Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 11

Určitý integrál

Riemannův určitý integrál; výpočet obsahů ploch ohraničených křivkami; objem a obsah rotačního tělesa; délka křivky.

Příklad 11.1: Vypočtěte integrál
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Příklad 11.2: Vypočtěte integrál
$$\int_0^1 \arccos x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.
$$\int_0^1 \arccos x \,\mathrm{d}x = [x \arccos x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \left\{\text{sub: } t = 1-x^2\right\} = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-1/2}\mathrm{d}t = 1.$$

Zamyslete se, proč předchozí dvě úlohy nutně vedly k témuž výsledku.

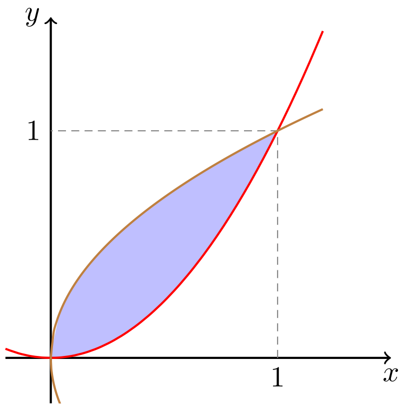
Příklad 11.3: Vypočtěte integrál
$$\int_0^{\ln 5} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.
$$\int_0^{\ln 5} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^{\ln 5} = 4.$$

Příklad 11.4: Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami
$$y = x^2,\ y^2 = x.$$

Řešení. Plocha vymezená křivkami je znázorněna na obrázku 11.1. Její velikost, S, odvodíme z geometrické interpretace Riemannova integrálu:
$$S = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Obrázek 11.1: $(x, y) : x^2 < y < \sqrt{x}$



Příklad 11.5: Určete plochu kruhové výseče příslušnou středovému úhlu α.

Řešení. Uvažujme půlkruh o poloměru R: $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$. Jeho hranicí jsou grafy funkcí $y = 0$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Odtud pro jeho plochu, S, pomocí integrace per partes dostaneme:

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = R^2[t\sqrt{1 - t^2}]_{-1}^{1} + R^2 \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= -R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t + R^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = -S + R^2\pi$$

a tedy $S = R^2\pi/2$. Alternativně můžeme použít substituci $x = R \sin t$:

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos(t) \cdot R\cos(t)\,\mathrm{d}t = R^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= R^2 \Big[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} = R^2\pi/2.$$

Plocha výseče je potom $R^2\alpha/2$ (lineární závislost).

Připomeňte si obecnou formuli pro výpočet objemu rotačního tělesa. „Odvoďte“ ji jako součet objemů válců infinitezimální výšky dx. Vizte obrázek 11.3. Objem tělesa vzniklého rotací plochy mezi osou x a grafem funkce f kolem osy x lze vypočíst pomocí vzorce

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x.$$

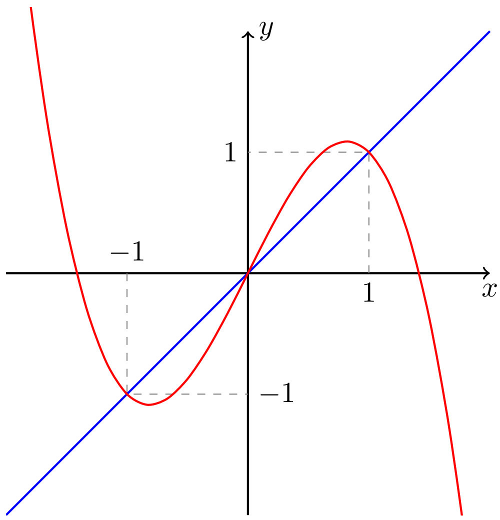
Příklad 11.6: Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkami

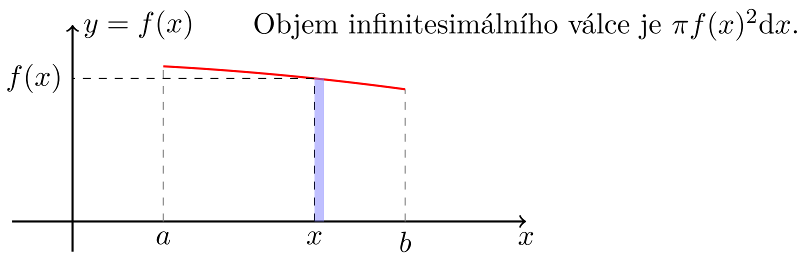
$$y = x, \;\; y = 2x - x^3$$

kolem osy x.

Řešení. Snadno zjistíme, že společné průsečíky křivek jsou body $[0, 0]$, $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ (viz obrázek 11.2). Pro objem rotačního tělesa, V, dostaneme:

Obrázek 11.2: Grafy funkcí $y(x) = x$ a $y(x) = 2x - x^3$





Obrázek 11.3: Objem rotačního tělesa.

$$V = 2\pi \int_0^1 (2x - x^3)^2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{24}{35}\pi.$$

Příklad 11.7: Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací kruhu

$$x^2 + (y-3)^2 \le 1$$

kolem osy x. Jedná se tedy o objem jisté „pneumatiky".

Řešení. Daný kruh má střed o souřadnicích $[0, 3]$ a poloměr velikosti 1. Přitom je ohraničen polokružnicemi

$$y_{\pm}(x) = 3 \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Z obecné formule pro objem rotačního tělesa potom plyne

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[y_+(x)^2 - y_-(x)^2 \right] \,\mathrm{d}x = 12\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x = 6\pi^2,$$

kde jsme využili výsledku z úlohy 11.5.

Připomeňte si obecnou formuli pro výpočet povrchu rotačního tělesa. „Odvoďte“ ji jako součet povrchů plášťů válců výšky $\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ (tzv. element délky křivky).

Příklad 11.8: Spočtěte povrch tělesa z úlohy 11.7.

Řešení. Povrch spočítáme jakožto součet dvou povrchů, jednoho vzniklého rotací křivky y_+ a druhého vzniklého rotací křivky y_-, tedy

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{-1}^{1} y_+(x)\sqrt{1+y_+'(x)^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_{-1}^{1} y_-(x)\sqrt{1+y_-'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (y_+(x)+y_-(x))\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 12\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 12\pi^2.
\end{aligned}
$$

Příklad 11.9: Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací částí křivky $y = -x^2 + x + 2$ ležící nad osou x.

Řešení. Průsečíky paraboly s osou x jsou -1 a 2, její vrchol leží nad osou x, takže (při výpočtu je poměrně efektivní použít per partes)

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{2} \big(-x^2+x+2\big)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{2} (x+1)^2(x-2)^2 \mathrm{d}x = \\
&= -\pi \frac{2}{3} \int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)^3 \mathrm{d}x = \pi \frac{2}{3\cdot 4} \int_{-1}^{2} (x-2)^4 \mathrm{d}x = \\
&= \pi \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} \Big[(x-2)^5\Big]_{-1}^{2} = \frac{81\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

Na přednášce byla křivka v rovině zavedena jako zobrazení $F : t \mapsto \big(f(t),\, g(t)\big)$ definované na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ takové, že f a g jsou spojité reálné funkce na $\langle a,\, b\rangle$. Pokud jsou f a g navíc spojitě diferencovatelné, vypočteme délku křivky pomocí vzorečku

$$
L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,\mathrm{d}t.
$$

Příklad 11.10: Vypočtěte obvod kruhu o poloměru R.

Řešení. Vhodnou parametrizací kruhu je například $F(t) = \big(R\cos(t),\, R\sin(t)\big)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Proto pro obvod kruhu O platí

$$
O = \int_0^{2\pi} \sqrt{\big(-R\sin(t)\big)^2 + \big(R\cos(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = R\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi R.
$$

Příklad 11.11: Vypočtěte délku křivky $F(t) = \Big(\sqrt{t},\, 1\Big)$, $t \in \langle 1, 4\rangle$.

Řešení. Podle vzorce

$$
\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{t} + 0}\,\mathrm{d}t = \Big[\sqrt{t}\Big]_1^4 = 2 - 1 = 1.
$$

Což není překvapivé, protože se jedná o úsečku spojující body $(1,1)$ a $(2,1)$.

Příklad 11.12: Spočtěte délku části grafu funkce $y = x\sqrt{x}$ pro $0 \le x \le 4$.

Řešení.

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 (10^{3/2} - 1).$$

Diskutujte obecný vztah pro délku grafu funkce, tedy parametrizaci grafu funkce f na $\langle a, b\rangle$ pomocí $F(t) = (t, f(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$.

Domácí cvičení 11.13: Vypočtěte určité integrály

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 + 2t^3)^2 \mathrm{d}t,$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{1+t^2} \mathrm{d}t,$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x$, kde $0 < a < b$,

e) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x e^{-x} \mathrm{d}x,$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x) \mathrm{d}x,$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x,$

h) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x.$

a) $\frac{22}{7}$, b) $\frac{1}{2}\ln 5$, c) $\ln\sqrt{2}$, d) $a - b + \ln\frac{b^b}{a^a}$, e) $-4e^{-3}$, f) $\frac{4}{3}$, g) $\frac{5}{3} - \ln 4$, h) $\frac{\pi}{16}$.

Domácí cvičení 11.14: Vypočtěte plochy následujících útvarů:

a) elipsa se středem v bodě $[0, 0]$, hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b. (*Návod*: $a > b > 0$, Počítejte obsah jen části v prvním kvadrantu, využijte integraci per partes.)

b) parabolických dveří výšky 5 a šířky jednoho křídla 2. Vizte Obrázek 11.4.

c) plochy ohraničené křívkami $y = x^2$ a $y = 2 - x$

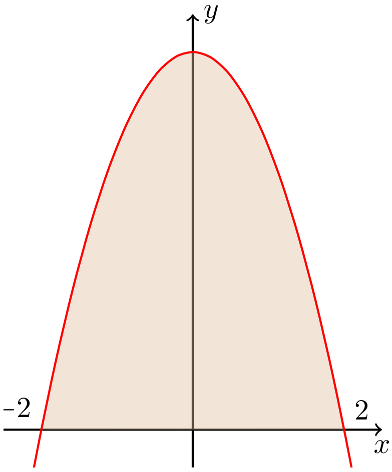
d) plochy ohraničené křivkami $y = x^2 - 2x - 3$ a $y = -x^2 + 6x - 3$.

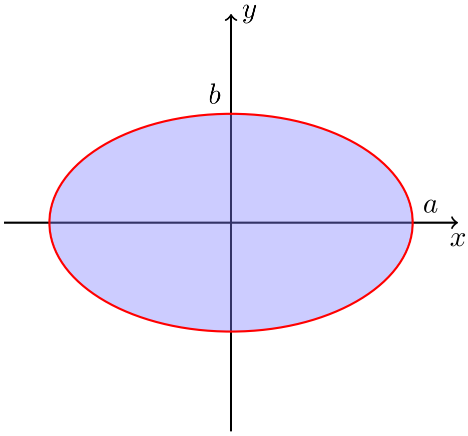
a) πab, b) $\frac{40}{3}$, c) $\frac{9}{2}$, d) $\frac{64}{3}$.

Domácí cvičení 11.15: Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu a objemu rotačního kužele o poloměru podstavy $R > 0$ a výšce $h > 0$.

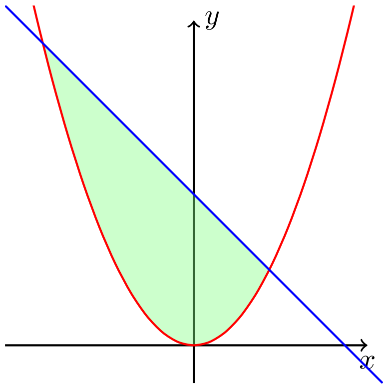
$\frac{\pi}{3} R^2 h$.

Domácí cvičení 11.16: Vypočtěte objem a povrch koule o poloměru $R > 0$.





Obrázek 11.4: Vlevo: Parabolické dveře výšky 5 a šířky křídla 2. Křivka ohraničující tento útvar je parabola. Vpravo: Kruh o poloměru r a se středem $[0, 0]$.



Obrázek 11.5: Plocha z Domácího cvičení 11.14 c).

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

Domácí cvičení 11.17: Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené křivkami $y = x$ a $y = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$.

$\frac{\pi^2}{24}(\pi^2 - 6)$.

Domácí cvičení 11.18: Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací části paraboly $y = x^2$ okolo osy x nad intervalem $\langle 0, 1\rangle$.

$V = \frac{\pi}{5}$.

Domácí cvičení 11.19: Nalezněte obsah plochy vzniklé rotací části křivky $y = x^3$ okolo osy x nad intervalem $\langle 0, 1\rangle$.

$S = \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$.

Domácí cvičení 11.20: Vypočtěte délku části křivky $F(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{1}{3}(1-2t)^{3/2}\right)$, spojující body $(0, 1/3)$ a $(1/8, 0)$.

Prvnímu bodu odpovídá hodnota parametru $t = 0$ a druhému $t = \frac{1}{2}$. Takže

$$\ell = \int_0^{1/2} \sqrt{t^2 + 1 - 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}.$$