Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 5

Číselné řady

Opakování příkladů na limity, číselné řady.

Na rozcvičení je možno zopakovat si výpočet limity posloupnosti na následujícím příkladě.

Příklad 5.1: Vypočtěte následující limity, případně dokažte jejich neexistenci.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2e^n - 2^n}{n^5 + 4^n}$,

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n^2+2n}$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^{n^2+n}$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (2 + (-1)^n)n$.

a) 0, b) e^{-1}, c) 1, d) $+\infty$.

Na tomto příkladě demonstrujeme definici konvergence číselné řady.

Příklad 5.2: U následujících řad $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ nejprve najděte částečný součet $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$ a rozhodněte o konvergenci, případně nalezněte součet.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

Řešení.

a) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{1+n}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1,$$

řada konverguje a její součet je 1.

b) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + 2^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

řada konverguje a její součet je $\frac{7}{2}$.

c) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1,$$

řada konverguje a její součet je 1.

Vyjma definice máme k vyšetřování (absolutní) konvergence číselných řad z přednášky k dispozici následující kritéria:

- nutnou podmínku konvergence,
- Leibnizovo kritérium,
- d'Alembertovo kritérium,
- srovnávací kritérium.

Příklad 5.3: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2^{-k})$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k3^{-k}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{2^k}$.

Řešení.

a) Řada diverguje. Není splněna nutná podmínka konvergence. Zde

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + 2^{-k}\right) = 1 \neq 0.$$

b) Řada konverguje, lze použít d'Alembertova kritéria:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)3^{-k-1}}{k3^{-k}} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{3} < 1.$$

c) Řada absolutně konverguje, použijeme srovnávací kritérium:

$$\text{pro } k \in \mathbb{N} \text{ je } \left|\sin(k) \cdot 2^{-k}\right| \leq 2^{-k} \quad \text{a řada } \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \text{ konverguje.}$$

Poznamenejme, že v tomto případě nelze použít d'Alembertovo kritérium.

Příklad 5.4: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\Big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\Big)$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

Řešení.

a) Diverguje, protože

$$\frac{1+k}{1+k^2} \geq \frac{1+k}{2k^2} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k}$$

pro každé $k = 1, 2, 3 \ldots$ a o řadě $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ z přednášky víme, že diverguje.

b) Diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence.

c) Lze použít d'Alembertovo kritérium k vyšetření absolutní konvergence a ukázat konvergenci řady.

Příklad 5.5: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^k\right) \frac{1}{2^k}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 3^{2k}}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{2^k + 3^k}$

Řešení. V prvním příkladě lze použít srovnávací kritérium, v ostatní d'Alembertovo. Výsledky: a) konverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) konverguje, e) diverguje.

Domácí cvičení 5.6: Vyšetřete konvergenci následujících řad

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} 2^k,$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{30} 3^{-k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+3}{k^4+3}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+k}{1+k^2}.$

a) diverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) konverguje.