Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda

Katedra aplikované matematiky

FIT ČVUT

Matěj Tušek

Katedra matematiky

FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 2

Funkce a jejich vlastnosti

Funkce, definiční obor, obor hodnot, vzor a obraz množiny, prostá funkce, složená funkce, inverzní funkce, elementární funkce.

Značení

f^{-1} .... inverzní funkce k funkci f
$f(A)$ .... obraz množiny A při zobrazení f
$f^{-1}(A)$ .... vzor množiny A při zobrazení f
$f \circ g$ .... složená funkce, $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
D_f .... definiční obor funkce f
H_f .... obor hodnot funkce f
$f|_M$ .... zúžení funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na množinu $M \subset D_f$, tj. funkce $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $h(x) = f(x),\ \forall x \in D_h = M \subset D_f$

Toto cvičení je stále ještě z větší části opakovací. Funkce a pojmy zde vyskytující se by studentům měly být známé. Novými pojmy mohou být vzor a obraz množiny, které byly probrány na první úvodní přednášce. Než začnete řešit následující sadu příkladů doporučuji připomenout si vlastnosti (definiční obor, obor hodnot a graf) mocninných funkcí, odmocnin, logaritmu a exponenciální funkce.

Příklad 2.1: Určete přirozené definiční obory následujících funkcí.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$,

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x+1}}{\ln x}$,

c) $h(x) = x^{-2} + \dfrac{1}{e^{x-1} - 1}$

Řešení. Uveďme řešení aspoň jednoho bodu, třeba b). Abychom určili přirozený definiční obor funkce g je potřeba nalézt všechna reálná x pro která má výraz

$$\frac{\sqrt[5]{x+1}}{\ln x}$$

smysl jakožto reálné číslo. Jmenovatel zlomku musí být nenulový a argument logaritmu musí být kladný. V čitateli se vyskytuje lichá odmocnina jejíž definiční obor je celé $\mathbb{R}$. Přípustná x tedy musí splnit dvě podmínky

$$\ln x \neq 0 \quad \text{a} \quad x > 0.$$

Logaritmus (libovolného základu) je nulový pouze pro $x = 1$. Dostáváme proto výsledek

$$D_g = (0, +\infty) \setminus \{1\}.$$

Podobným postupem bychom dospěli k definičním oborům ve zbývajících bodech a) a c).

$$D_f = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty), \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Příklad 2.2: Nalezněte přirozený definiční obor D_f je-li

a) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$,

b) $f(x) = \sqrt[4]{3 - x} + \dfrac{1}{\ln(x+1)}$,

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

a) $D_f = \langle -1, 1\rangle$, b) $D_f = (-1, 3\rangle \setminus \{0\}$, c) $D_f = (-1, 1\rangle \cup \langle 2, 3)$.

Příklad 2.3: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$f(x) = x^2 + 4x + 5.$$

Určete $f^{-1}(\{0, 1\})$ a $f(\{0, 1\})$. Rozhodněte zda je f prostá.

Řešení. $f(\{0, 1\}) = \{5, 10\}$. Nalezení $f^{-1}(0)$ je ekvivalentní řešení rovnice

$$x^2 + 4x + 5 = 0,$$

která ale žádné reálné řešení nemá. K určení $f^{-1}(1)$ řešíme rovnici

$$x^2 + 4x + 5 = 1, \text{ tj. } (x + 2)^2 = 0,$$

která má jeden dvojnásobný kořen -2. Máme tedy $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{-2\}$. Jelikož f je kvadratická funkce, nemůže být ze své podstaty prostá. Snadno např. nahlédneme, že $f(-3) = f(-1)$.

Příklad 2.4: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 4.$$

Určete $f\big((-1, 1\rangle\big)$ a $f^{-1}\big((0, +\infty)\big)$.

Řešení. Funkce f je opět kvadratická. Můžeme si usnadnit práci vytknutím dvojky,

$$f(x) = 2(x^2 + x - 2),$$

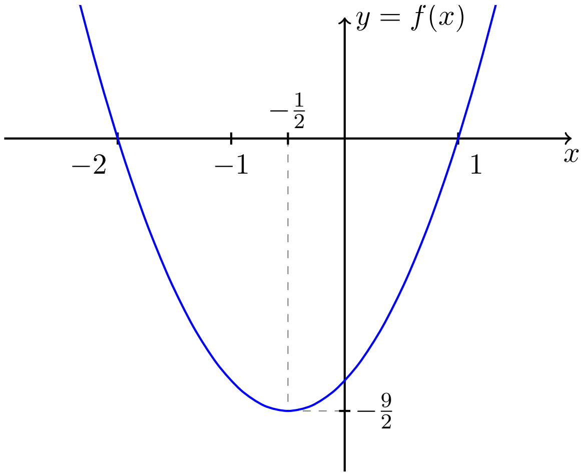
a určit průsečíky s osou x,

$$x_\pm = \frac{1}{2}\Big(-1 \pm \underbrace{\sqrt{1 + 8}}_{3}\Big) = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Vrchol (vzhledem ke kladnosti konstanty u x^2 fakticky minimum) paraboly se nachází v bodě o souřadnicích

$$\left(\frac{x_+ + x_-}{2}, f\Big(\frac{x_+ + x_-}{2}\Big)\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right).$$

Na základě těchto informací již můžeme načrtnout graf funkce f.



Obrazem množiny $(-1,\,1\rangle$ je proto množina $\left\langle -\frac{9}{2}, 0 \right\rangle$. Vzorem množiny $(0,+\infty)$ je množina $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

Příklad 2.5: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadána předpisem

$$f(x) := \sqrt{2-3x}.$$

Načrtněte graf této funkce. Určete přirozený definiční obor D_f a obor hodnot H_f. Dokažte, že je tato funkce prostá.

Řešení. Argument sudé odmocniny musí být nezáporný, tedy musí platit $2 - 3x \geq 0$, tzn. $D_f = (-\infty, 2/3\rangle$. Graf necháme na doplnění čtenářem. $H_f = \langle 0, \infty)$. Nechť nyní $x_1, x_2 \in D_f$ a současně $f(x_1) = f(x_2)$. Potom odvodíme $x_1 = x_2$. Funkce f je tedy prostá na D_f.

Příklad 2.6: Řešte úlohu 2.5 pro funkci

$$f(x) = \sqrt[3]{2-3x}.$$

Řešení. Třetí odmocnina je definována na celém $\mathbb{R}$ a proto $D_f = \mathbb{R}$. $H_f = \mathbb{R}$. Prostost ověříme podobně.

Příklad 2.7: Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) := x + |x|.$$

Je f prostá? Jaký je její obor hodnot? Jaká množina je vzorem množiny $\langle 0, 1\rangle$?

Není prostá. $H_f = \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(\langle 0,1\rangle) = (-\infty, 1/2\rangle$.

Příklad 2.8: Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) := 2x + |x|.$$

Je f prostá? Je na? Nalezněte vzor množiny $\langle -1, 1)$ a obraz množiny $(-1,2)$. Načrtněte graf funkce f. Nalezněte inverzní funkci f^{-1}, existuje-li.

Je prostá i na. $f((-1,2)) = (-1,6)$, $f^{-1}(\langle -1,1)) = \langle -1, 1/3)$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{for } x \geq 0 \\ x & \text{for } x < 0. \end{cases}$

Před řešením následujících příkladů si připomeňte definici složené funkce a zopakujte pojmy vnější a vnitřní funkce.

Příklad 2.9: Nalezněte nějaké dvě funkce f a g, $f \neq g$, tak, aby

a) $f \circ g = g \circ f$

b) $f \circ g \neq g \circ f$.

Možných řešení je mnoho a necháváme je na čtenářově fantazii.

Připomeňte si definici funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, nejlépe pomocí jednotkové kružnice. Úhly měříme v **obloukové míře**, definujte **radián**.

Příklad 2.10: Načrtněte grafy výše zmíněných goniometrických funkcí, demonstrujte, že nejsou na $\mathbb{R}$ prosté.

Příklad 2.11: Načrtněte grafy arcsin, arccos, arctg a arccotg, které definujeme jako inverze k zúžením (ve stejném pořadí)

$$\sin|_{\langle -\pi/2, \pi/2\rangle}, \ \cos|_{\langle 0,\pi\rangle}, \ \operatorname{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)}, \ \operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}.$$

Příklad 2.12: Určete numerické hodnoty výrazů

$$\arcsin 0, \ \arcsin(-1), \ \arccos \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\arccos \frac{1}{2}, \ \operatorname{arctg} 1, \ \operatorname{arccotg} 1.$$

Příklad 2.13: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána předpisem

$$f(x) = 2|x-1| + |x+1|.$$

Nalezněte $f(A)$ pro $A = (0, 2\rangle$, $f^{-1}(B)$ pro $B = (2, 3)$ a obor hodnot H_f.

$f(A) = \langle 2, 5\rangle$, $f^{-1}(B) = (0, 1) \cup (1, 4/3)$, $H_f = \langle 2, +\infty)$

Příklad 2.14: Vypočtěte $f(x+1)$ je-li $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.

$2x^2 + 5x + 3$

Příklad 2.15: Nalezněte inverzní funkci k funkci f, je-li

a) $f(x) = 1 - 3x$,

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

c) $f(x) = 10^{x+1}$,

d) $f(x) = 1 + \ln(x+2)$,

e) $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$.

a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(1-x)$, b) $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x}$, c) $f^{-1}(x) = -1 + \log(x)$, d) $f^{-1}(x) = e^{x-1} - 2$, e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(2)} \ln \frac{x}{1-x}$