Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 6

Limita funkce

Limita funkce; jednostranná limita; existence limity; výpočet limit.

Značení

$\lim_{x\to a} f(x) = c$ .... limita funkce f v bodě a

$\lim_{x\to a_+} f(x) = c$ .... limita funkce f v bodě a zprava

$\lim_{x\to a_-} f(x) = c$ .... limita funkce f v bodě a zleva

Na přednášce se limita reálné funkce reálné proměnné definovala následovně: Nechť funkce f je definována na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s možnou výjimkou bodu a samotného a nechť $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Řekneme, že f má v bodě a limitu c, pokud pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a tak, že pokud $x \in H_a \setminus \{a\}$ pak $f(x) \in H_c$.

K výpočtu limit máme nyní k dispozici věty o limitách součtu, součinu, podílu, složené funkce a Heineho větu. Dále máme z přednášky odvozené limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Také již můžeme využívat spojitost exponenciály, logaritmu, sinu, kosinu... Někteří už na přednášce měli, jiní mít teprve budou.

Příklad 6.1: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$$

Řešení. Jelikož -1 je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli, musíme vytknout výraz $(x+1)$, na tomto místě si připomeňte dělení polynomu polynomem.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 6.2: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

6.

Příklad 6.3: Pomocí definice vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0_\pm} \frac{1}{x}.$$

Řešení. Na této limitě znovu demonstrujeme definici. Buď $H_{+\infty}(c) = (c, +\infty)$ zadané okolí $+\infty$, $c > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{c}$. Potom pro $x \in H_0^+(\delta) \setminus \{0\} = (0, \delta)$ platí $0 < x < \delta$ a proto $\frac{1}{x} > c$, čili $\frac{1}{x} \in H_{+\infty}(c)$ a

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Podobně lze nalézt druhou limitu,

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Příklad 6.4: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}.$$

$+\infty$.

Příklad 6.5: Vypočtěte limity

$$\lim_{x \to 1_\pm} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}.$$

Řešení. Po úpravě

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{x^2 + x - 6}{x - 3}$$

ihned uzavíráme

$$\lim_{x \to 1_\pm} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \pm\infty \cdot \frac{1 + 1 - 6}{-2} = \pm\infty.$$

Příklad 6.6: Vypočtěte limity:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^x.$$

Řešení.

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

Jako argument lze použít známé číselné limity $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$, resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, monotonii e^x a Heineho větu. Načrtněte též průběh exponenciály.

Příklad 6.7: Vypočtěte limity:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

Řešení.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x \cdot (1 + e^{-x}))}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-x}) = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 0.$$

Příklad 6.8: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}.$$

Řešení. Pomocí věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Navíc jsme použili znalost jedné z limit uvedené na začátku této kapitoly, teď je vhodný čas tyto limity připomenout, protože budou potřeba dále.

Příklad 6.9: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}.$$

3.

Příklad 6.10: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^{4x}}{x}.$$

-1.

Příklad 6.11: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$$

5.

Příklad 6.12: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}.$$

$\frac{2}{3}$.

Příklad 6.13: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

$\frac{1}{2}$.

Příklad 6.14: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení. Zde máme k dispozici větu o limitě sevřené funkce. Jelikož

$$\forall x > 0 : \ -\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$$

a obě mezní funkce mají stejnou (nulovou) limitu, je nulová i limita hledaná.

Příklad 6.15: Vypočtěte jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 1\pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}.$$

Řešení.

$$\lim_{x\to 1\pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \mp\frac{\pi}{2}.$$

Pro ilustraci načrtněte graf funkce $\operatorname{arctg} x$.

Domácí cvičení 6.16: Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\frac{\pi}{2}$.

Domácí cvičení 6.17: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-8x}{x^3-3x^2-4x+12}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2+} \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+x+6}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-e^{-x}}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1}$.

a) -3, b) $-\infty$, c) $\frac{1}{2}$, d) e.

Domácí cvičení 6.18: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x}\,(2\sin(x)+x)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(2x)}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)}$.

a) 3, b) -1, c) $\frac{1}{2}$, d) 2.

Domácí cvičení 6.19: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$,

a) $+\infty$, b) 0, c) 0.

Domácí cvičení 6.20: Vypočtěte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos x-\sin x}{\cos(2x)}$,

c) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln(x) - 1}{x - e}$,

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

a) 0, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{1}{e}$, d) $\frac{3}{2}$.