Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 4

Posloupnosti, pokračování

Věta o sevřené posloupnosti, Eulerovo číslo, podílové kritérium.

Značení

e .... Eulerovo číslo

Připomeňme větu o limitě sevřené posloupnosti: nechť pro posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) platí

i) existují limity $\lim a_n = \lim c_n =: \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,

ii) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že nerovnost $a_n \leq b_n \leq c_n$ platí pro každé $n \geq n_0$,

potom existuje limita posloupnosti (b_n) a její hodnota je α. Dále také připomeňme limity probrané na přednášce

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \; a > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Příklad 4.1: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^3 + 5}.$$

Řešení. Pro všechna kladná $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{4n^3 + 5} \leq \sqrt[n]{9n^3} = \sqrt[n]{9}\,\sqrt[n]{n}^3.$$

Posloupnosti dolních i horních odhadů mají stejnou limitu, jmenovitě jedničku. Tudíž limita sevřené posloupnosti existuje a rovná se rovněž jedné.

Příklad 4.2: Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)! + (n+2)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

1.

Příklad 4.3: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}.$$

Zde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x, tedy celé číslo $\lfloor x \rfloor$ splňující $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Na přednášce bylo Eulerovo číslo definováno jako součet číselné řady

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Dále jsme odvodili rovnost

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Důrazně na tomto místě upozorňujeme na častou nesprávnou úpravu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq \lim_{n\to\infty} (1+0)^n = 1.$$

Toto „částečné limitění“ samozřejmě nelze ospravedlnit a představuje tak pouze častý omyl.

Příklad 4.4: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}.$$

Řešení. Stačí upravit na známou limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e^3.$$

Příklad 4.5: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Nyní

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2} = \sqrt{e},$$

protože $\big((1+1/(2n))^{2n}\big)$ je vybraná z $\big((1+1/n)^n\big)$ a $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ pokud (a_n) je posloupnost s nezápornými členy splňující $\lim a_n = \alpha \geq 0$, což také víme z přednášky.

Příklad 4.6: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n.$$

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3.$$

Z posloupnosti $\big((1+\frac{1}{\frac{n}{3}})^{\frac{n}{3}}\big)$ totiž lze vybrat podposloupnost konvergentní k e a zároveň je tato posloupnost monotónní[1] a tedy má limitu.

Příklad 4.7: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n.$$

[1] Což lze ukázat stejně jako na přednášce.

Řešení. Tento případ můžeme převést na limitu typově shodnou s předchozím příkladem,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n-4+4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{4}{n-4}\right)^{n-4}\cdot\left(1+\frac{4}{n-4}\right)^4}=\frac{1}{e^4}=e^{-4}$$

Poznamenejme, že z těchto příkladů by mělo být patrné, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n=e^{\frac{p}{q}}$$

pro $p\in\mathbb{Z}$ a $q\in\mathbb{N}$.

Příklad 4.8: Vypočtěte následující limity

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{2n}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n\cdot\left(\dfrac{3+n}{n^2}\right)^n$,

a) e^2, b) e^3.

Příklad 4.9: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2+4n+2\right)}{\ln\left(3n^4+5\right)}.$$

Řešení. V průběhu řešení užijeme znalosti na přednášce uvedeného tvrzení, že $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ implikuje $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2+4n+2\right)}{\ln\left(3n^4+5\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\right)}{\ln\left(n^4\left(3+\frac{5}{n^4}\right)\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n+\ln\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{4\ln n+\ln\left(3+\frac{5}{n^4}\right)}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{4+\frac{1}{\ln n}\ln\left(3+\frac{5}{n^4}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Připomeňte si důležitou limitu $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$ v závislosti na hodnotě $a\in\mathbb{R}$.

Příklad 4.10: Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(3^n+5\right)}{\ln\left(4^n-2\right)}.$$

$\frac{\ln 3}{\ln 4}$.

Příklad 4.11: Dokažte *podílové kritérium*: Buď (a_n) posloupnost kladných členů. Pokud existuje kladné $q\in\mathbb{R}$ a $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že pro $n\in\mathbb{N}$ větší nebo rovno než n_0 je

(a) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q<1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Řešení. Případ (a). Pro $n \geq n_0$ zřejmě máme $0 < a_n < a_{n_0} q^{n-n_0}$. Tvrzení pak plyne z věty o sevřené posloupnosti a předpokladu $0 < q < 1$

Případ (b). Pro $n \geq n_0$ zřejmě máme $a_n > a_{n_0} q^{n-n_0}$. Tvrzení pak plyne přímo z definice limity a předpokladu $q > 1$.

Poznamenejme, že k ověření podmínky stačí zkoumat hodnotu limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Tato však nemusí vždy existovat.

Příklad 4.12: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^5}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n^3}$.

a) 0, b) $+\infty$, c) $+\infty$.

Následují další příklady vhodné k samostatnému procvičení, ale je možné se jim věnovat i na cvičení podle časových možností.

Domácí cvičení 4.13: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

a) 1, b) 1, c) 0, d) 0

Domácí cvičení 4.14: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2+\sin(n)}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{-n}+3^{-n}}{4^{-n}+9^{-n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\,((-1)^n n)$,

a) 0, b) $+\infty$, pečlivě zdůvodněte! c) $+\infty$, d) neexistuje

Domácí cvičení 4.15: a) Existuje konvergentní aritmetická posloupnost?

b) Které geometrické posloupnosti jsou konvergentní?

Výsledek tohoto příkladu naleznete níže. Pokuste se nejprve sami na otázky odpovědět, teprve poté svou odpověď konzultujte s řešením.

Domácí cvičení 4.16: Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2n^2+3n^3-1)}{\ln n}$.

a) e^{-1}, b) 0, c) 3.

Domácí cvičení 4.17: Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+4n+3}{n^2+3n+2}\right)^n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2+n}\right)^n$.

a) e, b) -2, c) 0.

Výsledek Domácího cvičení 4.15: a) Ano, s diferencí $d = 0$, tedy ty které jsou konstantní. b) geometrická posloupnost konverguje právě tehdy když její kvocient splňuje $q \in (-1, 1\rangle$.