Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 7

Spojitost a derivace funkce

Spojitost funkce; různé případy nespojitosti; derivace; výpočet derivace.

Značení

$\lfloor x \rfloor$ .... dolní celá část x

$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ .... znaménko (signum) x

$f'(a)$ .... derivace funkce f v bodě a

Příklad 7.1: Načrtněte graf funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Rozhodněte, kde je f spojitá, případně spojitá zleva nebo zprava.

Řešení. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, v bodech $x \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale zleva nespojitá. Skutečně, pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ totiž existuje okolí H_a bodu a tak, že pro $x \in H_a$ je $\lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor$ a proto

$$\lim_{x \to a} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a} \lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

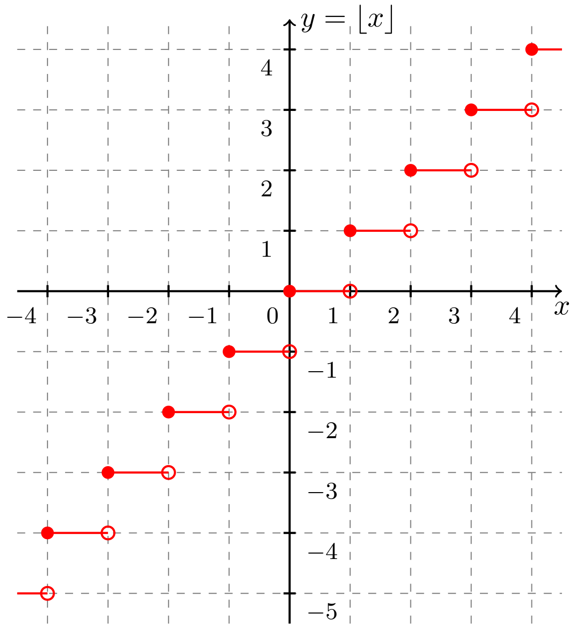
Pokud ale $a \in \mathbb{Z}$, pak podobně

$$\lim_{x \to a+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a+} \lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor$$

a

$$\lim_{x \to a-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to a-} \big(\lfloor a \rfloor - 1 \big) = \lfloor a \rfloor - 1.$$

Nakonec uvádíme náčrtek.



Příklad 7.2: Načrtněte graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$. Rozhodněte, kde je f spojitá, případně spojitá zleva nebo zprava.

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus A$, kde $A := \{k\pi |\, k \in \mathbb{Z}\}$. V bodech množiny A není spojitá ani zleva ani zprava.

Příklad 7.3: Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - x - 2}$$

a rozhodněte, v kterých bodech mimo definiční obor je možné tuto funkci dodefinovat tak, aby výsledná funkce byla spojitá.

Řešení. Protože platí rovnost

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1),$$

je definičním oborem funkce f množina $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{-1, 2\}$. Číslo 2 je ale i kořenem polynomu v čitateli, takže

$$\lim_{x \to 2} = \frac{5}{3}.$$

V bodě 2 je možné funkci spojitě dodefinovat hodnotou $\frac{5}{3}$. V bodě -1 to možné není. Pro jednostrané limity totiž platí

$$\lim_{x \to -1_{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

Příklad 7.4: Rozhodněte, zda-li je možné funkci

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

spojitě dodefinovat v bodě 0. Co lze říci na stejnou otázku pro funkci

$$g(x) = f(x)^2?$$

f nemá v bodě 0 limitu, nelze ji spojitě dodefinovat. Funkci g lze v bodě 0 spojitě dodefinovat $\frac{\pi^2}{4}$.

Příklad 7.5: Zderivujte následující funkce a určete jejich definiční obory, stejně tak určete definiční obory zderivovaných funkcí.

$$a)\ f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}, \quad c)\ (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} &a)\ f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3x^{2/3}},\ D_f = \langle 0,\infty),\ D_{f'} = (0,\infty) \\ &b)\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3},\ D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ &c)\ f'(x) = -20(12x+17)(5+2x)^9(3-4x)^{19},\ D_f = D_{f'} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 7.6: Zderivujte následující funkce.

$$a)\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad b)\ f(x) = x^x, \quad c)\ f(x) = x^2 + 2^x.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} &a)\ f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \\ &b)\ f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)' = (\ln x + 1)x^x \\ &c)\ f'(x) = 2x + 2^x \ln 2. \end{aligned}$$

Domácí cvičení 7.7: Zderivujte následující funkce.

$$a)\ f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}, \quad b)\ f(x) = 3^{x^2}.$$

a) $f'(x) = e^{e^x} e^x$, b) $2\ln(3)3^{x^2}x$

Příklad 7.8: Zderivujte následující funkce a určete jejich definiční obory, stejně tak určete definiční obory zderivovaných funkcí.

$$a)\ f(x) = \ln(\sin x), \quad b)\ f(x) = \ln(\ln(\sin x)), \quad c)\ f(x) = \operatorname{arctg} x^3, \quad d)\ f(x) = \arcsin\frac{1}{x}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} &a)\ f'(x) = \operatorname{cotg} x,\ D_f = D_{f'} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi) \\ &b)\ D_f = \emptyset,\ \text{tudíž derivaci netřeba dále počítat} \\ &c)\ f'(x) = \frac{3x^2}{1+x^6},\ D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \\ &d)\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}},\ D_f = (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty),\ D_{f'} = (-\infty,-1)\cup(1,\infty). \end{aligned}$$

Domácí cvičení 7.9: Zderivujte funkci $f(x) = \sin(\ln x)$.

$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

Příklad 7.10: Dokažte, že platí:

$$|x|' = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{pro } x \neq 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. V bodě $x = 0$ je derivace zleva rovna -1, kdežto derivace zprava je rovna 1, tudíž derivace v tomto bodě neexistuje.

Zopakujme pojem **tečna ke grafu funkce**. Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě a je dána předpisem $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, pokud $f'(a) \in \mathbb{R}$ a předpisem $x = a$, pokud $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$ a funkce f je v bodě a spojitá[1]. Derivace funkce f v bodě a je rovna tangens úhlu α, který tečna grafu funkce f v bodě a svírá s osou x.

Příklad 7.11: Nalezněte body, ve kterých je tečna funkce

$$f(x) = \frac{1}{4}x^{5/3} + \frac{1}{3}x - 3\sqrt[3]{x}$$

rovnoběžná s osou x nebo y.

Řešení. Prvnímu případu odpovídají řešení rovnice

$$f'(x) = \frac{5}{3\cdot 4}x^{2/3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x^{2/3}} = 0,$$

jež jsou dvě, $x = \pm\left(6/5\right)^{3/2}$. Druhému případu potom body z D_f, kde $f'(x) = \pm\infty$, tedy $x = 0$.

Příklad 7.12: Nalezněte body, ve kterých tečna funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)$$

svírá s osou x úhel $45°$.

Řešení. Řešíme tedy rovnici

$$f'(x) = \operatorname{tg} 45° = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x - 1 = 0,$$

jejímž jediným řešením je $e^x = 1$, čili $x = 0$.

Příklad 7.13: Určete obsah trojúhelníka, který je ohraničen tečnou ke grafu funkce

$$f(x) = x^{-1}$$

v bodě a, $a > 0$, osou x a osou y. Pro jakou hodnotu parametru a je tato plocha největší?

[1]Například tečnu k sgn v bodě 0 nedefinujeme, sice $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$ ale sgn v 0 není spojitá, pojem tečny tak postrádá smysl.

Řešení. Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě a zní

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}.$$

Průsečíky tečny s osami x a y tedy jsou body $(2a, 0)$ a $(0, 2a^{-1})$. Plocha hledaného trojúhelníku je konstantní a rovna 2. V tomto příkladě tedy ještě není nutné umět hledat extrémy funkce, to bude obsahem dalších cvičení.

Příklad 7.14: Spočtěte 1., 2., a 3. derivaci funkce $f(x)$ a určete $f^{(n)}(x)$ pro kladné přirozené n v následujících případech:

$$a)\ f(x) = \mathrm{e}^x,\ b)\ x^3,\ c)\ x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N},\ d)\ x^\alpha,\ \alpha \notin \mathbb{N},\ e)\ f(x) = \sin x,\ f)\ f(x) = \cos x.$$

Řešení.

$$a)\ f^{(n)} = \mathrm{e}^x$$

$$b)\ f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,\ f^{(n)} = 0 \text{ pro } n > 3$$

$$c)\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} & \text{pro } \alpha \geq n \\ 0 & \text{pro } \alpha < n \end{cases}$$

$$d)\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$e)\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cos x & \text{pro } n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N} \\ (-1)^m \sin x & \text{pro } n = 2m,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \end{cases}$$

$$f)\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & \text{pro } n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \\ (-1)^m \cos x & \text{pro } n = 2m,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1. \end{cases}$$

Domácí cvičení 7.15: Je funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \leq x < 3, \\ 4 - x, & x \geq 3, \end{cases}$$

spojitá na svém definičním oboru?

Ano.

Domácí cvičení 7.16: Pro jakou hodnotu reálného parametru $a \in \mathbb{R}$ je funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

spojitá?

Je spojitá pro $a = 1$.

Domácí cvičení 7.17: Funkce $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ není definována v bodě $x = 1$. Lze ji dodefinovat tak, aby byla v bodě 1 spojitá?

Ano, lze. Definujeme $f(1) := \frac{2}{3}$.

Domácí cvičení 7.18: Funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^{2x}-1}$ není definována v bodě $x = 0$. Lze ji v tomto bodě dodefinovat tak, aby byla v bodě 0 spojitá?

Ano, a to hodnotou $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

Domácí cvičení 7.19: Vypočtěte derivace následujících funkcí

$$a)\ f(x) = \operatorname{arctg} e^x, \quad b)\ f(x) = x\sin(x)\cos(x), \quad c)\ f(x) = \ln|x|, \quad d)\ f(x) = \frac{1}{\arcsin(x)}.$$

a) $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) + x\cos(2x)$, c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, d) $f'(x) = -\dfrac{1}{(\arcsin(x))^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Domácí cvičení 7.20: Pro funkci f najděte body $a \in D_f$ tak, že její tečna v bodě a svírá úhel α s osou x.

$$\begin{aligned} &a)\ f(x) = x^3, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \\ &b)\ f(x) = \left(x^2 - x\right)^{1/3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \\ &c)\ f(x) = -\operatorname{arctg}(x), \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

a) $a = \pm 3^{-1/4}$, b) $a \in \{0, 1\}$, c) $a = 0$.

Domácí cvičení 7.21: Vypočtěte derivace následujících funkcí (a, b, c, d jsou kladné reálné parametry)

$$a)\ f(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{a} + \frac{b^2}{x^2} + \frac{x^2}{b^2}, \quad b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2, \quad c)\ f(x) = \sqrt{x}\left(x^3 - \sqrt{x} + 1\right),$$

$$d)\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad e)\ f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right), \quad f)\ f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1).$$

a) $f'(x) = -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{1}{a} - 2\dfrac{b^2}{x^3} + 2\dfrac{x}{b^2}$, b) $f'(x) = -2\left(\dfrac{1}{2} - x\right)$, c) $f'(x) = \dfrac{7}{2}x^{5/2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1$, d) $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, e) $f'(x) = -\dfrac{1+x}{2x^{3/2}}$, f) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$.

Domácí cvičení 7.22: Pro funkci $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$ vypočtěte $f(1)$, $f'(1)$, $f(4)$, $f'(4)$, $f(a^2)$ a $f'(a^2)$. ($a \in \mathbb{R}$.)

$f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f(4) = 8$, $f'(4) = \frac{5}{2}$, $f(a^2) = 3a^2 - 2|a|$, $f'(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}$.

Domácí cvičení 7.23: Pro funkci $f(x) = \frac{x^2-5x-1}{x^3}$ spočtěte $f(-1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$, $f'\left(\frac{1}{a}\right)$ pro $a \neq 0$.

$f(-1) = -5$, $f'(-1) = -8$, $f'(2) = \frac{19}{16}$, $f\left(\frac{1}{a}\right) = a^2\left(3a^2 + 10a - 1\right)$

Domácí cvičení 7.24: Nalezněte derivace následujících funkcí

$$a)\ f(x) = \frac{x}{1-\cos(x)}, \quad b)\ f(x) = x\sin x + \cos x, \quad c)\ f(x) = \sin\left(\sin(x)\right), \quad d)\ f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

$$e)\ f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}, \quad f)\ f(x) = \arcsin\frac{2}{x}, \quad g)\ f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x.$$

a) $f'(x) = \dfrac{1 - \cos(x) - x\sin(x)}{\left(1-\cos(x)\right)^2}$, b) $f'(x) = x\cos(x)$, c) $f'(x) = \cos\left(\sin(x)\right)\cdot\cos(x)$, d) $f'(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{1/2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{3/2}}$, e) $f'(x) = \dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$, f) $f'(x) = -\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$, g) $f'(x) = -2\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2$.

Domácí cvičení 7.25: Vypočtěte derivace následujících funkcí (a, b jsou reálné parametry)

$$a)\ f(x) = 2^x, \quad b)\ f(x) = x \cdot 10^x, \quad c)\ f(x) = 2^{\frac{x}{\ln(x)}}, \quad d)\ f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x},$$
$$e)\ f(x) = ae^{-b^2x^2}, \quad f)\ f(x) = a^x x^a \text{ (zde } a > 0), \quad g)\ f(x) = 2^{3^x}, \quad h)\ f(x) = e^{\sqrt{x+1}}.$$

a) $f'(x) = 2^x \ln(2)$, b) $f'(x) = \Big(1 + x\ln(10)\Big) \cdot 10^x$, c) $f'(x) = \frac{\ln(2)}{\ln^2(x)}\Big(\ln(x) - 1\Big)2^{\frac{x}{\ln(x)}}$, d) $f'(x) = \frac{2e^x}{\Big(e^x - 1\Big)^2}$,
e) $f'(x) = -2ab^2xe^{-b^2x^2}$, f) $f'(x) = \Big(x\ln(a) + a\Big)a^x x^{a-1}$, g) $f'(x) = 2^{3^x} \cdot \ln(2) \cdot 3^x \cdot \ln(3)$, a) $f'(x) = e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.