	$+$	$-$	$-$	$+$
monotonie	roste	klesá	klesá	roste

Funkce nabývá lokálního maxima v bodě $x = -4$ s hodnotou $f(-4) = -8$ a lokálního minima v bodě $x = 0$ s hodnotou $f(0) = 0$.



Příklad 8.5: Určete největší člen posloupnosti $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Přejděme od diskrétního ke spojitému problému, tj. hledejme maximum funkce $f(x) := \sqrt[x]{x}$ na intervalu $\langle 1, \infty)$. $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. Derivace $f'(x) = \sqrt[x]{x}(1 - \ln x)x^{-2}$ je nulová v bodě e a přitom $f(e) > 1$. Největšímu členu posloupnosti tedy odpovídá $n = 2$ nebo $n = 3$. Numericky ověříme, že největším členem posloupnosti je $\sqrt[3]{3}$.

Příklad 8.6: Určete, kolik kořenů má rovnice

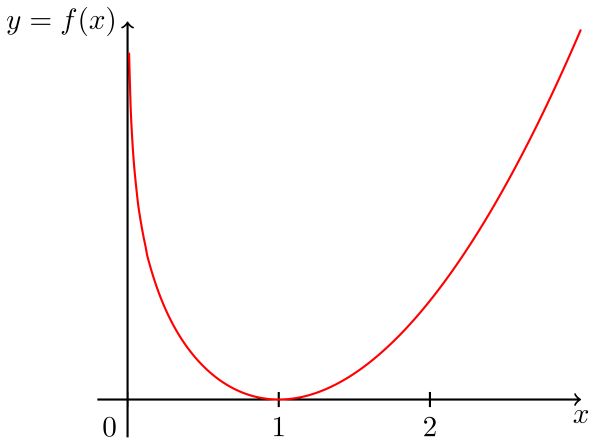
$$x^2 - x - \ln x - 1 = 0$$

a následně je separujte. Potom diskutujte, kolik kořenů má rovnice

$$x^2 - x - \ln x - a = 0$$

v závislosti na parametru a.

Řešení. Označme $f(x) = x^2 - x - \ln x$, tato funkce je definována na intervalu $D_f = (0, \infty)$. Derivace $f'(x) = 2x - 1 - x^{-1}$ je na D_f nulová pouze v bodě 1 a přitom $f(1) = 0$. Současně $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Graf funkce $f(x) - a$ tudíž protíná osu x dvakrát pro $a > 0$, jednou pro $a = 0$ a vůbec pro $a < 0$. Pro $a = 1$ dostáváme jeden kořen na intervalu $(0, 1)$ a druhý na intervalu $(1, \infty)$.



Domácí cvičení 8.7: Nalezněte lokální extrémy funkce

a) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$,

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$,

c) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x - 1}$.

a) Lokální minimum v bodě 1 ($f(1) = 0$); lokální maximum v bodě e^2 ($f(e^2) = 4e^{-2}$).

b) Lokální minimum v bodě 1 ($f(1) = 2$); lokální maximum v bodě -1 ($f(-1) = -2$).

c) Lokální minimum v bodě $3/4$ ($f(3/4) < 0$); lokální maximum nemá.

Domácí cvičení 8.8: Jaké největší a nejmenší hodnoty a v jakém bodě nabývá funkce

a) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$,

b) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$?

a) Maximem je $f(0) = f(2\pi) = \frac{3}{2}$ a minimem $f(2\pi/3) = f(4\pi/3) = \frac{3}{4}$.

b) Maximem je $f(-1) = 3$ a minimem $f(1) = 1$.

Domácí cvičení 8.9: Vyšetřete průběh funkce

a) $f(x) = (x + 1)^9 e^{-x}$,

b) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$,

c) $f(x) = (x + 1)^{2/3} - (x - 1)^{2/3}$,

d) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

e) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$,

f) $f(x) = x^{2/3} e^{-x}$,

g) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$,

h) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

a) $D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-\infty, 8)$ klesající na $(8, +\infty)$, lokální maximum v bodě 8 s hodnotou $9^9 e^{-8}$, konkávní na $(-\infty, -1)$ a $(5, 11)$, konvexní na $(-1, 5)$ a $(11, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$, asymptotou v $+\infty$ je $y = 0$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, rostoucí na celém definičním oboru, konvexní na $(-\infty, -1)$ a $(0, +\infty)$, konkávní na $(-1, 0)$, průsečík s osou x je v -1, průsečík s osou y v 1, je spojitě dodefinovatelná v bodě 1 hodnotou $4/3$, asymptotou v $\pm\infty$ je $y = x$.

c) Vyšetřovaná funkce je lichá, stačí proto uvažovat pouze $x > 0$. Zde je funkce rostoucí na $(0, 1)$ a klesající na $(1, +\infty)$, pro derivaci platí $\lim_{x\to1+} f'(x) = -\infty$ a $\lim_{x\to1-} f'(x) = +\infty$, dále $f(1) = 2^{2/3}$, funkce má lokální maximum v bodě 1 s hodnotou $2^{2/3}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

d) $D_f = (0, +\infty)$, rostoucí na $(0, e^2)$ a klesající na $(e^2, +\infty)$, konkávní na $(0, e^{8/3}$ a konvexní na $(e^{8/3}, +\infty)$ lokální maximum v bodě, e^2 s hodnotou $\frac{2}{e}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0+} = -\infty$ asymptotou v $+\infty$ je $y = 0$ a v 0 přímka $x = 0$, průsečíkem s osou x je bod 1.

e) $D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-1/2, +\infty)$, klesající na $(-\infty, -1/2)$, konvexní na $\left((-3 - \sqrt{41})/8, (-3 + \sqrt{41})/8\right)$ konkávní na zbytku $\mathbb{R}$, lokální minimum v bodě $-1/2$ s hodnotou $-\sqrt{5}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm1$, asymptotou v $\pm\infty$ je přímka $y = \pm1$, průsečík s osou y je -2 a s osou x je 2.

f) $D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(0, 2/3)$ a klesající na $(-\infty, 0)$ a $(2/3, +\infty)$, lokální minimum v bodě 0 s hodnotou 0 a lokální maximum v bodě $2/3$ s hodnotou $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-2/3}$, konvexní na $\left(-\infty, (2-\sqrt{6})/3\right)$ a $\left((2+\sqrt{6})/3, +\infty\right)$, konkávní na $\left((2-\sqrt{6})/3, (2+\sqrt{6})/3\right)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, asymptotou v $+\infty$ je $y = 0$, jediným průsečíkem s osami je bod $x = y = 0$.

g) $D_f = \mathbb{R}$, klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $(0, +\infty)$, lokální minimum v bodě 0 s hodnotou 0, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, konvexní na celém $\mathbb{R}$, asymptotou v $\pm\infty$ je přímka $y = \pm\frac{\pi}{2} x$.

h) $D_f = \mathbb{R}$, klesající na $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$, rostoucí na $(-1, 1)$, lokální maximum v 1 s hodnotou $\pi/2$ a lokální minimum v -1 s hodnotou $-\pi/2$, konvexní na $(-1, 0)$ a $(1, +\infty)$, konkávní na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, asymptotou v $\pm\infty$ je přímka $y = 0$.

Cvičení č. 9

L'Hospitalovo pravidlo, Taylorova věta, opakování

L'Hospitalovo pravidlo; Taylorova věta a její využití k přibližným výpočtům.

Než se pustíte do počítání následujících příkladů, připomeňte si předpoklady **l'Hospitalova pravidla**.

Příklad 9.1: Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte následující limity.

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1+\ln x}{1-x^2},\quad b)\ \lim_{x\to 0} x\ln x^2,\quad c)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x}{x^{-1}}.$$

Řešení.

a) Limita je typu $\frac{0}{0}$, $1-x^2$ a $-2x$ jsou nenulové na okolí bodu 1 pro $x \neq 1$ a jak hned nahlédneme, limita podílu derivací existuje. Proto je následující výpočet oprávněný

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1+\ln x}{1-x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{1}{x}}{-2x} = \frac{2}{-2} = -1.$$

b) Nejprve výraz upravíme (jedním z dvou možných způsobů, druhý by zde nepomohl),

$$x\ln x^2 = \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}}.$$

Pokud $x \to 0$, pak limita čitatele je $-\infty$ a limita jmenovatele neexistuje. Protože ale $\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$, $\frac{1}{x}$ a $-\frac{1}{x^2}$ je nenulové na okolí 0 pro $x \neq 0$ a jak ihned ověříme, limita podílu derivací existuje, můžeme l'Hospitalovo pravidlo použít. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-2x) = 0.$$

c) Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$. Podobně jako v předchozím příkladě je jmenovatel $\frac{1}{x}$ i jeho derivace $-\frac{1}{x^2}$ nenulová pro $x \neq 0$ a navíc limita podílu derivací existuje, jak vidíme v následujícím výpočtu

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x}{x^{-1}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = -\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = -1.$$

Příklad 9.2: Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte limity

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg} x}-\cos x}{x+\sin x},\quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1},\quad c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Řešení.

a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg} x}-\cos x}{x+\sin x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}e^{\operatorname{arctg} x}+\sin x}{1+\cos x}=\frac{\frac{1}{1+0}e^0+0}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Předpoklady pro použití l'Hospitala jsou splněny: limita je typu $\frac{0}{0}$, limita podílu derivací existuje, $x\sin x$ i $1+\cos x$ jsou nenulové na okolí 0 pro $x\neq 0$.

b) V tomto případě lze použít buď „přímý" výpočet,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

nebo alternativně můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Limita je totiž typu $\frac{0}{0}$, x^3-1 i $3x^2$ jsou nenulové pro $x\in(0,2)$, $x\neq 1$, a limita podílu derivací existuje,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

c) Jedná se o limitu typu $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\sqrt{x}$ i $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ jsou nenulové pro $x>0$ a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

Příklad 9.3: Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte následující limity.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x},\quad b)\ \lim_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2},\quad c)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Řešení. Zde už jenom stručně (doplňte ověření předpokladů!)

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}$$
$$\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2+\ln x}=\frac{1}{2}.$$

Příklad 9.4: Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}$$

pro libovolné $\varepsilon>0$.

Řešení. Jedná se sice o limitu posloupnosti, ale pomocí Heineho věty k jejímu výpočtu můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Podrobněji, následující výpočet limity funkce,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0,$$

je korektní, protože jsme l'Hospitalovo pravidlo použili na limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$ a limita podílu derivací existuje (uvažujeme $\varepsilon > 0$!).

Posloupnost (n) zřejmě konverguje do $+\infty$ a proto podle Heineho věty a předchozího výpočtu platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0.$$

Zopakujme si znění **Taylorovy věty**. Z přednášky známe n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a. Taylorova věta tvrdí:
Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f je spojitá do n-té derivace na okolí H_a bodu a a nechť $f^{(n+1)}(x)$ existuje pro $x \in H_a$. Potom pro libovolné $x \in H_a$ existuje bod ξ ležící mezi body a a x tak, že platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Poslední člen, $f(x) - T_{n,a}(x) =: R_{n,a}(x)$, nazýváme **Lagrangeovým zbytkem**. Zdůrazněme, že hodnota ξ závisí na volbě x a n.

Pokud $a = 0$ pak v rámci zjednodušení značení tento bod neuvádíme v dolních indexech. Tj. Píšeme T_n místo $T_{n,0}$ a R_n místo $R_{n,0}$.

Příklad 9.5: Pro funkci $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ nalezněte 5. Taylorův polynom v bodě 0.

Řešení. Pro účely derivování upravíme $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. Nyní snadno napočteme prvních pět derivací:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\; f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},\; f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5},\; f^{(5)}(x) = -\frac{120}{(x+1)^6}.$$

Po dosazení $x = 0$, dostaneme následující Taylorův polynom:

$$T_5(x) = 2 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5.$$

Příklad 9.6: Pro funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ nalezněte 3. Taylorův polynom v bodě 0.

Řešení. Pro první tři derivace máme:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\; f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},\; f'''(x) = 2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

Jelikož $f(0) = f''(0) = 0$, shrnujeme, že hledaný Taylorův polynom je

$$T_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Domácí cvičení 9.7: Pro funkci $f(x) = \arcsin x$ nalezněte 3. Taylorův polynom v bodě 0.

Domácí cvičení 9.8: Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nalezněte 5. Taylorův polynom v bodě 0.

Následující tři příklady ukazují různé způsoby použití Taylorovy věty.

Příklad 9.9: Odhadněte chybu ve výpočtu $\sin x$ pomocí polynomu $x - \frac{x^3}{6}$ pro $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.
Nápověda: Ukažte, že $x - \frac{x^3}{6}$ jsou první dva nenulové členy Taylorova polynomu pro funkci $\sin x$, a rozdíl odhadněte pomocí Lagrangeova tvaru zbytku.

Řešení. Snadno ověříme, že $x - \frac{x^3}{6}$ je skutečně 3-tí Taylorův polynom (zaznělo i na přednášce), přitom $T_3(x) = T_4(x)$. Pro absolutní hodnotu Lagrangeova zbytku po T_4 máme

$$|R_4(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \right| = \left| \frac{\cos \xi}{5!} x^5 \right| \le \frac{1}{2^5\, 5!} \approx 0.000260417$$

pro všechna $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Příklad 9.10: Pro jaká x je absolutní hodnota chyby přibližného vyjádření $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ menší než 10^{-4}?
Nápověda: Viz nápověda pro úlohu 9.9.

Řešení. Snadno ukážeme, že $T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ (rovněž zaznělo na přednášce). Lagrangeův zbytek odhadneme podobně jako výše:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{\cos \xi}{4!} x^4 \right| \le \frac{x^4}{4!}.$$

Požadujeme, aby $\frac{x^4}{4!} < 10^{-4}$, odtud

$$|x| < \frac{\sqrt[4]{24}}{10} \approx 0.22.$$

Příklad 9.11: Jak velké n musíte zvolit, aby chyba při výpočtu $f(x) = \ln(1+x)$ pomocí n-tého Taylorova polynomu funkce f v bodě 0 na intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$ byla menší než 10^{-6}? Vypočtěte i příslušný Taylorův polynom.

Řešení. Nejprve musíme nalézt příslušný Taylorův polynom. Pro derivace funkce f platí

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Z toho již nahlédneme, že

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k} \quad \text{a} \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Navíc $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$. n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě 0 proto je

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Pro absolutní hodnotu chyby po n-tém Taylorově polynomu platí

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

Je-li $x \in \langle 0, 1/2 \rangle$, pak jistě

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{(1+0)^{n+1}} \cdot \frac{1/2^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)}.$$

První n, které splňuje $\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} < 10^{-6}$ je $n = 15$.

Domácí cvičení 9.12: Vypočtěte následující limity

$$a) \lim_{x \to 1} \frac{\sin^3(x-1)}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}, \quad b) \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{8+x} - 2}.$$

a) $\frac{1}{3}$, b) 6.

Domácí cvičení 9.13: Nalezněte pátý Taylorův polynom funkce $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 3$ v bodě 0.

Je k nalezení na této stránce.

Domácí cvičení 9.14: Najděte třetí Taylorův polynom funkce $f(x) = \arcsin(x)$ v bodě 0.

$T_3(x) = x + \dfrac{1}{6} x^3.$

Domácí cvičení 9.15: Najděte n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = xe^x$ v bodě 0.

$T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k.$

Domácí cvičení 9.16: Najděte $2n$-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ v bodě 0.

$T_{2n}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$

Domácí cvičení 9.17: Pomocí příslušného Taylorova polynomu funkce $f(x) = e^x$ druhého stupně vypočtěte přibližnou hodnotu $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ a odhadněte chybu tohoto přibližného výsledku.

$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $T_2(-1/4) = 25/32 \approx 0.781250$, $\left| e^{-1/4} - T_2(-1/4)) \right| \le \frac{1 \cdot (1/4)^3}{3!} \approx 0.00260$

Domácí cvičení 9.18: Pomocí Taylorova polynomu čtvrtého stupně v bodě 0 funkce $f(x) = \ln(1+x)$ nalezněte přibližnou hodnotu $\ln(1.5)$. Chybu v tomto případě nemusíte odhadovat.

$T_4(1/2) = 77/192 \approx 0.401042.$

Domácí cvičení 9.19: Jaký stupeň musí mít Taylorův polynom $T_n(x)$ v bodě 0 funkce $f(x) = \ln(1+x)$ aby se na intervalu $(-1/2, 1/2)$ funkční hodnoty f a T_n lišily nejvíce o 0.1?

$n = 9.$

Cvičení č. 10

Neurčitý integrál

Primitivní funkce, substituce, per partes.

Připomeňte si definici **primitivní funkce** a pravidla pro integrování součtu a součinu (linearita). Zdůrazněme, že na rozdíl od derivovaní není obecné poučky pro integraci součinu!

Příklad 10.1: Nalezněte primitivní funkci k funkci $\left(2+x^3\right)^2$.

Řešení.

$$\int \left(2+x^3\right)^2 \mathrm{d}x = \int 4+4x^3+x^6 \,\mathrm{d}x = 4x+x^4+\frac{x^7}{7}+C.$$

Příklad 10.2: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{3/4}-x^{-5/4}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-1/4}+C.$$

Poznamenejme, že primitivní i integrovaná funkce jsou definovány jen pro $x>0$.

Příklad 10.3: Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Řešení.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x-\operatorname{arctg}x+C.$$

V souvislosti s úlohou výše upozorňujeme, že se znalostí integrování mocninných funkcí nevystačíme. Je nutné zapamatovat si tabulku integrálů elementárních funkcí, která je k nalezení v přednáškách. Jmenovitě zahrnuje primitivní funkce k funkcím

$$x^\alpha,\ b^x(b>0),\ \sin x,\ \cos x,\ \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{1}{\sin^2 x},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{1}{1+x^2}.$$

Rozeberme **větu o substituci v neurčitém integrálu** (první verze): Nechť pro funkce f a ϕ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a,b),
2. ϕ je na intervalu (α,β) diferencovatelná,

3. $\phi\big((\alpha,\beta)\big) \subset (a,b)$.

Potom funkce $f(\phi(t))\phi'(t)$ má na intervalu (α,β) primitivní funkci a platí

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = F(\phi(t)) + C.$$

Příklad 10.4: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = x+3,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x\} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x+3| + C.$$

Primitivní funkce existuje na množině $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Příklad 10.5: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = 2x-3\} = \frac{1}{2}\int u^{10}\mathrm{d}u = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C.$$

Příklad 10.6: Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\sqrt[15]{1+4x}.$$

Řešení.

$$\int \sqrt[15]{1+4x}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = 1+4x\} = \frac{1}{4}\int u^{1/15}\mathrm{d}u = \frac{15}{64}(1+4x)^{16/15} + C.$$

Primitivní funkce je definována na intervalu $(-\frac{1}{4}, \infty)$.

Příklad 10.7: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = \mathrm{e}^x\} = \int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \operatorname{arctg}\mathrm{e}^x + C.$$

Příklad 10.8: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.
$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \left\{\text{sub: } u = x^2\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Příklad 10.9: Nalezněte primitivní funkci k funkci
$$\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Řešení.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = \ln x\} = \int u^{-1/2}\mathrm{d}u = 2\sqrt{\ln x} + C.$$
Toto je primitivní funkcí pro $x > 1$.

Příklad 10.10: Zintegrujte
$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$
Nápověda: Integrujte per partes.
Řešení.
$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C.$$

Příklad 10.11: Zintegrujte
$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$
Nápověda: Integrujte per partes.
Řešení.
$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$
což implikuje, že
$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C.$$
Dalším možným způsobem výpočtu je použít formulku pro dvojnásobný úhel:
$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$$

Připomeňte si obecné schéma integrace racionálních lomených funkcí podrobně probrané v 10. přednášce.

Příklad 10.12: Zintegrujte
$$\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve vydělíme čitatel jmenovatelem, zbytek po dělení je obecně opět podíl dvou polynomů, přičemž polynom v čitateli zbytku je již nižšího stupně než polynom ve jmenovateli:

$$\frac{x^4}{x^2+x-2} = x^2 - x + 3 + \frac{-5x+6}{x^2+x-2}.$$

Pro integraci zbytku rozložíme jeho jmenovatel na kořenové činitele:

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

a poté celý zbytek na tzv. **parciální zlomky**:

$$\frac{-5x+6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + 2A - B}{x^2+x-2}.$$

Odtud nutně

$$A + B = -5,\ 2A - B = 6.$$

Řešením této soustavy je dvojice $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{16}{3}$. Nyní již snadno integrujeme

$$\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int x^2 - x + 3 + \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{16}{3}\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{16}{3}\ln|x+2| + C.$$

Toto je primitivní funkcí na $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

Příklad 10.13: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Po rozkladu na parciální zlomky (poznamenejme, že čitatel nad $1+x^2$ se hledá ve tvaru $Ax+B$):

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{1}{2}}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

Primitivní funkce je dána na množině $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Příklad 10.14: Zintegrujte

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož na $\mathbb{R}$, $3x^2+2 \neq 0$ (jinými slovy diskriminant odpovídající kvadratické rovnice je záporný), můžeme postupovat následovně:

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

Příklad 10.15: Zintegrujte

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož je diskriminant pro rovnici $x^2 + x + 1 = 0$ opět záporný, postupujeme jako výše (tzv. úprava na čtverec):

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x + \frac{1}{2})\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Příklad 10.16: Zintegrujte

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Nápověda: Vhodnou substitucí převeďte na integrál z racionální lomené funkce.

Řešení.

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } t = \sqrt{x}\} = \int \frac{2t}{1 + t}\,\mathrm{d}t = \int 2 - \frac{2}{1 + t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C.$$

Toto je primitivní funkce pro $x > 0$.

Domácí cvičení 10.17: Nalezněte primitivní funkce k funkcím

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int 10^y \mathrm{d}y$,

d) $\displaystyle\int a^x e^x \mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1 - z}{z}\right)^2 \mathrm{d}z$,

f) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

a) $\sqrt{x} + C$, b) $\frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{18}{7}x^{7/6} + \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{6}{13}x^{13/6} + C$, c) $\frac{10^y}{\ln 10} + C$, d) $\frac{a^x e^x}{1+\ln a} + C$, e) $-\frac{1}{z} - 2\ln|z| + z + C$, f) $-\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + C$, g) $\operatorname{tg} x - x + C$, h) $x - \sin x + C$.

Domácí cvičení 10.18: Nalezněte primitivní funkce k funkcím (využijte větu o substituci)

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x - 3)^5}\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2 + 1}\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x,$

e) $\displaystyle\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}\mathrm{d}x,$

f) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x,$

g) $\displaystyle\int \sin(2x-3)\mathrm{d}x,$

h) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$

j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,$

l) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x,$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6+4}\mathrm{d}x,$

n) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+9}\mathrm{d}x,$

o) $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\mathrm{d}x,$

p) $\displaystyle\int xe^{x^2}\mathrm{d}x,$

q) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\mathrm{d}x.$

a) $-\frac{1}{8}\frac{1}{(2x-3)^4}+C$, b) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$, c) $-\frac{2}{6}(1-x^2)^{3/2}+C$, d) $\frac{3}{8}(x^4+1)^{2/3}+C$, e) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$, f) $\frac{1}{\cos x}+C$, g) $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$, h) $\frac{1}{3}(\operatorname{arctg} x)^3+C$, i) $-\frac{1}{2}\frac{1}{(\arcsin x)^2}+C$, j) $\ln\left(1+e^x\right)+C$ k) $\ln(\ln x)+C$, l) $-\ln(1+\cos^2 x)+C$, m) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$, n) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{3}+C$, o) $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x$, p) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$, q) $\ln|\sin(x)|+C$.

Domácí cvičení 10.19: Zintegrujte

a) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x,$

b) $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$

a) $-\dfrac{1+\ln x}{x}+C$, b) $\dfrac{e^x}{2}\left(\sin x+\cos x\right)$

Domácí cvičení 10.20: Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int \arccos x \,\mathrm{d}x$,

b) $\int x\cos^2 x \,\mathrm{d}x$,

c) $\int \ln^2(x) \,\mathrm{d}x$,

d) $\int x^2 \ln(1+x) \,\mathrm{d}x$,

e) $\int \sin\ln x \,\mathrm{d}x$,

f) $\int x^2 a^x \,\mathrm{d}x$,

a) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$, b) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$, c) $x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$, d) $-\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1+x^3}{3}\ln(1+x) + C$, e) $\frac{x}{2}\Big(\sin\ln x - \cos\ln x\Big) + C$, f) $\frac{x^2 a^x}{\ln a} - \frac{2xa^x}{\ln^2 a} + \frac{2a^x}{\ln^3 a} + C$.

Domácí cvičení 10.21: Zintegrujte

a) $\int \frac{x^2}{2x^2+1} \,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{2}{5x^2+3} \,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{2x^2+2x+1} \,\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{x-1}{x^2-x-2} \,\mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{x^3-x}{x^2-x-2} \,\mathrm{d}x$.

a) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{2}x\Big) + C$, b) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right) + C$, c) $\operatorname{arctg}\Big(2x+1\Big) + C$, d) $\frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + C$, e) $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-2| + C$.

Cvičení č. 11

Určitý integrál

Riemannův určitý integrál; výpočet obsahů ploch ohraničených křivkami; objem a obsah rotačního tělesa; délka křivky.

Příklad 11.1: Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Příklad 11.2: Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \arccos x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int_0^1 \arccos x \,\mathrm{d}x = [x \arccos x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \left\{\text{sub: } t = 1 - x^2\right\} = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-1/2} \mathrm{d}t = 1.$$

Zamyslete se, proč předchozí dvě úlohy nutně vedly k témuž výsledku.

Příklad 11.3: Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln 5} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int_0^{\ln 5} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^{\ln 5} = 4.$$

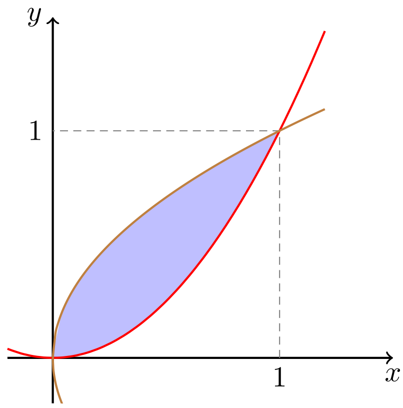
Příklad 11.4: Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = x^2,\; y^2 = x.$$

Řešení. Plocha vymezená křivkami je znázorněna na obrázku 11.1. Její velikost, S, odvodíme z geometrické interpretace Riemannova integrálu:

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Obrázek 11.1: $(x, y) : x^2 < y < \sqrt{x}$



Příklad 11.5: Určete plochu kruhové výseče příslušnou středovému úhlu α.

Řešení. Uvažujme půlkruh o poloměru R: $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$. Jeho hranicí jsou grafy funkcí $y = 0$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Odtud pro jeho plochu, S, pomocí integrace per partes dostaneme:

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = R^2[t\sqrt{1 - t^2}]_{-1}^{1} + R^2 \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= -R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t + R^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = -S + R^2\pi$$

a tedy $S = R^2\pi/2$. Alternativně můžeme použít substituci $x = R \sin t$:

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos(t) \cdot R\cos(t)\,\mathrm{d}t = R^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= R^2 \Big[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big]_{0}^{\pi/2} = R^2\pi/2.$$

Plocha výseče je potom $R^2\alpha/2$ (lineární závislost).

Připomeňte si obecnou formuli pro výpočet objemu rotačního tělesa. „Odvoďte“ ji jako součet objemů válců infinitezimální výšky dx. Vizte obrázek 11.3. Objem tělesa vzniklého rotací plochy mezi osou x a grafem funkce f kolem osy x lze vypočíst pomocí vzorce

$$V = \pi \int_{a}^{b} f(x)^2 \mathrm{d}x.$$

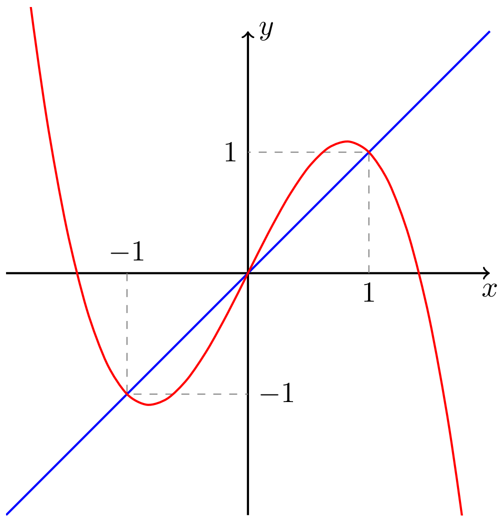
Příklad 11.6: Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami

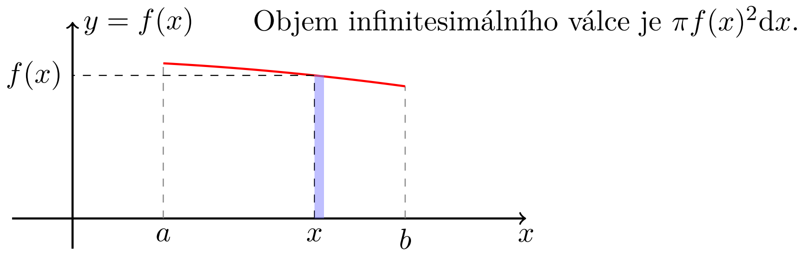
$$y = x, \;\; y = 2x - x^3$$

kolem osy x.

Řešení. Snadno zjistíme, že společné průsečíky křivek jsou body $[0, 0]$, $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ (viz obrázek 11.2). Pro objem rotačního tělesa, V, dostaneme:

Obrázek 11.2: Grafy funkcí $y(x) = x$ a $y(x) = 2x - x^3$





Obrázek 11.3: Objem rotačního tělesa.

$$V = 2\pi \int_0^1 (2x - x^3)^2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{24}{35}\pi.$$

Příklad 11.7: Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací kruhu

$$x^2 + (y - 3)^2 \leq 1$$

kolem osy x. Jedná se tedy o objem jisté „pneumatiky".

Řešení. Daný kruh má střed o souřadnicích $[0, 3]$ a poloměr velikosti 1. Přitom je ohraničen polokružnicemi

$$y_\pm(x) = 3 \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Z obecné formule pro objem rotačního tělesa potom plyne

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[y_+(x)^2 - y_-(x)^2 \right] \,\mathrm{d}x = 12\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x = 6\pi^2,$$

kde jsme využili výsledku z úlohy 11.5.

Připomeňte si obecnou formuli pro výpočet povrchu rotačního tělesa. „Odvoďte“ ji jako součet povrchů plášťů válců výšky $\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ (tzv. element délky křivky).

Příklad 11.8: Spočtěte povrch tělesa z úlohy 11.7.

Řešení. Povrch spočítáme jakožto součet dvou povrchů, jednoho vzniklého rotací křivky y_+ a druhého vzniklého rotací křivky y_-, tedy

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{-1}^{1} y_+(x)\sqrt{1+y_+'(x)^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi\int_{-1}^{1} y_-(x)\sqrt{1+y_-'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_{-1}^{1}(y_+(x)+y_-(x))\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 12\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 12\pi^2. \end{aligned}$$

Příklad 11.9: Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací částí křivky $y = -x^2 + x + 2$ ležící nad osou x.

Řešení. Průsečíky paraboly s osou x jsou -1 a 2, její vrchol leží nad osou x, takže (při výpočtu je poměrně efektivní použít per partes)

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{2}\big(-x^2+x+2\big)^2\mathrm{d}x = \pi\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2\mathrm{d}x = \\ &= -\pi\frac{2}{3}\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^3\mathrm{d}x = \pi\frac{2}{3\cdot 4}\int_{-1}^{2}(x-2)^4\mathrm{d}x = \\ &= \pi\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}\Big[(x-2)^5\Big]_{-1}^{2} = \frac{81\pi}{10}. \end{aligned}$$

Na přednášce byla křivka v rovině zavedena jako zobrazení $F : t \mapsto \big(f(t),\, g(t)\big)$ definované na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ takové, že f a g jsou spojité reálné funkce na $\langle a,\, b\rangle$. Pokud jsou f a g navíc spojitě diferencovatelné, vypočteme délku křivky pomocí vzorečku

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 11.10: Vypočtěte obvod kruhu o poloměru R.

Řešení. Vhodnou parametrizací kruhu je například $F(t) = \big(R\cos(t),\, R\sin(t)\big)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Proto pro obvod kruhu O platí

$$O = \int_0^{2\pi}\sqrt{\big(-R\sin(t)\big)^2 + \big(R\cos(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = R\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi R.$$

Příklad 11.11: Vypočtěte délku křivky $F(t) = \Big(\sqrt{t},\, 1\Big)$, $t \in \langle 1, 4\rangle$.

Řešení. Podle vzorce

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{t} + 0}\,\mathrm{d}t = \Big[\sqrt{t}\Big]_1^4 = 2 - 1 = 1.$$

Což není překvapivé, protože se jedná o úsečku spojující body $(1,1)$ a $(2,1)$.

Příklad 11.12: Spočtěte délku části grafu funkce $y = x\sqrt{x}$ pro $0 \leq x \leq 4$.

Řešení.

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 (10^{3/2} - 1).$$

Diskutujte obecný vztah pro délku grafu funkce, tedy parametrizaci grafu funkce f na $\langle a, b\rangle$ pomocí $F(t) = (t, f(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$.

Domácí cvičení 11.13: Vypočtěte určité integrály

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 + 2t^3)^2 \mathrm{d}t,$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{1 + t^2}\mathrm{d}t,$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x$, kde $0 < a < b$,

e) $\displaystyle\int_{-1}^{3} xe^{-x}\mathrm{d}x,$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x,$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}}\mathrm{d}x,$

h) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x.$

a) $\frac{22}{7}$, b) $\frac{1}{2}\ln 5$, c) $\ln\sqrt{2}$, d) $a - b + \ln\frac{b^b}{a^a}$, e) $-4e^{-3}$, f) $\frac{4}{3}$, g) $\frac{5}{3} - \ln 4$, h) $\frac{\pi}{16}$.

Domácí cvičení 11.14: Vypočtěte plochy následujících útvarů:

a) elipsa se středem v bodě $[0, 0]$, hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b. (*Návod*: $a > b > 0$, Počítejte obsah jen části v prvním kvadrantu, využijte integraci per partes.)

b) parabolických dveří výšky 5 a šířky jednoho křídla 2. Vizte Obrázek 11.4.

c) plochy ohraničené křívkami $y = x^2$ a $y = 2 - x$

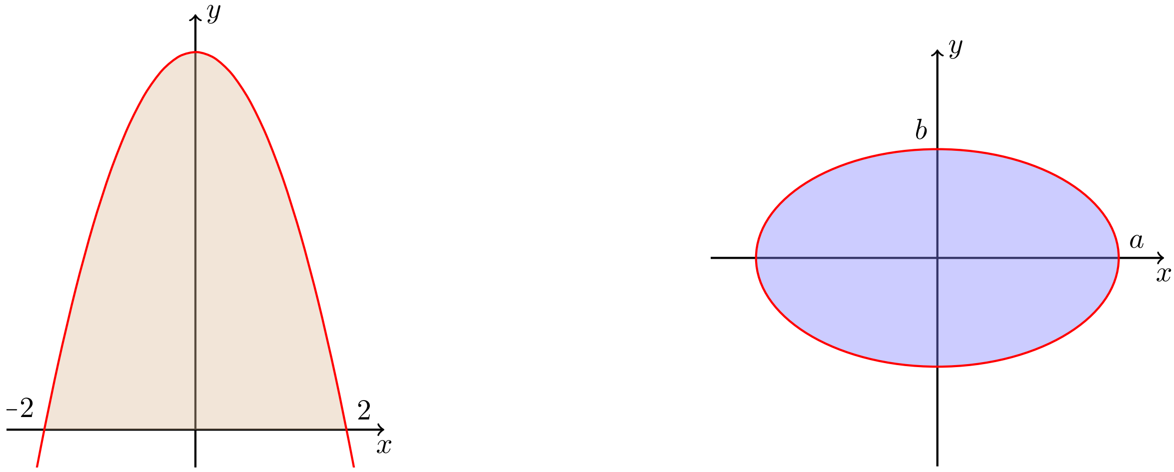
d) plochy ohraničené křivkami $y = x^2 - 2x - 3$ a $y = -x^2 + 6x - 3$.

a) πab, b) $\frac{40}{3}$, c) $\frac{9}{2}$, d) $\frac{64}{3}$.

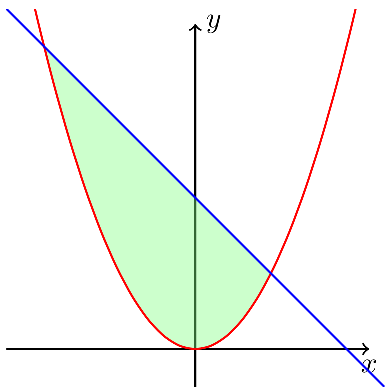
Domácí cvičení 11.15: Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu a objemu rotačního kužele o poloměru podstavy $R > 0$ a výšce $h > 0$.

$\frac{\pi}{3}R^2 h$.

Domácí cvičení 11.16: Vypočtěte objem a povrch koule o poloměru $R > 0$.



Obrázek 11.4: Vlevo: Parabolické dveře výšky 5 a šířky křídla 2. Křivka ohraničující tento útvar je parabola. Vpravo: Kruh o poloměru r a se středem $[0, 0]$.



Obrázek 11.5: Plocha z Domácího cvičení 11.14 c).

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

Domácí cvičení 11.17: Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené křivkami $y = x$ a $y = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$.

$\frac{\pi^2}{24}(\pi^2 - 6)$.

Domácí cvičení 11.18: Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací části paraboly $y = x^2$ okolo osy x nad intervalem $\langle 0, 1 \rangle$.

$V = \frac{\pi}{5}$.

Domácí cvičení 11.19: Nalezněte obsah plochy vzniklé rotací části křivky $y = x^3$ okolo osy x nad intervalem $\langle 0, 1 \rangle$.

$S = \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$.

Domácí cvičení 11.20: Vypočtěte délku části křivky $F(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{1}{3}(1 - 2t)^{3/2}\right)$, spojující body $(0, 1/3)$ a $(1/8, 0)$.

Prvnímu bodu odpovídá hodnota parametru $t = 0$ a druhému $t = \frac{1}{2}$. Takže

$$\ell = \int_0^{1/2} \sqrt{t^2 + 1 - 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}.$$