Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT

Matěj Tušek
Katedra matematiky
FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora[1]. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho EDUXové stránce.

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 9

L'Hospitalovo pravidlo, Taylorova věta, opakování

L'Hospitalovo pravidlo; Taylorova věta a její využití k přibližným výpočtům.

Než se pustíte do počítání následujících příkladů, připomeňte si předpoklady **l'Hospitalova pravidla**.

Příklad 9.1: Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte následující limity.

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1+\ln x}{1-x^2},\quad b)\ \lim_{x\to 0} x\ln x^2,\quad c)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x}{x^{-1}}.$$

Řešení.

a) Limita je typu $\frac{0}{0}$, $1-x^2$ a $-2x$ jsou nenulové na okolí bodu 1 pro $x\neq 1$ a jak hned nahlédneme, limita podílu derivací existuje. Proto je následující výpočet oprávněný

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1+\ln x}{1-x^2}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{1}{x}}{-2x}=\frac{2}{-2}=-1.$$

b) Nejprve výraz upravíme (jedním z dvou možných způsobů, druhý by zde nepomohl),

$$x\ln x^2=\frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}}.$$

Pokud $x\to 0$, pak limita čitatele je $-\infty$ a limita jmenovatele neexistuje. Protože ale $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right|=+\infty$, $\frac{1}{x}$ a $-\frac{1}{x^2}$ je nenulové na okolí 0 pro $x\neq 0$ a jak ihned ověříme, limita podílu derivací existuje, můžeme l'Hospitalovo pravidlo použít. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} x\ln x^2=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-2x)=0.$$

c) Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$. Podobně jako v předchozím příkladě je jmenovatel $\frac{1}{x}$ i jeho derivace $-\frac{1}{x^2}$ nenulová pro $x\neq 0$ a navíc limita podílu derivací existuje, jak vidíme v následujícím výpočtu

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x}{x^{-1}}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=-1.$$

Příklad 9.2: Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočtěte limity

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg} x}-\cos x}{x+\sin x},\quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3-1},\quad c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Řešení.

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \cos x}{x + \sin x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x} + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{1}{1+0} e^0 + 0}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Předpoklady pro použití l'Hospitala jsou splněny: limita je typu $\frac{0}{0}$, limita podílu derivací existuje, $x \sin x$ i $1 + \cos x$ jsou nenulové na okolí 0 pro $x \neq 0$.

b) V tomto případě lze použít buď „přímý" výpočet,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

nebo alternativně můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Limita je totiž typu $\frac{0}{0}$, $x^3 - 1$ i $3x^2$ jsou nenulové pro $x \in (0, 2)$, $x \neq 1$, a limita podílu derivací existuje,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2} x^{-1/2}}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

c) Jedná se o limitu typu $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\sqrt{x}$ i $\frac{1}{2} x^{-1/2}$ jsou nenulové pro $x > 0$ a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} x^{-1/2}} = 2 \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Příklad 9.3: Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte následující limity.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad b)\ \lim_{x\to 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, \quad c)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Řešení. Zde už jenom stručně (doplňte ověření předpokladů!)

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

$$b)\ \lim_{x\to 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos \frac{\pi x}{2}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x (x-1)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1) + \ln x}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x - 1 + x \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2 + \ln x} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 9.4: Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$.

Řešení. Jedná se sice o limitu posloupnosti, ale pomocí Heineho věty k jejímu výpočtu můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Podrobněji, následující výpočet limity funkce,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0,$$

je korektní, protože jsme l'Hospitalovo pravidlo použili na limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$ a limita podílu derivací existuje (uvažujeme $\varepsilon > 0$!).

Posloupnost (n) zřejmě konverguje do $+\infty$ a proto podle Heineho věty a předchozího výpočtu platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0.$$

Zopakujme si znění **Taylorovy věty**. Z přednášky známe n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a. Taylorova věta tvrdí:
Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f je spojitá do n-té derivace na okolí H_a bodu a a nechť $f^{(n+1)}(x)$ existuje pro $x \in H_a$. Potom pro libovolné $x \in H_a$ existuje bod ξ ležící mezi body a a x tak, že platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Poslední člen, $f(x) - T_{n,a}(x) =: R_{n,a}(x)$, nazýváme **Lagrangeovým zbytkem**. Zdůrazněme, že hodnota ξ závisí na volbě x a n.

Pokud $a = 0$ pak v rámci zjednodušení značení tento bod neuvádíme v dolních indexech. Tj. Píšeme T_n místo $T_{n,0}$ a R_n místo $R_{n,0}$.

Příklad 9.5: Pro funkci $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ nalezněte 5. Taylorův polynom v bodě 0.

Řešení. Pro účely derivování upravíme $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. Nyní snadno napočteme prvních pět derivací:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},\ f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5},\ f^{(5)}(x) = -\frac{120}{(x+1)^6}.$$

Po dosazení $x = 0$, dostaneme následující Taylorův polynom:

$$T_5(x) = 2 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5.$$

Příklad 9.6: Pro funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ nalezněte 3. Taylorův polynom v bodě 0.

Řešení. Pro první tři derivace máme:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},\ f'''(x) = 2\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

Jelikož $f(0) = f''(0) = 0$, shrnujeme, že hledaný Taylorův polynom je

$$T_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Domácí cvičení 9.7: Pro funkci $f(x) = \arcsin x$ nalezněte 3. Taylorův polynom v bodě 0.

Domácí cvičení 9.8: Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nalezněte 5. Taylorův polynom v bodě 0.

Následující tři příklady ukazují různé způsoby použití Taylorovy věty.

Příklad 9.9: Odhadněte chybu ve výpočtu $\sin x$ pomocí polynomu $x - \frac{x^3}{6}$ pro $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.
Nápověda: Ukažte, že $x - \frac{x^3}{6}$ jsou první dva nenulové členy Taylorova polynomu pro funkci $\sin x$, a rozdíl odhadněte pomocí Lagrangeova tvaru zbytku.

Řešení. Snadno ověříme, že $x - \frac{x^3}{6}$ je skutečně 3-tí Taylorův polynom (zaznělo i na přednášce), přitom $T_3(x) = T_4(x)$. Pro absolutní hodnotu Lagrangeova zbytku po T_4 máme

$$|R_4(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \right| = \left| \frac{\cos \xi}{5!} x^5 \right| \leq \frac{1}{2^5\, 5!} \approx 0.000260417$$

pro všechna $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Příklad 9.10: Pro jaká x je absolutní hodnota chyby přibližného vyjádření $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ menší než 10^{-4}?
Nápověda: Viz nápověda pro úlohu 9.9.

Řešení. Snadno ukážeme, že $T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ (rovněž zaznělo na přednášce). Lagrangeův zbytek odhadneme podobně jako výše:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{\cos \xi}{4!} x^4 \right| \leq \frac{x^4}{4!}.$$

Požadujeme, aby $\frac{x^4}{4!} < 10^{-4}$, odtud

$$|x| < \frac{\sqrt[4]{24}}{10} \approx 0.22.$$

Příklad 9.11: Jak velké n musíte zvolit, aby chyba při výpočtu $f(x) = \ln(1 + x)$ pomocí n-tého Taylorova polynomu funkce f v bodě 0 na intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$ byla menší než 10^{-6}? Vypočtěte i příslušný Taylorův polynom.

Řešení. Nejprve musíme nalézt příslušný Taylorův polynom. Pro derivace funkce f platí

$$f(x) = \ln(1 + x), \qquad f'(x) = \frac{1}{1 + x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1 + x)^3}.$$

Z toho již nahlédneme, že

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{(1 + x)^k} \quad \text{a} \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Navíc $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$. n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě 0 proto je

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Pro absolutní hodnotu chyby po n-tém Taylorově polynomu platí

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

Je-li $x \in \langle 0, 1/2 \rangle$, pak jistě

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(1+0)^{n+1}} \cdot \frac{1/2^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)}.$$

První n, které splňuje $\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} < 10^{-6}$ je $n = 15$.

Domácí cvičení 9.12: Vypočtěte následující limity

$$a) \lim_{x \to 1} \frac{\sin^3(x-1)}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}, \quad b) \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{8+x} - 2}.$$

a) $\frac{1}{3}$, b) 6.

Domácí cvičení 9.13: Nalezněte pátý Taylorův polynom funkce $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 3$ v bodě 0.

Je k nalezení na této stránce.

Domácí cvičení 9.14: Najděte třetí Taylorův polynom funkce $f(x) = \arcsin(x)$ v bodě 0.

$T_3(x) = x + \dfrac{1}{6} x^3$.

Domácí cvičení 9.15: Najděte n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = xe^x$ v bodě 0.

$T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k$.

Domácí cvičení 9.16: Najděte $2n$-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ v bodě 0.

$T_{2n}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Domácí cvičení 9.17: Pomocí příslušného Taylorova polynomu funkce $f(x) = e^x$ druhého stupně vypočtěte přibližnou hodnotu $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ a odhadněte chybu tohoto přibližného výsledku.

$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $T_2(-1/4) = 25/32 \approx 0.781250$, $\left| e^{-1/4} - T_2(-1/4) \right| \leq \frac{1 \cdot (1/4)^3}{3!} \approx 0.00260$

Domácí cvičení 9.18: Pomocí Taylorova polynomu čtvrtého stupně v bodě 0 funkce $f(x) = \ln(1+x)$ nalezněte přibližnou hodnotu $\ln(1.5)$. Chybu v tomto případě nemusíte odhadovat.

$T_4(1/2) = 77/192 \approx 0.401042$.

Domácí cvičení 9.19: Jaký stupeň musí mít Taylorův polynom $T_n(x)$ v bodě 0 funkce $f(x) = \ln(1+x)$ aby se na intervalu $(-1/2, 1/2)$ funkční hodnoty f a T_n lišily nejvíce o 0.1?

$n = 9$.