Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 3

Posloupnosti

Posloupnosti, limita posloupnosti (definice a výpočet), vybraná posloupnost.

Značení

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo stručněji (a_n) .... posloupnost
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ .... limita posloupnosti
$\overline{\mathbb{R}}$ .... rozšířená reálná osa
H_a .... okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Příklad 3.1: Nalezněte explicitní předpis pro n-tý člen zadaných posloupností. Posloupnosti indexujte od jedné.

i. Posloupnost všech po sobě jdoucích sudých čísel větších nebo rovno osmi.

ii. Posloupnost $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$

iii. Periodicky se opakující posloupnost $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$

Řešení. Samozřejmě existuje mnoho možných způsobů jak tyto posloupnosti popsat. Například:

i. $a_n = 8 + 2(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$,

ii. Pomocí dolní celé části můžeme psát

$$a_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

případně

$$a_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{n+1}\right).$$

iii. Stačí vhodně volit hodnoty funkce sin,

$$a_n = \sin\frac{(n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Připomeňme definici několika různých typů posloupností. Posloupnost (a_n) nazýváme

- rostoucí, pokud $a_n < a_{n+1}$,
- klesající, pokud $a_n > a_{n+1}$,
- nerostoucí, pokud $a_n \geq a_{n+1}$,

- neklesající, pokud $a_n \leq a_{n+1}$,

kde se všude požaduje aby daná nerovnost platila pro všechna n z $\mathbb{N}$. Posloupnost nazýváme monotónní, pokud je nerostoucí nebo neklesající.

Příklad 3.2: Rozhodněte o monotonii následujících posloupností[1]

i. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

ii. $a_n = \dfrac{(n+2)^2}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Řešení.

i. Je rostoucí. Protože pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$a_n < a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \;\Leftrightarrow\; n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \;\Leftrightarrow 0 < 1.$$

ii. Je klesající. Podmínka $a_n > a_{n+1}$ je ekvivalentní požadavku

$$\frac{(n+2)^2}{2^n} > \frac{(n+3)^2}{2^{n+1}} \;\Leftrightarrow\; 2n^2 + 8n + 8 > n^2 + 6n + 9 \;\Leftrightarrow\; n^2 + 2n - 1 > 0.$$

Ten je ale splněn pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Skutečně, kvadratické rovnice

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

má řešení $x = -1 \pm \sqrt{2} < 1$.

Příklad 3.3: Rozhodněte o monotonii následujících posloupností.

a) $\left(n^2 - 2n\right)_{n=1}^{\infty}$,

b) $\left(n^2 - 3n\right)_{n=1}^{\infty}$,

c) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n=1}^{\infty}$,

d) $\left(n + (-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$.

a) rostoucí, b) neklesající, c) klesající, d) ani jednoho typu.

Připomeňme definici limity číselné posloupnosti, kterou nejlépe zapíšeme pomocí kvantifikátorů:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall H_\alpha)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in H_\alpha).$$

Zde H_α označuje okolí bodu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Stručně řečeno, posloupnost (a_n) má limitu α, právě když v každém okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti až na konečný počet výjimek.

Ukažme si nyní, jak podmínku v definici limity posloupnosti ověřit na konkrétních příkladech.

[1] Podrobněji: určete zda-li se jedná o posloupnost rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající či monotonní.

Příklad 3.4: Pomocí definice limity dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Řešení. Pro $\varepsilon > 0$ zvolíme libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro $n > n_0$ platí

$$\left|\frac{\sin(n)}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Příklad 3.5: Pomocí definice limity dokažte, že

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n + (-1)^n) = +\infty$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$

Definici k výpočtu limit používáme zřídka, častěji se opíráme o známé základní limity, například na přednášce zmiňované

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

V kombinaci se znalostí vět o součtu, součinu a podílu limit[2] pak můžeme počítat i limity komplikovanějších posloupností.

Příklad 3.6: Vypočtěte limity:

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} (5n^3 - 7n + 1)$

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3 - 7n + 1}{n^2 - 3}$

iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3 - 7n + 1}{n^3 - 3}$

iv. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3 - 7n + 1}{n^4 - 3}$

Řešení.

i. Abychom mohli použít zmiňovanou větu, je nutné výraz nejprve vhodně upravit (vytknutí nejvíce rostoucího členu),

$$\lim_{n\to+\infty} (5n^3 - 7n + 1) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \left(5 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty \cdot (5 - 0 - 0) = +\infty.$$

[2] Nechť $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$, kde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\lim(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim a_n \cdot b_n = a \cdot b, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

za předpokladu, že jsou výrazy na pravých stranách definovány.

ii. Limita čitatele i jmenovatele je nekonečná, čelíme nedefinovanému výrazu $\frac{+\infty}{+\infty}$. Musíme tedy opět upravovat:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3 - 7n + 1}{n^2 - 3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(5 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{5 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{3}{n^2}} = +\infty \cdot \frac{5}{1} = +\infty.$$

iii. Podobným postupem jako v *ii.* dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3 - 7n + 1}{n^3 - 3} = 5.$$

iv. Podobným postupem jako v *ii.* dostaneme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3 - 7n + 1}{n^4 - 3} = 0.$$

Příklad 3.7: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-4}}{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2}}.$$

5/4.

Příklad 3.8: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right).$$

Řešení. Podle formulky odvozené na prvních cvičeních $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = (n-1)n/2$ a tudíž:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zdůrazněme, že nelze použít větu o limitě součtu, neboť počet sčítanců roste s n do nekonečna. Pokud bychom nesprávně tuto větu použili, získali bychom nesprávný výsledek $0 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$.

Příklad 3.9: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} + \frac{1 - n^3}{n^2 - 1}.$$

Je zkoumaná posloupnost nerostoucí nebo neklesající?

-1, je nerostoucí i neklesající.

K větě o limitě součtu poznamenejme, že ji nelze obrátit. Z existence limity $\lim(a_n + b_n)$ obecně neplyne existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$. Např. uvažte $a_n = (-1)^n$ a $b_n = (-1)^{n+1}$, pak $a_n + b_n = 0$.

Příklad 3.10: Vypočtěte limity

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right).$$

Řešení. V obou se vyskytuje nedefinovaný výraz $+\infty - (+\infty)$. Rozšíříme-li vhodnou jedničkou dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{2/3} \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + ((n+1)n)^{1/3} + n^{2/3}} = \frac{1}{3}.$$

Poznamenejme, že výrazy podobného typu lze výhodně upravovat použitím vzorce pro $a^n - b^n$ odvozeného na prvním cvičení. Zde ve tvaru

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a-b}{a^{(n-1)/n} + a^{(n-2)/n}b^{1/n} + \cdots + a^{1/n}b^{(n-2)/n} + b^{(n-1)/n}}.$$

Příklad 3.11: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}.$$

$+\infty$.

Příklad 3.12: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n}{n+1}.$$

Řešení. Exponent u -1 není nic jiného než součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, ten je s rostoucím n napřeskáčku dvakrát sudý a dvakrát lichý. Limita tedy neexistuje, lze sestrojit vybrané posloupnosti jdoucí k ± 1.

Další základní limitou z přednášky, která se nám bude ve zbytku cvičení hodit, je

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & |a| < 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Příklad 3.13: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}} \ ?$$

1.

Příklad 3.14: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+1}}.$$

2.

Příklad 3.15: Buď $a > 0$. Vypočtěte následující limity:

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{a}$,

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{-a}$.

Řešení.

i. Na přednášce zaznělo $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (případně zazní, připomeňte). Máme určit limitu vybrané posloupnosti a ta je stejná.

ii. Vzhledem k lichým odmocninám $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$. Limita je potom -1.

Domácí cvičení 3.16: Vypočtěte následující limity, nebo dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n+1)}{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + (-1)^n\right) n$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3^n} + \frac{1}{2^n}}$.

a) 0, b) neexistuje, c) 1.

Domácí cvičení 3.17: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right).$$

$\frac{1}{2}$.

Domácí cvičení 3.18: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+1}$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2}{n+4} - \dfrac{1+2n}{2+\frac{1}{n}}$,

a) 3, b) 1, c) 4/3, d) -4.

Domácí cvičení 3.19: Dokažte

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100n}{n^2+1} = 0$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1} = 0$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.