Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] `tomas.kalvoda@fit.cvut.cz`

Cvičení č. 1

Rozjezd

Sumační zápis, manipulace se sumami, důkaz matematickou indukcí, aritmetická a geometrická posloupnost, Pascalův trojúhelník, kombinační čísla.

Značení

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ .... přirozená čísla
$\mathbb{Z}$ .... celá čísla
$\mathbb{R}$ .... reálná čísla

Věnujme se nyní nejprve zkrácenému zápisu součtů a součinů. Mějme $n \in \mathbb{N}$, čísel, označme je a_1, a_2, $a_3, \ldots$, a_n. Součet (neboli **sumu**) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ zkráceně zapisujeme

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

kde i je tzv. **sčítací index**, který není pevný, ale narůstá po jedničce od **dolní meze** (v našem případě 1) až po **horní mez** (v našem případě n). Podobně lze zkráceně zapsat součin

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n =: \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Stejný součet lze zapsat mnoha různými způsoby, například platí (zdůvodněte!)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=3}^{n+2} a_{j-2}.$$

Příklad 1.1: Zapište součet zkráceně pomocí sumy

a) $-8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 0 + 1 + 2 + 3$,
b) $6 + 9 + 12 + 15 + 18 + \cdots + 72$,
c) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$,
d) $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64$,
e) $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16$.

Řešení. Uvádíme pouze jeden z možných zápisů.

$$\text{a)}\ \sum_{i=-8}^{3} i, \quad \text{b)}\ \sum_{i=2}^{24} 3i, \quad \text{c)}\ \sum_{i=1}^{8} i^2, \quad \text{d)}\ \sum_{i=1}^{8} (-1)^{i+1} i^2, \quad \text{e)}\ \sum_{i=-1}^{4} 2^i = \sum_{i=1}^{6} 2^{i-2}.$$

Příklad 1.2: Zapište součet c) příkladu 1.1 ve tvaru $\sum_{i=5}^{?} ?$.

Řešení. Opět uvádíme pouze výsledek.

$$\sum_{i=5}^{12} (i-4)^2.$$

Díky komutativnímu, asociativímu a distributivnímu zákonu platí

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha\, a_i = \alpha\, a_1 + \alpha\, a_2 + \ldots + \alpha\, a_n = \alpha(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.2}$$

Pro tyto vztahy je podstatné, že meze sčítacích indexů jsou shodné.

Nyní už umíme součet zkráceně zapsat. Často je snahou najít pro zadaný součet explicitní výsledek. Snad nejjednodušším součtem je součet konstantních členů, tj. je-li $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c \in \mathbb{R}$, pak triviálně platí

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n\text{-krát}} = n\, c.$$

Zaveďme nyní pojem aritmetické posloupnosti. Nekonečnou posloupnost čísel a_1, a_2, $a_3, \ldots$, kde druhý a každý další člen se získá přičtením konstanty (označme ji d) ke členu předchozímu, se nazývá **aritmetická posloupnost**. Platí tedy $a_{i+1} = a_i + d,\ i = 1, 2, 3, \ldots$.

Příklad 1.3: Sečtěte prvních n členů aritmetické posloupnosti 1, 2, 3, ... (tj. $a_1 = 1$, $d = 1$).

Řešení.

$$S_n := 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

Sčítáme-li stejná čísla v opačném pořadí pak zjevně platí

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i)$$

a proto podle (1.1)

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) = \sum_{i=1}^{n} (n+1) = n(n+1),$$

z čehož plyne

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.3}$$

Příklad 1.4: S pomocí výsledku předchozího příkladu sečtěte prvních n členů aritmetické posloupnosti s koeficienty a_1 a d.

Řešení.

$$s_n := a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) = \sum_{i=1}^{n}(a_1 + (i-1)d) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_1 + d\sum_{i=1}^{n}(i-1) = n\, a_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2} = n\frac{a_1 + (a_1 + (n-1)d)}{2} = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Součet aritmetické posloupnosti je tedy dán násobkem počtu členů s průměrnou hodnotou prvního a posledního členu. Vzoreček najde uplatnění v karbanu, chceme-li rychle sečíst hodnotu postupky!

Příklad 1.5: Sečtěte

$$\text{a)}\ \sum_{i=1}^{30}(2i-1), \quad \text{b)}\ \sum_{k=-2}^{5}(4k+1) \quad \text{c)}\ \sum_{i=5}^{11} 2i + \sum_{i=5}^{10}(1-2i).$$

a) 900, b) 56, c) 28.

Zaveďme pojem geometrické posloupnosti. Nekonečnou posloupnost čísel a_1, a_2, $a_3, \ldots$, kde druhý a každý další člen se získá násobením předchozího členu konstantou (tzv. **kvocientem**, označme jej zde q), se nazývá **geometrická posloupnost**. Platí tedy $a_{i+1} = a_i q,\ i = 1, 2, 3, \ldots$.

Příklad 1.6: Sečtěte prvních n členů geometrické posloupnosti.

Řešení. V rámci řešení procvičíme i manipulaci se sumami.

$$S_n := a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1 \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = a_1 \sum_{i=0}^{n-1} q^i =$$
$$= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n - a_1 q^n =$$
$$= a_1 + q(a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}) - a_1 q^n = a_1 + q\, S_n - a_1 q^n$$

a tedy

$$a_1 q^n - a_1 = q\, S_n - S_n$$

čili pro $q \neq 1$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Jaký je výsledek pro $q = 1$?

Příklad 1.7: Sečtěte $\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\, 3^{i+2}\right)$.

Řešení.

$$\sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\, 3^{i+2}\right) = -\frac{1}{2}\, 3^2 \sum_{i=0}^{n} 3^i = -\frac{1}{2}\, 3^2 \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}.$$

Příklad 1.8: Sečtěte

$$\text{a)}\ \sum_{j=1}^{n} 3^{-j}, \quad \text{b)}\ \sum_{i=-1}^{4} 2^{i-1}, \quad \text{c)}\ \sum_{k=1}^{6}(-1)^k 2^{k+1}, \quad \text{d)}\ \sum_{\ell=0}^{n} q^{\ell},\ \text{kde } q \neq 1.$$

a) $\frac{3^{-n}}{2}(3^n-1)$ b) $\frac{63}{4}$ c) 84, d) $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Příklad 1.9: Tenisového turnaje hraného obvyklým způsobem se zúčastnilo 2^n, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, hráčů. Kolik utkání se odehrálo?

Řešení. Jelikož v každém utkání vypadne právě jeden hráč a neporažen zůstane jen absolutní vítěz, odehrálo se $2^n - 1$ utkání.

Úlohu můžeme řešit i hrubou silou. V prvním kole se hrálo $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ utkání, v druhém potom $\frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$, atd. Poslední n-té kolo tvořilo pouze $1 = 2^0$ (finálové) utkání. Celkový počet utkání je tedy dán součtem prvních n členů geometrické řady s kvocientem 2 a prvním členem $a_1 = 1$, tj.

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Připomeňme princip **důkazu matematickou indukcí**. Chceme ukázat platnost výroku $A(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To lze provést ve dvou krocích. V prvním dokážeme platnost $A(1)$ a v druhém ukážeme, že pravdivost $A(n)$ implikuje pravdivost $A(n+1)$.

Příklad 1.10: Dokažte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, pro $n \in \mathbb{N}\{0\}$, matematickou indukcí.

Řešení. Dva kroky matematické indukce:

1. krok Pro $n = 1$ zjevně platí

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1.$$

2. krok Předpokládejme platnost formule pro n. Potom

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Připomeňme „vzorce“:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2),\\
a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3).
\end{aligned}$$

Příklad 1.11: Dokažte

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Řešení. Důkaz samozřejmě provedeme matematickou indukcí. První krok je zřejmý. Nechť nyní formule platí pro n. Ukážeme její platnost pro $n+1$.

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= a(a^n - b^n) + ab^n + b(a^n - b^n) - ba^n = (a+b)(a^n - b^n) + ab^n - ba^n = \\
&= \{\text{indukční přepoklad}\} = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1}(a^{i+1}b^{n-1-i} + a^i b^{n-i}) + ab^n - ba^n = \\
&= (a-b)\left(\sum_{i=1}^{n} a^i b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i}\right) + ab^n - ba^n \\
&= 2(a-b)\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} - (a-b)b^n - (a-b)a^n + ab^n - ba^n \\
&= 2(a-b)\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} - (a^{n+1} - b^{n+1})
\end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}.$$

Zaveďme **Pascalův trojúhelník** jakožto následující schéma:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & \text{atd.} & & & &
\end{array}$$

Každý nehraniční prvek je součtem dvou nad ním stojících prvků, hraniční prvky jsou jedničky. Označme k-tý prvek (počítáno od 0) v n-tém řádku (počítáno rovněž od 0) symbolem $\binom{n}{k}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Z definice Pascalova trojúhelníku potom platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

pro $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Příklad 1.12: Dokažte, že prvky Pascalova trojúhelníku jsou kombinační čísla, tj.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Řešení. Důkaz provedeme matematickou indukcí po řádcích. Pro nultý i první řádek formule zjevně platí, stejně tak na hranách, kde dává jedničku. Ukážeme platnost formule mimo hrany

$n+1$-řádku za předpokladu její platnosti na řádku n-tém.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \{\text{indukční předpoklad}\} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} +$$
$$+ \frac{n+1-k}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

Příklad 1.13: Pomocí matematické indukce dokažte binomickou větu: pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$