Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 8

Extrémy reálných funkcí

Extrémy reálných funkcí; vyšetřování průběhu reálných funkcí.

Příklad 8.1: Určete největší a nejmenší hodnoty nabývané následujícími funkcemi na zadaných intervalech.

1. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ na $\langle 0, 4\rangle$
2. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ na $\langle 0, 4\rangle$
3. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ na $\langle 0, \infty)$

Řešení.

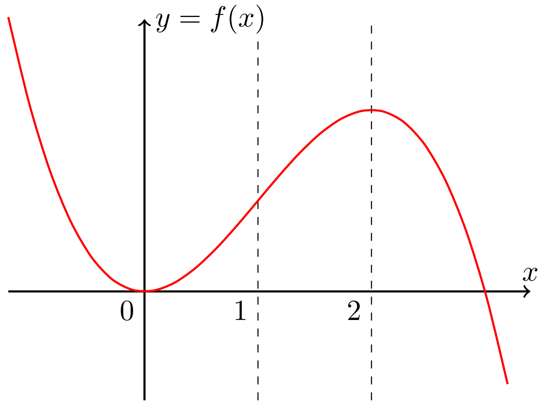
1. $f(0) = f(4) = 0$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ je nulová v bodě 1 a přitom $f(1) = -1$. Na daném intervalu tedy f nabývá maxima v krajních bodech (s hodnotou 0) a minima v bodě 1 (s hodnotou -1).
2. $f'(x) = 2(x + 1)^{-2} > 0$, funkce f je tedy na daném intervalu rostoucí, maxima nabývá v pravém krajním bodě (s hodnotou $f(4) = \frac{3}{5}$) a minima v levém krajním bodě (s hodnotou $f(0) = -1$).
3. $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x)$ je nulová v bodě 1 a v tomto bodě má f maximum s hodnotou e^{-1}. Minimum s hodnotou 0 je potom nabýváno v levém krajním bodě.

Příklad 8.2: Nalezněte extrémy, určete limity v krajních bodech definičního oboru a bodech nespojitosti, vyšetřete konvexnost/konkávnost funkce

$$f(x) = 3x^2 - x^3$$

a načrtněte její graf.

Řešení. Derivace $f'(x) = 6x - 3x^2$ je nulová pro $x = 0$ ($f(0) = 0$) a $x = 2$ ($f(2) = 4$), přitom $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$. Nahlédneme, že v bodě 0 má f ostré lokální minimum a v bodě 2 ostré lokální maximum. (Lze ověřit z druhé derivace.) Dále $f''(x) = 6(1 - x)$, a proto shrnujme, že f je konvexní na $(-\infty, 1)$ a konkávní na intervalu $(1, \infty)$.



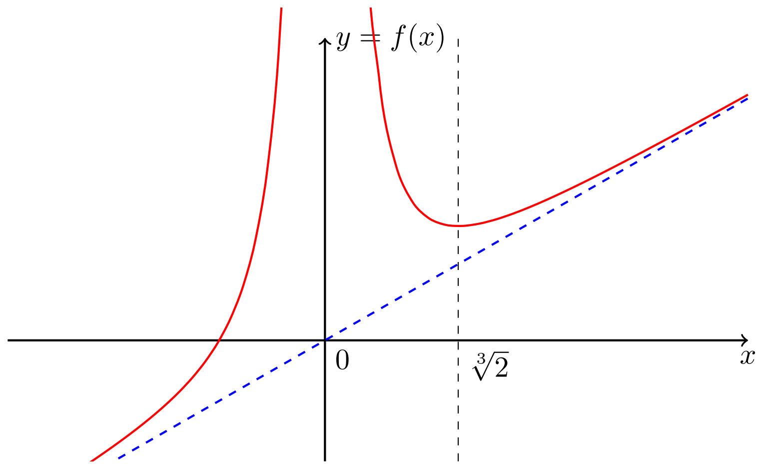
Než se pustíme do následujícího příkladu připomeňte si pojem **asymptoty** grafu funkce.

Příklad 8.3: Vyšetřete průběh funkce (včetně asymptot)

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

a načrtněte její graf.

Řešení. Zřejmě $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Derivace $f'(x) = 1 - 2x^{-3}$ je nulová v bodě $\sqrt[3]{2}$. Dále máme $\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. V bodě $\sqrt[3]{2}$ je tedy nutně ostré lokální minimum. $f''(x) = 6x^{-4} > 0$, a funkce f je tudíž na D_f konvexní. Dále $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$, přímka $y = x$ tedy představuje asymptotu v $\pm\infty$. Vedle toho je přímka $x = 0$ svislou asymptotou.



Příklad 8.4: Vyšetřete průběh následujících funkcí

1. $f(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$,
2. $f(x) = (x + 1)^{2/3} \cdot x^2$,
3. $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$.

Řešení.

1. Definičním oborem zadané funkce je množina $D_f = \mathbb{R}$. Pro první a druhou derivaci platí

$$f'(x) = 3x \cdot (x^2+1)^{1/2},$$
$$f''(x) = 3 \cdot \Big((x^2+1)^{1/2} + x^2(x^2+1)^{-1/2}\Big), \quad x \in D_f.$$

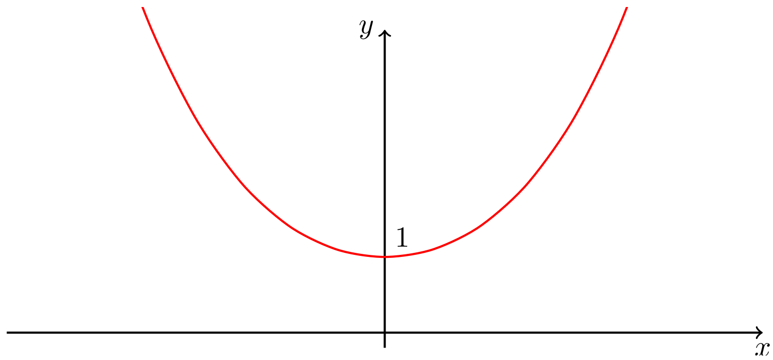
Uzavíráme, že funkce je spojitá na svém definičním oboru, klesá na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a roste na intervalu $\langle 0, +\infty)$. V bodě 0 nastává lokální minimum. Funkce je konvexní na $\mathbb{R}$. Pro limity na „krajích“ definičního oboru platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2+1)^{3/2} = +\infty.$$

Asymptoty v $\pm\infty$ neexistují, protože

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \cdot (x^2+1)^{3/2} = \pm\infty.$$

Průsečíky s osou x neexistují. Prusečík s osou y je pouze jeden, $(0,1)$.



2. Definičním oborem zadané funkce je množina $D_f = \mathbb{R}$. Pro derivaci platí

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{4x+3}{3(x+1)^{1/3}}, \quad x \neq -1,$$
$$f'(-1) = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)^{2/3} \cdot x^2 - 0}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2}{(x+1)^{1/3}} \quad \text{neexistuje.}$$

Derivace v bodě -1 neexistuje, ale přesto je zde funkce spojitá,

$$\lim_{x\to-1} f(x) = 0 = f(-1).$$

Ze znaménka derivace dále odvodíme monotonii.

interval	$(-\infty, -3/4)$	$(-3/4, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
znaménko derivace	$-$	$+$	$-$	$+$
monotonie	klesá	roste	klesá	roste

3. Definičním oborem funkce f je množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Pro limity platí

$$\lim_{x\to-2_\pm} f(x) = \frac{x^2}{2+x} = \pm\infty,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Protože

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\cdot x = -2,$$

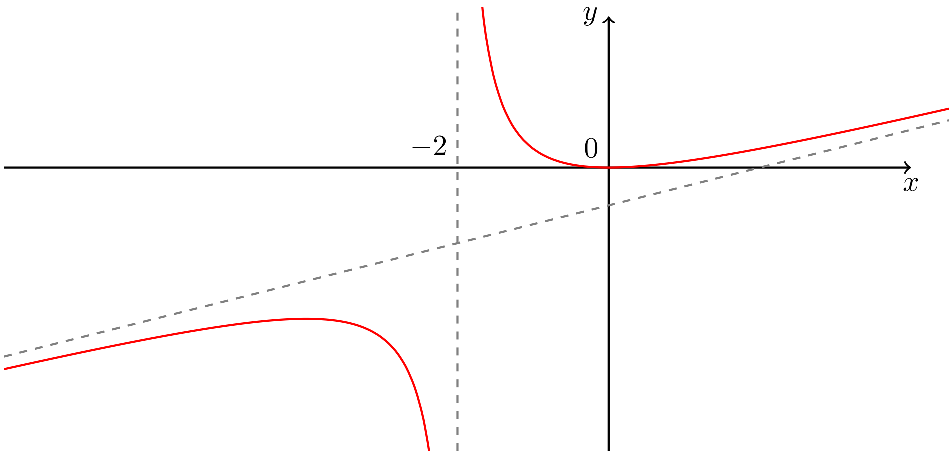
je asymptotou přímka $x = -2$ a v $\pm\infty$ přímka $y = x - 2$. Jediným průsečíkem s osami je bod $(0, 0)$. Pro derivace funkce f platí

$$f'(x) = \frac{x(x+4)}{(2+x)^2},$$
$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3}, \quad x \neq -2.$$

Naše funkce f je tedy konvexní na intervalu $(-2, +\infty)$ a konkávní na intervalu $(-\infty, -2)$. Typ monotonie vyčteme z první derivace:

interval	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
znaménko derivace	$+$	$-$	$-$	$+$
monotonie	roste	klesá	klesá	roste

Funkce nabývá lokálního maxima v bodě $x = -4$ s hodnotou $f(-4) = -8$ a lokálního minima v bodě $x = 0$ s hodnotou $f(0) = 0$.



Příklad 8.5: Určete největší člen posloupnosti $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Přejděme od diskrétního ke spojitému problému, tj. hledejme maximum funkce $f(x) := \sqrt[x]{x}$ na intervalu $\langle 1, \infty)$. $f(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Derivace $f'(x) = \sqrt[x]{x}(1 - \ln x)x^{-2}$ je nulová v bodě e a přitom $f(e) > 1$. Největšímu členu posloupnosti tedy odpovídá $n = 2$ nebo $n = 3$. Numericky ověříme, že největším členem posloupnosti je $\sqrt[3]{3}$.

Příklad 8.6: Určete, kolik kořenů má rovnice

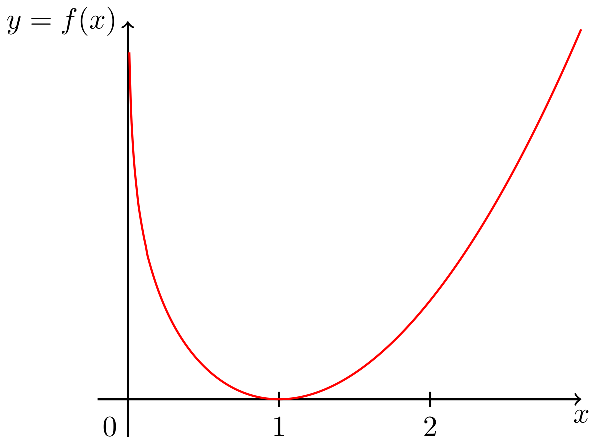
$$x^2 - x - \ln x - 1 = 0$$

a následně je separujte. Potom diskutujte, kolik kořenů má rovnice

$$x^2 - x - \ln x - a = 0$$

v závislosti na parametru a.

Řešení. Označme $f(x) = x^2 - x - \ln x$, tato funkce je definována na intervalu $D_f = (0, \infty)$. Derivace $f'(x) = 2x - 1 - x^{-1}$ je na D_f nulová pouze v bodě 1 a přitom $f(1) = 0$. Současně $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Graf funkce $f(x) - a$ tudíž protíná osu x dvakrát pro $a > 0$, jednou pro $a = 0$ a vůbec pro $a < 0$. Pro $a = 1$ dostáváme jeden kořen na intervalu $(0, 1)$ a druhý na intervalu $(1, \infty)$.



Domácí cvičení 8.7: Nalezněte lokální extrémy funkce

a) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$,

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$,

c) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x-1}$.

a) Lokální minimum v bodě 1 ($f(1) = 0$); lokální maximum v bodě e^2 ($f(e^2) = 4e^{-2}$).

b) Lokální minimum v bodě 1 ($f(1) = 2$); lokální maximum v bodě -1 ($f(-1) = -2$).

c) Lokální minimum v bodě $3/4$ ($f(3/4) < 0$); lokální maximum nemá.

Domácí cvičení 8.8: Jaké největší a nejmenší hodnoty a v jakém bodě nabývá funkce

a) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$,

b) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$?

a) Maximem je $f(0) = f(2\pi) = \frac{3}{2}$ a minimem $f(2\pi/3) = f(4\pi/3) = \frac{3}{4}$.

b) Maximem je $f(-1) = 3$ a minimem $f(1) = 1$.

Domácí cvičení 8.9: Vyšetřete průběh funkce

a) $f(x) = (x + 1)^9 e^{-x}$,

b) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$,

c) $f(x) = (x + 1)^{2/3} - (x - 1)^{2/3}$,

d) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

e) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$,

f) $f(x) = x^{2/3}e^{-x}$,

g) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$,

h) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

a) $D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-\infty, 8)$ klesající na $(8, +\infty)$, lokální maximum v bodě 8 s hodnotou 9^9e^{-8}, konkávní na $(-\infty, -1)$ a $(5, 11)$, konvexní na $(-1, 5)$ a $(11, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$, asymptotou v $+\infty$ je $y = 0$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, rostoucí na celém definičním oboru, konvexní na $(-\infty, -1)$ a $(0, +\infty)$, konkávní na $(-1, 0)$, průsečík s osou x je v -1, průsečík s osou y v 1, je spojitě dodefinovatelná v bodě 1 hodnotou $4/3$, asymptotou v $\pm\infty$ je $y = x$.

c) Vyšetřovaná funkce je lichá, stačí proto uvažovat pouze $x > 0$. Zde je funkce rostoucí na $(0, 1)$ a klesající na $(1, +\infty)$, pro derivaci platí $\lim_{x\to1+} f'(x) = -\infty$ a $\lim_{x\to1-} f'(x) = +\infty$, dále $f(1) = 2^{2/3}$, funkce má lokální maximum v bodě 1 s hodnotou $2^{2/3}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

d) $D_f = (0, +\infty)$, rostoucí na $(0, e^2)$ a klesající na $(e^2, +\infty)$, konkávní na $(0, e^{8/3}$ a konvexní na $(e^{8/3}, +\infty)$ lokální maximum v bodě, e^2 s hodnotou $\frac{2}{e}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0+} = -\infty$ asymptotou v $+\infty$ je $y = 0$ a v 0 přímka $x = 0$, průsečíkem s osou x je bod 1.

e) $D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-1/2, +\infty)$, klesající na $(-\infty, -1/2)$, konvexní na $\big((-3-\sqrt{41})/8, (-3+\sqrt{41})/8\big)$ konkávní na zbytku $\mathbb{R}$, lokální minimum v bodě $-1/2$ s hodnotou $-\sqrt{5}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm1$, asymptotou v $\pm\infty$ je přímka $y = \pm1$, průsečík s osou y je -2 a s osou x je 2.

f) $D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(0, 2/3)$ a klesající na $(-\infty, 0)$ a $(2/3, +\infty)$, lokální minimum v bodě 0 s hodnotou 0 a lokální maximum v bodě $2/3$ s hodnotou $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-2/3}$, konvexní na $\big(-\infty, (2-\sqrt{6})/3\big)$ a $\big((2+\sqrt{6})/3, +\infty\big)$, konkávní na $\big((2-\sqrt{6})/3, (2+\sqrt{6})/3\big)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, asymptotou v $+\infty$ je $y = 0$, jediným průsečíkem s osami je bod $x = y = 0$.

g) $D_f = \mathbb{R}$, klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $(0, +\infty)$, lokální minimum v bodě 0 s hodnotou 0, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, konvexní na celém $\mathbb{R}$, asymptotou v $\pm\infty$ je přímka $y = \pm\frac{\pi}{2}x$.

h) $D_f = \mathbb{R}$, klesající na $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$, rostoucí na $(-1, 1)$, lokální maximum v 1 s hodnotou $\pi/2$ a lokální minimum v -1 s hodnotou $-\pi/2$, konvexní na $(-1, 0)$ a $(1, +\infty)$, konkávní na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, asymptotou v $\pm\infty$ je přímka $y = 0$.