Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 10

Neurčitý integrál

Primitivní funkce, substituce, per partes.

Připomeňte si definici **primitivní funkce** a pravidla pro integrování součtu a součinu (linearita). Zdůrazněme, že na rozdíl od derivovaní není obecné poučky pro integraci součinu!

Příklad 10.1: Nalezněte primitivní funkci k funkci $(2+x^3)^2$.

Řešení.

$$\int (2+x^3)^2 \,\mathrm{d}x = \int 4 + 4x^3 + x^6 \,\mathrm{d}x = 4x + x^4 + \frac{x^7}{7} + C.$$

Příklad 10.2: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int x^{3/4} - x^{-5/4} \,\mathrm{d}x = \frac{4}{7}x^{7/4} + 4x^{-1/4} + C.$$

Poznamenejme, že primitivní i integrovaná funkce jsou definovány jen pro $x > 0$.

Příklad 10.3: Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Řešení.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

V souvislosti s úlohou výše upozorňujeme, že se znalostí integrování mocninných funkcí nevystačíme. Je nutné zapamatovat si tabulku integrálů elementárních funkcí, která je k nalezení v přednáškách. Jmenovitě zahrnuje primitivní funkce k funkcím

$$x^\alpha,\ b^x (b > 0),\ \sin x,\ \cos x,\ \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{1}{\sin^2 x},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{1}{1+x^2}.$$

Rozeberme **větu o substituci v neurčitém integrálu** (první verze): Nechť pro funkce f a ϕ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a,b),
2. ϕ je na intervalu (α,β) diferencovatelná,

3. $\phi\big((\alpha,\beta)\big) \subset (a,b)$.

Potom funkce $f(\phi(t))\phi'(t)$ má na intervalu (α,β) primitivní funkci a platí

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = F(\phi(t)) + C.$$

Příklad 10.4: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = x+3,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x\} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x+3| + C.$$

Primitivní funkce existuje na množině $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Příklad 10.5: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = 2x-3\} = \frac{1}{2}\int u^{10}\mathrm{d}u = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C.$$

Příklad 10.6: Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\sqrt[15]{1+4x}.$$

Řešení.

$$\int \sqrt[15]{1+4x}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = 1+4x\} = \frac{1}{4}\int u^{1/15}\mathrm{d}u = \frac{15}{64}(1+4x)^{16/15} + C.$$

Primitivní funkce je definována na intervalu $(-\frac{1}{4}, \infty)$.

Příklad 10.7: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = \mathrm{e}^x\} = \int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \operatorname{arctg} \mathrm{e}^x + C.$$

Příklad 10.8: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \Big\{\text{sub: } u = x^2\Big\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Příklad 10.9: Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Řešení.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } u = \ln x\} = \int u^{-1/2}\mathrm{d}u = 2\sqrt{\ln x} + C.$$

Toto je primitivní funkcí pro $x > 1$.

Příklad 10.10: Zintegrujte

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nápověda: Integrujte per partes.

Řešení.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C.$$

Příklad 10.11: Zintegrujte

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Nápověda: Integrujte per partes.

Řešení.

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

což implikuje, že

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C.$$

Dalším možným způsobem výpočtu je použít formulku pro dvojnásobný úhel:

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$$

Připomeňte si obecné schéma integrace racionálních lomených funkcí podrobně probrané v 10. přednášce.

Příklad 10.12: Zintegrujte

$$\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve vydělíme čitatel jmenovatelem, zbytek po dělení je obecně opět podíl dvou polynomů, přičemž polynom v čitateli zbytku je již nižšího stupně než polynom ve jmenovateli:

$$\frac{x^4}{x^2+x-2} = x^2 - x + 3 + \frac{-5x+6}{x^2+x-2}.$$

Pro integraci zbytku rozložíme jeho jmenovatel na kořenové činitele:

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

a poté celý zbytek na tzv. **parciální zlomky**:

$$\frac{-5x+6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + 2A - B}{x^2+x-2}.$$

Odtud nutně

$$A + B = -5,\ 2A - B = 6.$$

Řešením této soustavy je dvojice $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{16}{3}$. Nyní již snadno integrujeme

$$\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int x^2 - x + 3 + \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{16}{3}\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{16}{3}\ln|x+2| + C.$$

Toto je primitivní funkcí na $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Příklad 10.13: Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Po rozkladu na parciální zlomky (poznamenejme, že čitatel nad $1 + x^2$ se hledá ve tvaru $Ax + B$):

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{1}{2}}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

Primitivní funkce je dána na množině $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Příklad 10.14: Zintegrujte

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož na $\mathbb{R}$, $3x^2 + 2 \neq 0$ (jinými slovy diskriminant odpovídající kvadratické rovnice je záporný), můžeme postupovat následovně:

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

Příklad 10.15: Zintegrujte

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož je diskriminant pro rovnici $x^2 + x + 1 = 0$ opět záporný, postupujeme jako výše (tzv. úprava na čtverec):

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x + \frac{1}{2})\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Příklad 10.16: Zintegrujte

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Nápověda: Vhodnou substitucí převeďte na integrál z racionální lomené funkce.

Řešení.

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \{\text{sub: } t = \sqrt{x}\} = \int \frac{2t}{1 + t}\,\mathrm{d}t = \int 2 - \frac{2}{1 + t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1 + \sqrt{x}\right) + C.$$

Toto je primitivní funkce pro $x > 0$.

Domácí cvičení 10.17: Nalezněte primitivní funkce k funkcím

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int 10^y \mathrm{d}y$,

d) $\displaystyle\int a^x e^x \mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1 - z}{z}\right)^2 \mathrm{d}z$,

f) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

a) $\sqrt{x} + C$, b) $\frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{18}{7}x^{7/6} + \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{6}{13}x^{13/6} + C$, c) $\frac{10^y}{\ln 10} + C$, d) $\frac{a^x e^x}{1+\ln a} + C$, e) $-\frac{1}{z} - 2\ln|z| + z + C$, f) $-\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + C$, g) $\operatorname{tg} x - x + C$, h) $x - \sin x + C$.

Domácí cvičení 10.18: Nalezněte primitivní funkce k funkcím (využijte větu o substituci)

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x - 3)^5}\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2 + 1}\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x,$

e) $\displaystyle\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}\mathrm{d}x,$

f) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x,$

g) $\displaystyle\int \sin(2x-3)\mathrm{d}x,$

h) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$

j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,$

l) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x,$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6+4}\mathrm{d}x,$

n) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+9}\mathrm{d}x,$

o) $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\mathrm{d}x,$

p) $\displaystyle\int xe^{x^2}\mathrm{d}x,$

q) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\mathrm{d}x.$

a) $-\frac{1}{8}\frac{1}{(2x-3)^4}+C$, b) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$, c) $-\frac{2}{6}(1-x^2)^{3/2}+C$, d) $\frac{3}{8}(x^4+1)^{2/3}+C$, e) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$, f) $\frac{1}{\cos x}+C$, g) $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$, h) $\frac{1}{3}(\operatorname{arctg} x)^3+C$, i) $-\frac{1}{2}\frac{1}{(\arcsin x)^2}+C$, j) $\ln\left(1+e^x\right)+C$ k) $\ln(\ln x)+C$, l) $-\ln(1+\cos^2 x)+C$, m) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$, n) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{3}+C$, o) $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x$, p) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$, q) $\ln|\sin(x)|+C$.

Domácí cvičení 10.19: Zintegrujte

a) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x,$

b) $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$

a) $-\dfrac{1+\ln x}{x}+C$, b) $\dfrac{e^x}{2}\left(\sin x+\cos x\right)$

Domácí cvičení 10.20: Vypočtěte neurčité integrály

a) $\displaystyle\int \arccos x \,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int x\cos^2 x \,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int \ln^2(x) \,\mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int x^2\ln(1+x) \,\mathrm{d}x,$

e) $\displaystyle\int \sin\ln x \,\mathrm{d}x,$

f) $\displaystyle\int x^2 a^x \,\mathrm{d}x,$

a) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$, b) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$, c) $x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$, d) $-\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1+x^3}{3}\ln(1+x) + C$, e) $\frac{x}{2}\Big(\sin\ln x - \cos\ln x\Big) + C$, f) $\frac{x^2a^x}{\ln a} - \frac{2xa^x}{\ln^2 a} + \frac{2a^x}{\ln^3 a} + C.$

Domácí cvičení 10.21: Zintegrujte

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{2x^2+1} \,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{5x^2+3} \,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+2x+1} \,\mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-2} \,\mathrm{d}x,$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2-x-2} \,\mathrm{d}x.$

a) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{2}x\Big) + C$, b) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right) + C$, c) $\operatorname{arctg}\Big(2x+1\Big) + C$, d) $\frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + C$, e) $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-2| + C.$