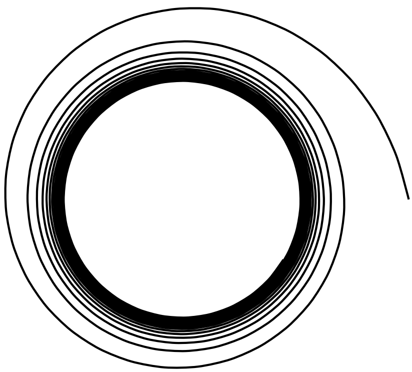
Úvod do BI-ZMA

Tomáš Kalvoda[1]

KAM FIT ČVUT

Zimní semestr 2013/2014, 24. října 2013



[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Obsah

Úvod

Tento dokument slouží k připomenutí základních pojmů a výsledků středoškolské matematiky, které jsou v předmětu Základy matematické analýzy (dále BI-ZMA) považovány za známé a studenty dobře ovládané. Zde vykládaný materiál se volně mísí s první úvodní přednáškou BI-ZMA.

Text je rozdělen do několika kapitol sdružujících tematicky podobnou problematiku. Z toho důvodu na sebe různé kapitoly a jejich části nemusí logicky navazovat. Účelem textu není systematický výklad učiva, ale jeho připomenutí, zdůraznění některých důležitých souvislostí, či vyložení látky z nového úhlu pohledu.

V první kapitole probereme základní pojmy týkající se matematického značení, množinových či číselných operací a symboliky. Druhá kapitola se zabývá významem a důležitostí důkazů. Třetí kapitola pak obsahuje základní vlastnosti tzv. elementárních funkcí. Tedy zejména polynomů, racionálních lomených funkcí, trigonometrických funkcí, exponenciálních a logaritmických funkcí. Poslední kapitola shrnuje základní metody popisu geometrických rovinných útvarů pomocí analytické geometrie.

Pro pohodlnost čtenáře je text doplněn seznamem obrázků a tabulek, takže podle čísla obrázku (resp. tabulky) lze snadno dohledat stránku na které se tento obrázek (resp. tabulka) nachází. Na samém konci je pak k dispozici i relativně podrobný rejstřík pojmů a několik odkazů na použité zdroje.

Významné rovnice jsou číslované v rámci kapitol. Rovnice (3.5) je pátou číslovanou rovnicí ve třetí kapitole. Stejný způsob číslování používáme i v případě obrázků a tabulek. V elektronické verzi tohoto dokumentu jsou tyto odkazy aktivní.

Přehled užitého značení

Níže uvedené značení je kompatibilní s přednáškami a cvičeními BI-ZMA. V tabulce č. 1 jsou uvedena často používaná řecká písmenka i s jejich přibližnou českou výslovností.

$=$ .... symbol rovnosti
$:=$ .... definiční rovnost, symbol nalevo je definován pravou stranou
$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ .... množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ .... množina přirozených čísel s 0
$\mathbb{Z}$ .... množina celých čísel
$\mathbb{Q}$ .... množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$ .... množina reálných čísel
$\mathbb{C}$ .... množina komplexních čísel
$\mathrm{Re} z$ .... reálná část komplexního čísla z
$\mathrm{Im} z$ .... imaginární část komplexního čísla z
(a, b) .... otevřený interval, uspořádaná dvojice nebo bod v rovině
$\langle a, b\rangle$ .... uzavřený interval
$A \cup B$ .... sjednocení množin A a B
$A \cap B$ .... průnik množin A a B
$A \setminus B$ .... doplněk množiny B do množiny A
$A \times B$ .... kartézský součin množin A a B
D_f nebo $D(f)$ .... definiční obor funkce f
H_f nebo $H(f)$ .... obor hodnot funkce f
sin .... funkce sinus
cos .... funkce kosinus
tg .... funkce tangens

cotg .... funkce kotangens
arcsin .... funkce arkus sinus
arccos .... funkce arkus kosinus
arctg .... funkce arkus tangens
$\log_a$ .... logaritmus o základu a
ln .... přirozený logaritmus
$\lfloor x \rfloor$ .... dolní celá část reálného x
$\lceil x \rceil$ .... dolní celá část reálného x
e .... Eulerovo číslo
π .... Ludolfovo číslo
i .... imaginární jednotka
$n!$ .... faktoriál čísla n
$\binom{n}{k}$ .... kombinační číslo

Řecké písmeno	Kapitálka	Česká výslovnost	LaTeX
α		alfa	`\alpha`
β		beta	`\beta`
γ	Γ	gama	`\gamma`
δ	Δ	delta	`\delta`
ϵ		epsilon	`\epsilon`
ζ		zeta	`\zeta`
η		éta	`\eta`
θ	Θ	théta	`\theta`
κ		kapa	`\kappa`
λ	Λ	lambda	`\lambda`
μ		mí	`\mu`
ν		ný	`\nu`
ξ	Ξ	ksí	`\xi`
π	Π	pí	`\pi`
ρ		ró	`\rho`
σ	Σ	sigma	`\sigma`
τ		tau	`\tau`
φ	Φ	fí	`\varphi`
χ		chí	`\chi`
ψ	Ψ	psí	`\psi`
ω	Ω	omega	`\omega`

Tabulka 1: Často používaná písmenka řecké abecedy.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Poznámka k matematické notaci

Každý programovací jazyk vyžaduje dodržování správného zápisu kódu neboli **syntaxe**. Pokud programátor zvyklosti daného jazyka nedodržuje, může být jeho kód pro překladač (případně interpretr) nesrozumitelný a tedy nepoužitelný. Ačkoliv matematika nemá žádný pevně kodifikovaný způsob zápisu, je dobré dodržovat některé tradiční zvyklosti. V této podkapitole se proto pokusíme shrnout aspoň ty nejdůležitější. Nejprve rozebereme význam veledůležitého symbolu rovnosti $=$.

V programovacích jazycích i v matematickém zápisu hraje symbol $=$ velmi zásadní roli. Bohužel v každé z těchto oblastí se používá trochu jiným způsobem, což má velmi často za následek zmatení. V drtivé většině programovacích jazyků má symbol `=` význam tzv. **přiřazení**. Například řádek

```
a = 2
```

značí, že od této chvíle má proměnná `a` hodnotu `2`. Podobně kód

```
a = a + 1
```

počítači říká, že nová hodnota `a` má být stará hodnota `a` zvětšená o `1`. Dále se v programování často objevuje symbol `==`, který testuje skutečnou rovnost dvou objektů. Tedy například kód

```
a == b
```

je vyhodnocen jako pravdivý (`true`) pokud se `a` a `b` rovnají[1]. V opačném případě je vyhodnocen jako nepravdivý (`false`).

V matematickém zápisu je situace o něco komplikovanější. V podstatě lze říci, že velmi závisí na **kontextu** v jakém se symbol rovnosti používá. Základní význam symbolu $=$ je k vyjádření **rovnosti dvou známých** objektů. Tímto způsobem je formulováno tvrzení, např.

$$a = b, \tag{1.1}$$

které buď platí, nebo ne. Pro čísla 3 a 4 je rovnost $4 = 4$ pravdivá, ale pro 4 a 3 je rovnost $4 = 3$ nepravdivá. V tomto významu má matematický symbol $=$ blízko k programátorskému `==`. Symbol $=$ se dále používá k zápisu **rovnice**. Například v rovnici

$$x^2 - 1 = 0 \tag{1.2}$$

označujeme pomocí x **neznámou**, tedy objekt který je třeba určit tak, aby po jeho dosazení do (1.2) vzniklá rovnost platila. O takovýchto x pak říkáme, že jsou **řešením** rovnice (1.2). V našem případě rovnice (1.2) jsou čísla 1 a -1 řešením, libovolná další reálná čísla řešením nejsou. Skutečně, po dosazení 1 či -1 do (1.2) dostáváme rovnost $0 = 0$, která platí. Naproti tomu například po dosazení 2 získáme $3 = 0$, která je jistě nepravdivá.

Symbol $=$ se dále používá i k přiřazení ve smyslu programátorském. To odhalíme snadno z kontextu, podívejme se podrobně na následující textovou ukázku.

> Uvažujme obdélník o stranách délky $a = 3$ a $b = 4$. Označme délku úhlopříčky tohoto obdélníku symbolem e. Podle Pythagorovy věty platí rovnost $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, tedy v našem případě platí $e = 5$.

První dvě použití symbolu $=$, označené červeně, jsou ve smyslu přiřazení. Od tohoto momentu mají symboly a a b příslušné hodnoty. V programátorské hantýrce bychom řekli, že proměnné a a b byly inicializovány. Druhá věta odstavce sice symbol $=$ neobsahuje, ale její význam je stejný, dává jednoznačný význam symbolu e. Konečně v poslední větě se **tvrdí**, že modré rovnosti jsou pravdivé. Zde se už nejedná o přiřazení/definici/inicializaci, ale o platnosti jistého vztahu mezi zavedenými objekty a, b a e.

[1] Význam rovnosti může záviset na konkrétním objektu, na jeho typu.

Někdy se ke značení přiřazení používá symbolu $:=$. Zvláště, chceme-li zvýraznit zavedení nového objektu. Symbol na levé straně od $:=$ je pak **definován** výrazem na pravé straně od $:=$. Na tomto místě čtenáře upozorňujeme, že v CAS[2] *Mathematica* je význam probíraných symbolů ještě lehce odlišný. Vizte kapitolu 5.

Shrňme nyní několik dalších notačních zvyklostí. Ačkoliv je volba označení používaných objektů zcela v režii autora, je dobré řídit se následujícími nepsanými pravidly.

- Neznámé v rovnicích se označují písmeny z konce abecedy, typicky například x, y, či z.
- Známé – definované – objekty, či parametry problému, se označují písmeny ze začátku abecedy. Například a, b, c, atd.
- Pro sčítací indexy (vizte níže podkapitolu 1.5) a celočíselné veličiny se často používá písmen i, j, k, ℓ, m nebo n. Pří používání písmenka i je třeba dát pozor, aby nedošlo ke kolizi s imaginární jednotkou, označovanou též[3] i.
- Množiny se označují velkými písmeny abecedy $A, B, C, \ldots$ Body v rovině se také většinou označují velkými písmeny latinské abecedy.
- K parametrizaci geometrických objektů (přímky, kružnice, plochy atp.) se používají r, s, t.

Dále připomeneme roli závorek v matematickém zápisu. Závorky používáme k označení argumentu funkcí (zobrazení), k upřesnění pořadí provádění operací, či k značení intervalů a bodů. Bez použití závorek by řada algebraických výrazů nedávala smysl.

Máme-li funkci f a bod a z definičního oboru funkce f, pak $f(a)$ označuje funkční hodnotu funkce f v bodě a. Toto použití závorek tedy přesně odpovídá tomu, s kterým se setkáte v programovacích jazycích. Bylo-li f a a předem definováno, význam výrazu $f(a)$ je: zavolej funkci f s argumentem a a vrať výsledek. Hodnotu a lze chápat jako vstup a $f(a)$ jako výstup funkce f. Graficky si tuto situaci můžeme představovat jako na obrázku č. 1.1.

[2] *Computer Algebra System*

[3] Proto se imaginární jednotku snažíme aspoň typograficky odlišit, porovnejte i a i.

$$a \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(a)$$

Obrázek 1.1: Funkce a funkční hodnota. Na vstupu je a a na výstupu $f(a)$.

Někdy se však mluví přímo o $f(x)$ jako o funkci. Tento úhel pohledu často používáme v případě, že chceme zároveň čtenáři sdělit jak budeme označovat nezávisle proměnnou (zde x). Navíc se v některých případech závorky u argumentů funkcí vynechávají. Např. často píšeme $\sin\alpha$ místo $\sin(\alpha)$ nebo $\ln 2$ místo $\ln(2)$. Je však třeba opatrnosti, neboť jinak může dojít k nedorozumění. Například výraz

$$\ln 2 \cdot 3$$

by mohl být interpretován jako

$$\ln(2 \cdot 3) \quad \text{nebo} \quad \ln(2) \cdot 3.$$

Tato čísla samozřejmě **nejsou** stejná. Pomocí kapesního kalkulátoru se snadno přesvědčíme, že přibližně platí následující rovnosti

$$\begin{aligned} &\ln(2 \cdot 3) = \ln(6) \approx 1.791\,759\,469\,23, \\ &\ln(2) \cdot 3 \approx 2.079\,441\,541\,68. \end{aligned}$$

Zvláště při „ručním“ počítání[4] mohou tyto nepřesnosti vést ke katastrofálním chybám.

Upozorněme ještě, že pro některé funkce se používá speciální notace nevyžadující závorky. Například druhá odmocnina se značí $\sqrt{a}$, třetí odmocnina $\sqrt[3]{a}$, nebo absolutní hodnota $|a|$.

Závorky se dále, stejně jako v programovacích jazycích, používají k upřesnění pořadí provádění operací. Například výraz

$$\Big(a + (c/2)\Big) \cdot 3$$

je třeba číst následovně: nejprve vyděl c dvěmi a k výsledku přičti a. Takto získané číslo vynásob třemi. Bez závorek,

$$a + c/2 \cdot 3,$$

[4] Například v písemce.

by (bez zavedení **konvencí**[5] přednosti operací) nemuselo být jasné jak přesně tento výraz vyhodnotit.

Na závěr této podkapitoly ještě zmiňme horní a dolní indexy. Horní index se většinou používá k označení mocnin, například

$$3^5, \quad a^n, \quad e^2, \quad \text{atp.}$$

Někdy se horní index používá i k označení složek vektorů, nebo třeba operace komplexního sdružení, a^* místo $\overline{a}$.

Dolní index slouží k označení buď pořadí prvku v posloupnosti, nebo obecněji závislosti dané veličiny na celočíselném parametru. Tento zápis má blízko k indexování prvků pole, programátorské `a[2]` má prakticky stejný význam jako naše a_2.

1.2 Operace s množinami

Pod pojmem **množiny** rozumíme sadu objektů zadanou výčtem, nebo pomocí vlastnosti, kterou musí prvky množiny splňovat[6]. Pokud je počet prvků malý, nebo je lze jednoduše vyjmenovat, píšeme například

$$A = \{\pi, e\}, \quad B = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Je-li N množina a $A(x)$ výrok o x z N pak množina

$$C = \{x \in N \mid A(x)\}$$

je tvořena všemi $x \in N$ pro které je výrok $A(x)$ pravdivý.

Pokud x patří do množiny A, píšeme $x \in A$, v opačném případě pak $x \notin A$. **Prázdnou množinu**, tj. množinu neobsahující žádné prvky, označujeme symbolem $\emptyset$.

[5] Ano, přednost násobení před sčítáním je pouze konvenční a umožňuje nám zpřehlednit řadu algebraických výrazů.

[6] Tato naivní definice může obecně vést k logickým paradoxů, nejznámějším je asi Russelův paradox. Uvažujeme-li pouze „malé“ podmnožiny číselných množin k žádným problémům nedojde. Problematikou definice pojmu množiny se podrobně zabývá matematická Teorie množin. Například Zermelo-Fraenkelova teorie pocházející z počátku dvacátého století.

Připomeňme základní operace s množinami. O dvou množinách A a B říkáme, že jsou **stejné** (nebo **jsou si rovny**) právě, když mají stejné prvky. Tento fakt zapisujeme symbolicky $A = B$. Pokud dvě množiny nejsou stejné, hovoříme o nich jako o **různých** množinách a píšeme $A \neq B$.

Máme-li dvě množiny A a B, pak jejich **průnik** definujeme jako množinu všech prvků, které patří zároveň do A i do B. Průnik dvou množin značíme symbolem $A \cap B$. Symbolicky tedy tuto množinu můžeme popsat jako

$$A \cap B := \Big\{ x \,\Big|\, x \in A \text{ a } x \in B \Big\}.$$

Sjednocení dvou množin A a B je tvořeno všemi prvky, které patří do A nebo[7] do B. Značíme ho symbolem $A \cup B$ a lze tedy psát

$$A \cup B := \Big\{ x \,\Big|\, x \in A \text{ nebo } x \in B \Big\}.$$

Další důležitou množinovou operací je **doplněk** (někdy též nazývaný **rozdíl dvou množin**). Doplněk množiny B do množiny A je tvořen všemi prvky A co nepatří do B. Značíme ho $A \setminus B$ a platí

$$A \setminus B := \Big\{ x \,\Big|\, x \in A \text{ a } x \notin B \Big\}.$$

Pokud se bavíme pouze o podmnožinách jisté množiny X, pak pro podmnožinu $A \subset X$ označujeme $A^c := X \setminus A$.

Všimněte si, že zatímco pro libovolné dvě množiny A a B platí

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{a} \quad A \cap B = B \cap A,$$

tak pro rozdíl dvou množin tato vlastnost (komutativita) neplatí. Tedy obecně množina $A \setminus B$ je různá od množiny $B \setminus A$.

Další základní operací mezi množinami je **kartézský součin** množin. Pro libovolné dvě množiny A a B je jejich kartézský součin, ozn. $A \times B$, tvořen všemi uspořádanými dvojicemi prvků z A a B, tj. dvojicemi (a, b) kde $a \in A$ a $b \in B$. Přesněji

$$A \times B := \Big\{ (a, b) \,\Big|\, a \in A \text{ a } b \in B \Big\}.$$

Kartézský součin lze zavést i pro více množin. Například pod $A \times B \times C$ rozumíme množinu všech uspořádaných trojic prvků z A, B a C.

[7] Toto „nebo“ není exkluzivní.

Otázka 1: Pokud jsou A a B množiny s konečným počtem prvků (ozn. $\#A$ a $\#B$), kolik prvků má množina $A \times B$?

Otázka 2: Dokažte de Morganovy zákony pro průnik a sjednocení, tedy rovnosti

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{a} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

platné pro $A, B \subset X$.

1.3 Číselné množiny

Množinu **přirozených čísel**[8] označujeme symbolem $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Všimněte si, že množina přirozených čísel je tzv. uzavřená vůči násobení a sčítání. Přesněji, násobením a sčítáním dvou přirozených čísel dostaneme opět přirozené číslo:

$$\text{pokud } a, b \in \mathbb{N} \text{ potom } a + b \in \mathbb{N},$$
$$\text{pokud } a, b \in \mathbb{N} \text{ potom } a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Množina $\mathbb{N}$ však není uzavřená vůči odečítání dvou přirozených čísel. V případě sčítání můžeme tento fakt také formulovat tak, že rovnice

$$a = b + x$$

pro zadaná přirozená $a, b \in \mathbb{N}$ nemusí mít přirozené řešení x. Skutečně, uvažte třeba $a = 4$ a $b = 5$

K odstranění tohoto nedostatku musíme k přirozeným číslům dodat záporná čísla. Dostáváme tak množinu **celých čísel**,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

V této množině už můžeme násobit, sčítat i odčítat, ale výsledek operace dělení už tuto množinu opustí. Tedy řešení rovnice

$$a = b \cdot x, \tag{1.3}$$

[8] Množinu přirozených čísel s nulou značíme $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

pro zadaná celočíselná a a b nemusí být celočíselné. Musíme přejít k racionálním číslům. Množina **racionálních čísel** je tvořena řešeními rovnice (1.3), která zapisujeme jako zlomky

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná} \right\}.$$

Operace sčítání a násobení je na zlomcích definována pomocí operací v $\mathbb{Z}$ následovně

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}, \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}, \quad \text{kde} \quad \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}.$$

Racionální čísla $\mathbb{Q}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ splňují veledůležité vztahy

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \tag{1.4}$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \tag{1.5}$$

platné pro libovolná racionální čísla a, b, c. Rovnosti (1.4) se nazývají **asociativními zákony** pro sčítání, resp. násobení. Pouze díky jejich platnosti můžeme u opakovaného sčítání a násobení přestat psát závorky. Celkový výsledek totiž na uzávorkování nezáleží[9]. Rovnost (1.5) se nazývá **distributivní zákon**. Čtenář je s ním jistě intimně obeznámen, neboť díky němu lze provádět operaci „vytýkání před závorku“. Význačným prvkem množiny racionálních čísel je číslo 0, které splňuje

$$0 + a = a$$

pro libovolné racionální číslo a. Ke každému racionálnímu číslu a existuje racionální číslo označované jako $-a$ splňující

$$a + (-a) = 0$$

[9]Např. $(4 + 2) + 1 = 4 + (2 + 1) = 4 + 2 + 1 = 7$. Uvědomte si, že toto není automaticky splněno pro libovolnou binární operaci. Uvážíme-li např. operaci dělení $\div$, $a \div b := \frac{a}{b}$, pak

$$\frac{1}{4} = (2 \div 4) \div 2 \neq 2 \div (4 \div 2) = 1.$$

Podobný význam jako číslo 0 pro operaci sčítání má číslo 1 pro operaci násobení, pro každé racionální číslo a platí

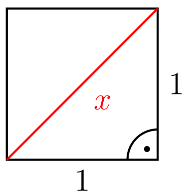
$$1 \cdot a = a.$$

Konečně ke každému nenulovému racionálnímu číslu a existuje racionální číslo označované jako a^{-1} splňující

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Předchozí odstavec lze shrnout do krátkého konstatování, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ tvoří tzv. „těleso“. Studiem číselných těles se zabývá partie matematiky nazývaná obecná algebra. Tato teorie nachází široké uplatnění v moderních šifrovacích algoritmech a počítačové bezpečnosti vůbec.

Na začátku této sekce jsme viděli, že přirozených a celých čísel „nebylo dost“. K uspokojení našich požadavků bylo vždy nutné nějaká další čísla dodat. Podobná situace je i u racionálních čísel. Tato množina je již sice uzavřená vůči binárním operacím sčítání a násobení, ale nyní narazíme například při analýze následujícího geometrického problému. Uvažujme čtverec o straně délky 1 (racionální číslo), vizte obrázek č. 1.2. Ptáme se, jaká je délka jeho úhlopříčky.



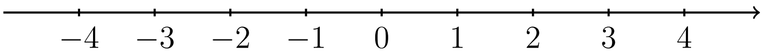
Obrázek 1.2: Čtverec o straně délky 1 a jeho úhlopříčka o straně délky x.

Na obrázku č. 1.2 je tato označena písmenem x. Podle Pythagorovy věty platí

$$1^2 + 1^2 = x^2. \tag{1.6}$$

Tedy $x^2 = 2$. Takovéto kladné číslo nazýváme odmocninou ze dvou a značíme $x = \sqrt{2}$. Lze snadno ukázat, že toto číslo **není** racionální. Vizte větu 6.

Mezi iracionální čísla dále patří například Ludolfovo[10] číslo π či Eulerova[11] konstanta e. V jistém smyslu je iracionálních čísel podstatně více než racionálních. Čísla si můžeme představovat jako body ležící na přímce. Na přímce je zvolen význačný bod odpovídající nule 0 a číslo a vynášíme na osu ve vzdálenosti $|a|$ od bodu 0. Kladná čísla napravo a záporná čísla nalevo od 0.



Obrázek 1.3: Číselná osa.

Pokud bychom na osu vynášeli pouze racionální čísla, výsledná přímka by byla „děravá“. Například ve vzdálenosti $\sqrt{2}$ (napravo i nalevo) od bodu 0 by nebyl vynesen žádný bod. K zaplnění číselné osy je potřeba uvažovat i iracionální čísla. Přesnou formulací požadavku, aby reálná osa nebyla „děravá“ je, aby reálná čísla splňovala „axiom úplnosti“. Podrobněji se touto problematikou budeme zabývat v jedné z prvních přednášek BI-ZMA.

Poznamenejme pro zajímavost, že rozhodnout o racionálnosti či iracionálnosti čísla nemusí být jednoduché. Dokonce existují čísla, o kterých se doposud **neví**, do které množiny patří. Příkladem může být Euler-Mascheroniho konstanta definovaná vztahem[12]

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Více detailů o tomto konkrétním problému lze nalézt v [3].

Mohlo by se zdát, že po doplnění racionálních čísel iracionálními čísly již žádná další čísla není nutné přidávat. Všimněte si, že geometrickou úvahu z minulého odstavce lze prostě redukovat na požadavek (vizte (1.6)), aby rovnice

$$x^2 - 2 = 0$$

měla v dané číselné množině řešení (zde $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$). Ovšem už hned jednoduchá obměna této rovnice,

$$x^2 + 1 = 0, \tag{1.7}$$

[10]Ludolph van Ceulen, 1540 – 1610, matematik nizozemského původu, zasvětil svůj život výpočtu čísla π na 35 desetinných míst, která jsou i vyryta na jeho náhrobku.

[11]Leonhard Euler, 1707 – 1783, švýcarský matematik a fyzik.

[12]O limitě se dozvíte podrobněji v BI-ZMA.

nemá reálné řešení. Tuto rovnici lze vyřešit zavedením nového čísla i, jež splňuje rovnost $\mathrm{i}^2 = -1$. Toto i pak řeší naši rovnici (1.7). Číslo i nazýváme **komplexní jednotkou**. Získáváme tak **komplexní čísla**,

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

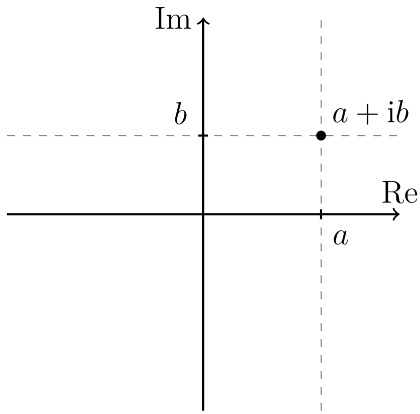
Je-li $z = a + \mathrm{i}b$ komplexní číslo, pak reálné číslo a nazýváme **reálnou částí** z a reálné číslo b **imaginární částí** z. Dvě komplexní čísla se rovnají, právě když se rovnají jejich reálné a imaginární části. Reálnou část čísla komplexního čísla z značíme $\mathrm{Re}\, z$ a imaginární část značíme $\mathrm{Im}\, z$.

Algebraické operace na množině $\mathbb{C}$ jsou zavedeny následovně

$$\begin{aligned}(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) &:= (a + c) + \mathrm{i}(b + d),\\ (a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) &:= (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc), \quad a + \mathrm{i}b,\ c + \mathrm{i}d \in \mathbb{C}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Všimněte si, že pokud $d = b = 0$ pak součet $a + c$ a součin $a \cdot c$ má stejný význam jako v reálných číslech.

Jedním z možných způsobů jak si představovat komplexní čísla, je jako body v **komplexní rovině**. Vodorovnou osu nazýváme **reálnou osou** a svislou osu nazýváme **imaginární osou**. Komplexnímu číslu $a + \mathrm{i}b$ pak odpovídá bod o souřadnicích (a, b). Vizte obrázek č. 1.4.



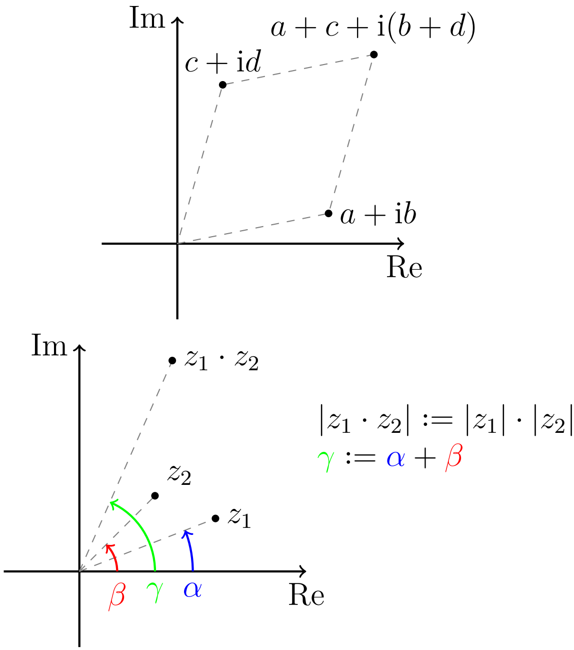
Obrázek 1.4: Komplexní rovina.

Zavádí se **absolutní hodnota komplexního čísla**

$$|a + \mathrm{i}b| := \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

V komplexní rovině si lze absolutní hodnotu komplexního čísla $a + ib$ představovat jako délku úsečky spojující body 0 a $a + bi$. Číslo $a - ib$ nazýváme **komplexně sdruženým číslem** k číslu $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Komplexně sdružené číslo tak získáme zrcadlením vůči reálné ose.

Operaci sčítání komplexních čísel si lze představit jako sčítání vektorů (sčítá se „po složkách“). Operaci násobení komplexních čísel lze v komplexní rovině znázornit jako rotaci a škálování. To není zcela zřejmé tvrzení, lze ho však odvodit z definice operace násobení (1.8). Pro ilustraci uvádíme obrázek č. 1.5. Speciálně násobení imaginární jednotkou i si lze v komplexní rovině představovat jako rotaci o úhel $\frac{\pi}{2}$.



Obrázek 1.5: Geometrická interpretace operace sčítání a násobení komplexních čísel.

Důvod k zavedení komplexních čísel se může zdát jako uměle vykonstruovaný. Například se hned nabízí otázka, zda v případě že budeme zkoumat řešení jiné polynomiální rovnice než (1.7), nebudeme potřebovat další komplexní jednotku. Odpověď na tuto otázku podal Gauss ve své slavné Fundamentální větě algebry: každý polynom s komplexními koeficienty stupně n má nejvýše n komplexních kořenů. K řešení polynomiálních rovnic tedy naprosto stačí komplexní čísla.

Řada matematických metod aplikovaných v praxi je ve své podstatě komplexní. Například Fourierova transformace (resp. *Fast Fourier Transform*, FFT) využívaná k analýze signálu je bez aparátu komplexních čísel jen nešikovně popsatelná. Bez komplexních čísel by jen velmi těžko šlo formulovat kvantovou mechaniku, teorii na které stojí řada moderních technologií a jež možná v budoucnu kompletně změní otázku bezpečnosti IT.

Na závěr této kapitolky poznamenejme, že komplexní čísla lze ještě dále rozšířit na **těleso kvaternionů**. Zde nemáme jen jednu komplexní jednotku, ale hned tři (i, j a k). Celkem tedy čtyři jednotky (jedna reálná 1 a tři „komplexní“), odtud název. Vztahy mezi těmito jednotkami jsou definovány pomocí rovnic

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \quad \text{a} \quad \mathrm{ijk} = -1. \tag{1.9}$$

Množinu

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

s operacemi definovanými podobně jako v komplexních číslech, zavedl Hamilton[13]. Proč se tu o kvaternionech zmiňujeme? Pomocí kvaternionů lze totiž velmi výhodně (ve výpočetním slova smyslu) počítat například rotace vektorů v třírozměrném prostoru. Řada algoritmů implementovaných v grafických kartách jich využívá[14].

Otázka 3: Vypočtěte reálné a imaginární části následujících komplexních čísel.

a) $z = (4 + 3\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})$, b) $z = (2 - \mathrm{i})^2$,

c) $z = \mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$, d) $z = \dfrac{1}{2 + \mathrm{i}}$.

1.4 Podmnožiny reálných čísel

V této kapitole připomeneme definici intervalů a uvedeme několik pojmů popisujících vlastnosti podmnožin reálných čísel.

[13] Sir William Rowan Hamilton (4. srpna 1805 – 2. září 1865) byl irský fyzik a matematik. Definiční vztahy (1.9) při jejich objevení vyryl do mostu v Dublinu.

[14] Pro zajímavost vizte např. [2].

Intervaly představují důležité podmnožiny množiny reálných čísel. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ zavádíme značení:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b\right\} && \text{otevřený interval,}\\
\langle a,b\rangle &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x \le b\right\} && \text{uzavřený interval,}\\
\langle a,b) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x < b\right\} && \text{polouzavřený interval,}\\
(a,b\rangle &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \le b\right\} && \text{polouzavřený interval,}\\
(a,+\infty) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x\right\} && \text{neomezený interval.}
\end{aligned}
$$

Podobně zavádíme neomezené intervaly $\langle a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ a $(-\infty, a\rangle$.

Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou shora** (resp. **zdola**) právě, když existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in A$ platí $x < K$ (resp. $K < x$). Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou** právě, když je omezená shora i zdola zároveň.

Buď $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $a \in A$ nazýváme **maximem množiny** A právě, když pro každé $x \in A$ platí nerovnost $x \le a$. Číslo $b \in A$ nazýváme **minimem množiny** A právě, když pro každé $x \in A$ platí nerovnost $b \le x$. Maximum (resp. minimum) množiny A také značíme $\max A$ (resp. $\min A$).

Maximum ani minimum množiny nemusí vždy existovat. Například interval $(1, 2)$ nemá ani minimum ani maximum. Skutečně čísla 1 ani 2 nepatří do množiny $(1, 2)$. Tento problém lze odstranit zavedením infima a suprema množiny.

Otázka 4: Která z následujících množin je shora omezená, zdola omezená či omezená?

a) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

b) množina všech prvočísel,

c) množina všech řešení nerovnice $x^2 - (\pi + 1)x + \pi > 0$,

d) $\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1.5 Zkrácené psaní součtů a součinů

Velmi často narazíme na potřebu sčítat jistý konečný počet čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, případně potřebu diskutovat vlastnosti tohoto součtu. Místo zdlouhavého a potenciálně nejednoznačného[15] výrazu

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{1.10}$$

píšeme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Symbol $\sum$ je velké písmeno řecké abecedy sigma, tedy „s“. Je zvoleno protože označuje **s**oučet (v češtině jde o náhodu, anglicky **s**um). „Lokální proměnná“ k se nazývá sčítací index, číslo 1 **dolní mez** a číslo n **horní mez**. Je pouze na naší volbě jak sčítací index označíme, například součty

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

jsou si rovné, označují stejný součet (1.10), který samozřejmě na žádném sčítacím indexu nezávisí (nevyskytuje se v něm ani k ani j).

Díky asociativnímu a komutativnímu zákonu (vizte (1.4)) platí rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k. \tag{1.11}$$

Skutečně, stačí použít asociativitu a komutativitu sčítání a vhodně přeuspořádat sčítance. Podobně díky distributivnímu zákonu (vizte (1.5)) je pravdivé tvrzení

$$\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{1.12}$$

zde $c \in \mathbb{R}$ je jistá konstanta, tedy číslo nezávislé na k. Tato rovnice představuje zobecnění známé operace „vytýkání před závorku“. V obou rovnicích (1.11) a (1.12) je naprosto podstatné, že dolní i horní mez jsou stejné.

[15] Čtenář by mohl v konkrétním případně špatně pochopit co má doplnit za „tečky“.

Ukažme si tento koncept na konkrétním příkladě. Chceme sečíst všechna přirozená čísla od 3 do 10. Zkrácený zápis je následující

$$S = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{k=3}^{10} k. \tag{1.13}$$

Porovnejte tento způsob zápisu součtu s použitím `for` cyklu k nalezení tohoto součtu.

```
int main()
{
 int sum = 0;
 for (int k = 3; k <= 10; k++) sum += k;
 cout << "Soucet je: " << sum << endl;
 return 0;
}
```

K provádění výpočtů pomocí této sumační notace je dobré umět manipulovat se sčítacími indexy. Například součet S v rovnici (1.13) lze zapsat také jako (sčítáme v opačném pořadí)

$$S = \sum_{k=1}^{8}(11 - k) = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3,$$

nebo (sčítací index běží pěkně od 1 a sčítáme ve stejném pořadí jako původně)

$$S = \sum_{k=1}^{8}(2 + k).$$

Zdůrazněme pointu tohoto odstavce znovu, **jeden součet lze vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby**.

Někdy se změnou mezí sčítacího indexu součet změnit nemusí, jako například zde

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

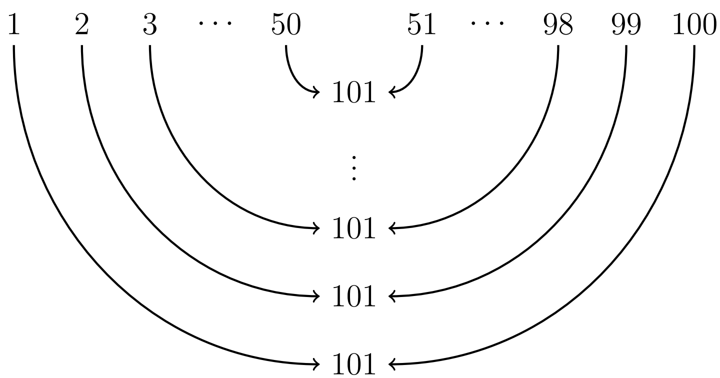
Přidali jsme totiž jen člen odpovídající $k = 0$ splňující $0^2 = 0$.

Příklad 1 (Gaussův trik)**:** Traduje se, že mladý Gauss[16] dostal ve škole za úkol sečíst všechna čísla od 1 do 100. Jakožto jediný ve třídě dosáhl dobrého výsledku, neboť nesčítal čísla od nejmenšího k největšímu, ale všiml si, že pokud sečte první (tj. 1) s posledním (100) dostane součet 101, pokud sečte druhé (2) a předposlední (99) dostane opět 101. Takto může postupovat až k $50+51=101$. Graficky je tento postup znázorněn na obrázku č. 1.6. Výsledek je tedy

$$50 \cdot 101 = 5050.$$

Obecně platí, že součet čísel od 1 do jistého přirozeného n je

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.14}$$



Obrázek 1.6: Gaussův trik.

Důkaz formulky (1.14). Pomocí sumační notace je snadné Gaussovu myšlenku popsat následovně

$$\sum_{k=1}^{100} k = \sum_{k=1}^{50} \Big(k + (101-k)\Big) = \sum_{k=1}^{50} 101 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

[16] Johann Carl Friedrich Gauss (30. dubna 1777 – 23. února 1855) byl německý matematik.

Všimněte si, že naprosto stejný trik lze použít v případě, kdy máme sečíst čísla od 1 do obecného n:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}\Big(k + (n+1-k)\Big) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1)
\end{aligned}
$$

Dostáváme tak veleznámý vzoreček (1.14). □

K dostatečnému ocenění tohoto výsledku je vhodné si uvědomit rozdíl mezi zadáním (sečíst čísla od 1 do 100) a výsledkem. Na levé straně rovnosti

$$
\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot (100+1)}{2}
$$

musíme provést celkem 99 operací sčítání oproti jednomu sčítání, násobení a dělení na straně pravé. Proto byl Gauss jediný, kdo získal dobrý výsledek. Poznamenejme, že když budeme zvětšovat n, tak počet operací na levé straně bude stále růst, kdežto počet operací nutných k vyhodnocení Gaussova vzorečku bude stále stejný. Implementace tohoto konkrétního součtu pomocí prosté sumy by proto byla značně neefektivní. Pomocí Landauovy symboliky lze toto pozorování vyjádřit konstatováním, že složitost součtu samotného je $\mathcal{O}(n)$ a Gaussova vzorce $\mathcal{O}(1)$. O Landauově symbolice se podrobněji zmíníme na přednáškách BI-ZMA.

Příklad 2 (Součet prvních n členů geometrické posloupnosti)**:** Pro každé reálné q, různé od 1, a přirozené n platí

$$
\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{1.15}
$$

Přímý důkaz. Označme si zkoumaný výraz jako

$$
S_n := \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}, \quad n \in \mathbb{N}.
$$

Přímo z jeho definice plynou vztahy

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = 1 + q\Big(1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}\Big) = \\ &= 1 + qS_n, \\ S_{n+1} &= S_n + q^n, \end{aligned}$$

platné pro libovolné kladné přirozené n. Porovnáním těchto dvou různých výrazů pro S_{n+1} dostáváme rovnost

$$1 + qS_n = S_n + q^n$$

odkud

$$S_n(1 - q) = 1 - q^n.$$

Za uvedeného předpokladu $q \neq 1$ pak ihned dostáváme dokazovaný vztah (1.15). □

Otázka 5: Lze se v předchozím příkladu zbavit předpokladu $q \neq 1$? Jak je nutné změnit formulku (1.15)?

Otázka 6: K procvičení se v základních operacích se sumami vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{5} 1, \quad \sum_{k=1}^{6} k - \sum_{k=1}^{6} (k + 1).$$

Otázka 7: Který z následujících výrazů lze bez dalšího komentáře jednoznačně interpretovat?

a) $\sum_{k}^{4} k + 1$, b) $j \sum_{j=1}^{30} 30k$,

c) $\sum_{j} 2j$, d) $\sum_{j=1}^{2j} \sin j$.

Podobně jako součet lze zkráceně zapisovat i součin. K tomu se používá velké řecké písmeno $\prod$ (čti pí, **p**rodukt). Například součin prvních deseti přirozených čísel lze zapsat

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \prod_{k=1}^{10} k.$$

Faktoriál kladného přirozeného čísla n je definován předpisem

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$

Připomeňme, že se dále zvlášť definuje faktoriál nuly, $0! := 1$. Faktoriál záporných celých čísel není definován.

S produkty se manipuluje velmi podobně jako se sumami. Jediným rozdílem je, že místo sčítání používáme násobení, myšlenka je jinak stejná. Například platí

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right),$$
$$\prod_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

1.6 Kombinační čísla a kombinatorika

Kombinační čísla nacházejí mnohá uplatnění v praktických výpočtech. Pro přirozené n a celé k splňující $0 \leq k \leq n$ definujeme

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Ačkoliv tato definice vypadá nepřehledně, skutečný význam kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ je prostý. Toto číslo představuje počet způsobů, jak z n objektů vybrat k objektů nezáleží-li na pořadí a neuvažujeme-li opakování již vybraného objektu.

Často se hodí znát všechna kombinační čísla pro pevné n. K jejich výpočtu lze použít Pascalův trojúhelník. Nejprve si všimněme, že platí rovnost

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{1.16}$$

Skutečně,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}+\frac{n!}{(n-k)!k!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}}_{\frac{n+1}{(n-k+1)k}}\Bigg) = \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Představme si, že uspořádáme kombinační čísla do tzv. **Pascalova trojúhelníku**, pak nám vzorec (1.16) říká, že součet sousedních kombinačních čísel najdeme o řádek níže. Vizte obrázek č. 1.7.

1.7 Významné konstanty

Při aplikacích velmi často narazíme na potřebu počítat s **Eulerovým číslem** (ozn. e) a **Ludolfovým číslem** (ozn. π). Přibližné hodnoty těchto konstant jsou uvedeny v tabulkách č. 1.2 a 1.1. Definicí Eulerova čísla se budeme podrobně zabývat na přednáškách BI-ZMA. Význam čísla π asi není třeba zdůrazňovat. Jedna z aplikací čísla e souvisí s jeho použitím jako základu v přirozeném logaritmu.

1.8 Shrnutí důležitých bodů

- Význam různých matematických symbolů.
- Význam sjednocení, průniku, a doplňku množin. Kartézský součin množin.
- Vztah mezi přirozenými, celými, racionálními reálnými a komplexními čísly.
- Zkrácený zápis součtů.
- Faktoriál, kombinační čísla a Pascalův trojúhelník.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Obrázek 1.7: Pascalův trojúhelník.

Konstanta	Přibližná hodnota na 1000 desetinných míst
π	3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197
	169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208
	998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306
	647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117
	450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930
	381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786
	783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454
	326 648 213 393 607 260 249 141 273 724 587 006 606
	315 588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367
	892 590 360 011 330 530 548 820 466 521 384 146 951
	941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092 186 117
	381 932 611 793 105 118 548 074 462 379 962 749 567
	351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 833 673
	362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190 702
	179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674
	818 467 669 405 132 000 568 127 145 263 560 827 785
	771 342 757 789 609 173 637 178 721 468 440 901 224
	953 430 146 549 585 371 050 792 279 689 258 923 542
	019 956 112 129 021 960 864 034 418 159 813 629 774
	771 309 960 518 707 211 349 999 998 372 978 049 951
	059 731 732 816 096 318 595 024 459 455 346 908 302
	642 522 308 253 344 685 035 261 931 188 171 010 003
	137 838 752 886 587 533 208 381 420 617 177 669 147
	303 598 253 490 428 755 468 731 159 562 863 882 353
	787 593 751 957 781 857 780 532 171 226 806 613 001
	927 876 611 195 909 216 420 199

Tabulka 1.1: Ludolfovo číslo. V době psaní tohoto textu držel rekord v zapamatování čísla π Chao Lu. Pamatuje si 67 890 cifer čísla π.

Konstanta	Přibližná hodnota na 1000 desetinných míst
e	2.718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757
	247 093 699 959 574 966 967 627 724 076 630 353 547
	594 571 382 178 525 166 427 427 466 391 932 003 059
	921 817 413 596 629 043 572 900 334 295 260 595 630
	738 132 328 627 943 490 763 233 829 880 753 195 251
	019 011 573 834 187 930 702 154 089 149 934 884 167
	509 244 761 460 668 082 264 800 168 477 411 853 742
	345 442 437 107 539 077 744 992 069 551 702 761 838
	606 261 331 384 583 000 752 044 933 826 560 297 606
	737 113 200 709 328 709 127 443 747 047 230 696 977
	209 310 141 692 836 819 025 515 108 657 463 772 111
	252 389 784 425 056 953 696 770 785 449 969 967 946
	864 454 905 987 931 636 889 230 098 793 127 736 178
	215 424 999 229 576 351 482 208 269 895 193 668 033
	182 528 869 398 496 465 105 820 939 239 829 488 793
	320 362 509 443 117 301 238 197 068 416 140 397 019
	837 679 320 683 282 376 464 804 295 311 802 328 782
	509 819 455 815 301 756 717 361 332 069 811 250 996
	181 881 593 041 690 351 598 888 519 345 807 273 866
	738 589 422 879 228 499 892 086 805 825 749 279 610
	484 198 444 363 463 244 968 487 560 233 624 827 041
	978 623 209 002 160 990 235 304 369 941 849 146 314
	093 431 738 143 640 546 253 152 096 183 690 888 707
	016 768 396 424 378 140 592 714 563 549 061 303 107
	208 510 383 750 510 115 747 704 171 898 610 687 396
	965 521 267 154 688 957 035 035

Tabulka 1.2: Eulerovo číslo.

Kapitola 2

Důkaz

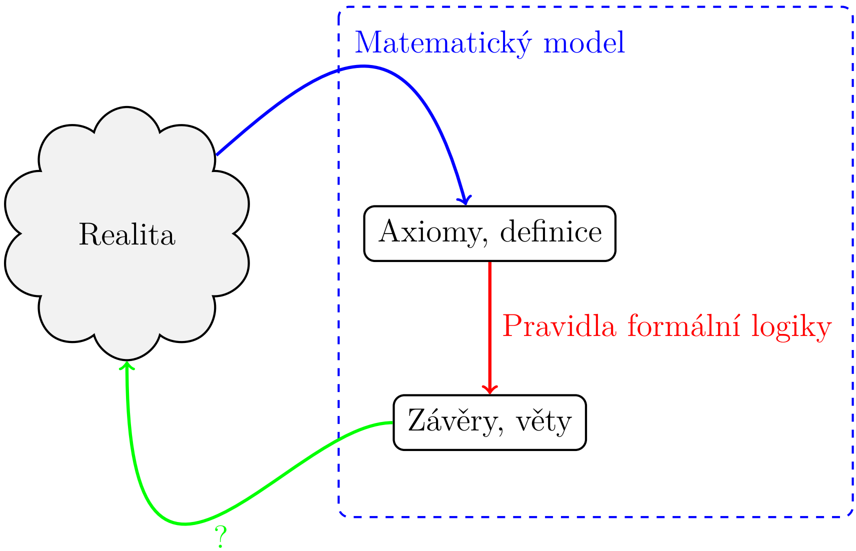
2.1 Co je to důkaz?

Slovíčko „důkaz“ vyvolává v řadě studentů iracionální odpor. Důkaz není nic jiného, než rigorózní argument zajišťující platnost zkoumaného tvrzení. V této kapitole se pokusíme nastínit význam tohoto pojmu v širších souvislostech a ukážeme si některé jednoduché standardní důkazy.

Nejdříve se zamysleme nad tím, jak vlastně člověk zkoumá svět kolem sebe. Technologický pokrok posledních několika staletí stojí na tzv. vědecké metodě zkoumání. Podrobněji, ke zkoumanému problému (realitě) je sestaven matematický model. Ten sestává z matematických objektů, které se snaží popsat zadaný problém. Analýzou tohoto modelu pomocí logických pravidel docházíme k závěrům. Tedy tvrzením o vlastnostech či chování zkoumaných objektů. Následně se tyto závěry porovnávají s realitou. Vizte obrázek č. 2.1 s odpovídajícím barevným označením.

Pokud předpovědi modelu neodpovídají realitě, pak je zřejmě model nedostatečný a je třeba ho nahradit dokonalejším. Mějme na paměti, že model může korektně vystihovat velké množství pozorování, ale stačí jediný nesouhlas s realitou pro to, aby byl zavrhnut. Demonstrujme tento přístup na několika známých astronomických příkladech. Zkoumanou realitou je pohyb planet ve sluneční soustavě a modelem v tomto případě pak Newtonova mechanika (matematicky jistá soustava obyčejných diferenciálních rovnic).

Příklad 3 (Objevení planety Neptun)**:** Na začátku 19. století bylo díky pozo-



Obrázek 2.1: Matematická/vědecká metoda poznání.

rování známo, že trajektorie planety Uran se znatelně odchyluje od trajektorie po které by se měla pohybovat podle Newtonovy mechaniky (beroucí do úvahy v té době známé planety). Na základě dat z pozorování bylo vypočteno po jaké trajektorii by se měla pohybovat nová planeta (později nazvaná Neptun) tak, aby vysvětlila pozorovaný pohyb Uranu. Po zaměření dalekohledů na místo udané Urbainem Le Verrierem byl Neptun skutečně nalezen. Le Verrier se ve svám výpočtu mýlil pouze o 1°.

Příklad 4 (Znovuobjevení Ceresu)**:** Na začátku 19. století byla astronomem Giuseppem Piazzim po dobu několika měsíců pozorována malá planetka Ceres. Pak se mu ovšem ztratila a nikomu se ji znovu nedařilo objevit. Na pomoc přišel Gauss a z dříve naměřených dat vypočítal, kde by se planetka měla aktuálně nacházet. Mýlil se o 0.5°. Při této příležitosti poprvé použil některé, do té doby neznámé, matematické aproximační nástroje (nejmenší čtverce, FFT).

Tyto dva příklady dávají na váze Newtonově mechanice. Následující příklad ale již ukazuje na její omezené pole působnosti.

Příklad 5 (Chování planety Merkur)**:** Pozorováním trajektorie planety Merkur se zjistilo, že její perihelium (bod elipsy nejblíže ke slunci) se pohybuje o $43'$ za století rychleji, než jak předpovídá Newtonova mechanika. Tento rozpor byl vysvětlen až na začátku 20. století Einsteinovou Obecnou teorií relativity. V rámci Newtonovy mechaniky ho nelze vysvětlit.

Vraťme se nyní zpět k obrázku č. 2.1. „Důkaz“ je v tomto schématu naprosto esenciální a můžeme ho zde umístit na červenou spojnici.

Mezi studenty se často šíří názor, že důkazy přeci nejsou potřeba, že stačí znát pouze tvrzení vět. To je však velmi krátkozraký přístup zejména z následujících důvodů.

- Důkaz není nic jiného než logický argument, proto jeho studium zlepšuje nejen znalost zkoumaných objektů ale i argumentační schopnosti.
- Důkaz pomáhá člověku poznat souvislosti a zlepšuje jeho intuitivní chápání problému.
- Řada důkazů, zejména tzv. konstruktivních, přímo dává k dispozici návod (algoritmus) na řešení daného problému.

2.2 Co není důkaz?

„Důkaz“ příkladem

Pravdivost obecného tvrzení nelze založit na několika konkrétních příkladech podporujících pravdivost zkoumaného tvrzení. Naopak, pravdivost tvrzení lze vyvrátit udáním i jenom jednoho protipříkladu.

Uveďme jako demonstrativní příklad tvrzení s kterým přišel v roce 1650 Fermat[1]:

Každé číslo tvaru $2^{2^n}+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, je prvočíslo.

[1] Pierre de Fermat, 17. srpna 1601 – 12. ledna 1665, francouzský matematik.

Prozkoumáním hodnot výrazu pro několik malých n dostáváme čísla: 3, 5, 17, 257, 65 537, která skutečně jsou prvočísla. Ovšem hned následující hodnota pro $n = 6$ není prvočíslo,

$$2^{2^6} + 1 = 18446744073709551617 = 274177 \times 67280421310721. \tag{2.1}$$

Tento rozklad ve Fermatově době samozřejmě nebyl znám. Rozklad v rovnici (2.1) je tedy **protipříkladem** k Fermatovu tvrzení uvedenému výše.

2.3 Ukázka několika typů důkazů

V této sekci si ukážeme několik jednoduchých důkazů známých a důležitých tvrzení. Následující větu dokážeme pomocí tzv. **sporu**. Myšlenka je jednoduchá. Jeden z logických axiomů říká, že tvrzení T je buď pravdivé nebo nepravdivé. Ukážeme-li že logický opak (negace) tvrzení T je nepravdivý, pak je původní tvrzení pravdivé.

Věta 6: Číslo odmocnina ze 2 je iracionální.

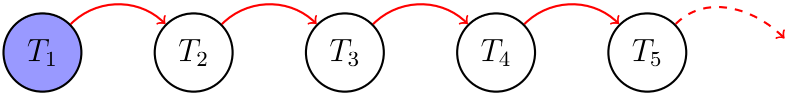
Důkaz sporem. Předpokládejme opak, tedy že $\sqrt{2}$ **je** racionální. Protože se jedná o kladné číslo, existují přirozená a **nesoudělná** čísla p a q splňující

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Odtud ale plyne rovnost

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{čili} \quad p^2 = 2q^2.$$

Odtud plyne, že p je sudé (jinak bychom měli rovnost sudého a lichého čísla, což je nemožné), tedy $p = 2k$, kde k je přirozené. Dosazením do rovnice výše dostáváme, po vydělení obou stran číslem 2, $2k^2 = q^2$. Použijeme-li stejný argument znovu, dostáváme nutně že i q je sudé. Čísla p i q jsou **soudělná** (obě dělitelná číslem 2). Předpokládali jsme však nesoudělnost p a q, tím jsme dospěli ke sporu. □



Obrázek 2.2: Schéma důkazu matematickou indukcí. Místo abychom dokázali všechna T_n, $n = 1, 2, \ldots$, dokážeme T_1 a indukční krok, tj. tvrzení $T_n \Rightarrow T_{n+1}$ (červené šipky).

Dále si ukážeme důkaz **matematickou indukcí**. Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných kladnými přirozenými indexy[2] $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Důkaz se provede ve dvou krocích

i) Pro libovolné přirozené n dokaž tzv. **indukční krok**:

$$\text{pokud platí } T_n, \text{ pak platí } T_{n+1}.$$

ii) Dokaž první tvrzení, zde T_1.

Grafické znázornění tohoto postupu je na Obrázku 2.2. Indukčnímu kroku odpovídají červené šipky. Druhý bod, důkaz T_1, je naznačen modrou barvou.

Věta 7 (Binomická věta)**:** Pro reálná a a b a celé nezáporné n platí rovnost

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{2.2}$$

Důkaz matematickou indukcí. Ověřme, že zkoumaná rovnost platí pro $n = 1$. Levá strana (2.2) je rovna $a + b$ a pro pravou stranu téže rovnosti platí

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = a + b.$$

[2] Konkrétní způsob očíslování není podstatný, stejně tak není podstatné od jakého čísla začínáme. Vždy je možné tvrzení vhodně přečíslovat.

Předpokládejme, že (2.2) platí pro dané přirozené n. Potom[3]

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n \overset{!}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} &= \\
= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} &= \\
= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} &= \\
= \underbrace{\binom{n}{n}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)}}_{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\Bigg(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{\binom{n+1}{k}}\Bigg)a^k b^{n+1-k} &+ \\
+ \underbrace{\binom{n}{0}a^0 b^{n+1-0}}_{b^{n+1}} &= \\
= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}. &
\end{aligned}$$

□

V tvrzení minulé věty jsou obsaženy dobře známé algebraické „vzorečky“

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Velmi podobně lze indukcí (ale i přímo) dokázat často používaný vzorec

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Speciálně tak máme

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Tyto vzorce se nám budou v budoucnu hodit při výpočtu různých limit.

[3] Představte si, jak by vypadal zápis postupu níže **bez použití sumační notace**!

Kapitola 3

Elementární funkce

V této kapitole zopakujeme vlastnosti několika speciálních typů reálných funkcí reálné proměnné, tedy zobrazeních z reálné osy do reálné osy, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Přirozeným definičním oborem funkce f nazýváme množinu všech $x \in \mathbb{R}$ pro která má $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo. Definiční obor funkce f značíme D_f. Dále zavádíme obor hodnot H_f funkce f jakožto množinu

$$H_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

K znázornění takovéto funkce lze použít její graf. Zavedeme-li v rovině dvě pravoúhlé souřadné osy označované standardně x (vodorovná) a y (svislá), pak grafem funkce f nazýváme množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňující $y = f(x)$.

3.1 Lineární funkce

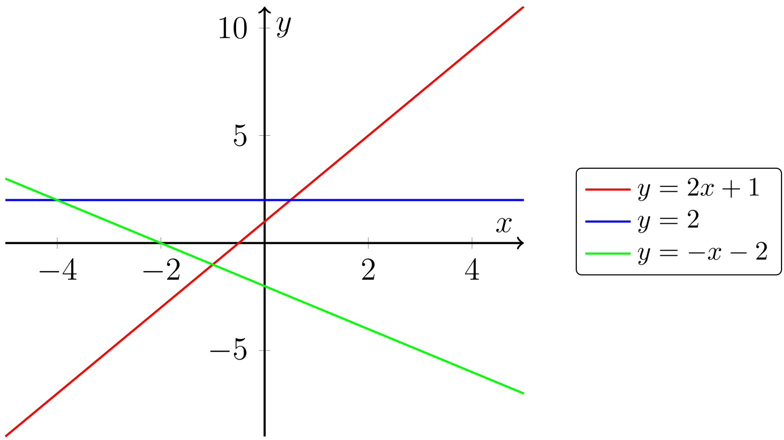
Lineární funkcí[1] nazýváme každou funkci, pro níž existují konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že rovnost

$$f(x) = ax + b \tag{3.1}$$

platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Grafem lineární funkce je přímka, vizte obrázek č. 3.1.

Dle definice je definičním oborem lineární funkce celá reálná osa. Pokud $a \neq 0$, pak oborem hodnot funkce (3.1) je opět celá reálná osa. V případě

[1] Toto názvosloví není kompatibilní s linearitou ve smyslu Lineární algebry, BI-LIN.



Obrázek 3.1: Graf lineární funkce.

$a = 0$ je oborem hodnot funkce (3.1) pouze jednobodová množina $H_f = \{b\}$. Shrnuto

$$D_f = \mathbb{R},$$
$$H_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & a \neq 0, \\ \{b\}, & a = 0. \end{cases}$$

Speciální případ s nulovým a, tj. $f(x) = b$, nazýváme **konstantní funkcí**.

Kořeny lineární funkce je snadné nalézt, rovnice $ax+b = 0$ má řešení $x = \frac{-b}{a}$ za předpokladu že a je nenulové. Pokud je a nulové a b nenulové, pak příslušná rovnice nemá žádné řešení a žádný průsečík s osou x neexistuje. V případě, že a je nulové a b taktéž jedná se o nulovou funkci, jejímž kořenem je každé reálné číslo.

Otázka 8: Na začátku této sekce bylo řečeno, že grafem každé lineární funkce je přímka. Je každá přímka grafem lineární funkce?

3.2 Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci, pro níž existují konstanty $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ takové, že rovnost

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.2}$$

platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Grafem kvadratické funkce je parabola, vizte obrázek č. 3.2. Souřadnice jejího vrcholu snadno odhalíme po úpravě na čtverec:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Kvadrát závorky je vždy nezáporný. Odtud pak plyne, že vrchol paraboly se nachází v bodě o souřadnicích

$$\left(-\frac{b}{2a},\, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Pro průsečíky s osou x platí známý vztah

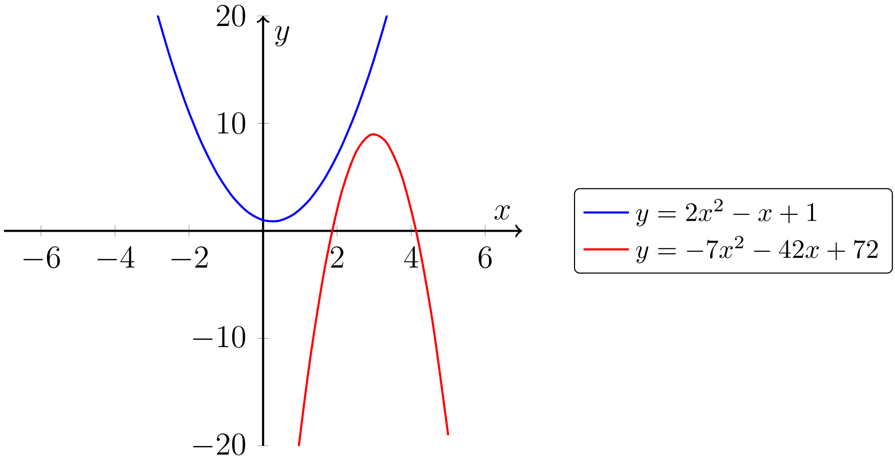
$$x_{\pm} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right).$$

Rovnice má tedy reálná řešení za předpokladu nezápornosti diskriminantu $b^2 - 4ac$. Vzorec pro kořeny můžeme také odvodit z úpravy na čtverce. Hledáme-li kořeny, tj. řešení rovnice $ax^2+bx+c = 0$ a použijeme-li rovnosti (3.3) dostáváme

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Odtud lze řešení vyjádřit následovně

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}.$$



Obrázek 3.2: Graf kvadratické funkce.

Díky znaménku $\pm$ lze psát souhrnně

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.4}$$

Otázka 9: Nechť $a > b > 0$. O číslech a a b říkáme, že jsou ve zlatém poměru[2], pokud poměr $a+b$ ku a je stejný jako a ku b. Jaký je tento poměr, tedy $\varphi = \frac{a}{b}$?
.

3.3 Polynomy

Zobecněním lineárních a kvadratických funkcí jsou polynomy. **Polynomem** nazýváme každou funkci tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad x \in D_f = \mathbb{R}.$$

Pokud $a_n \neq 0$, pak n nazýváme **stupněm polynomu** f. Konstanty a_0, a_1, …, a_n určují funkci f stejně jako v předchozích případech konstanty a, b, c

[2]Hodnota tohoto poměru se také někdy nazývá zlatým řezem.

u lineární, resp. kvadratické, funkce. Tyto konstanty často nazýváme koeficienty polynomu.

Mezi polynomiální funkce patří samozřejmě jak lineární, tak kvadratické funkce. Společným rysem polynomů je, že pro výpočet jejich funkčních hodnot vystačíme pouze s operacemi sčítání a násobení.

Definičním oborem libovolného polynomu je celá reálná osa, $D_f = \mathbb{R}$. Pokud je stupeň polynomu lichý, pak je jeho oborem hodnot také celé $\mathbb{R}$ (vyjma případu konstantního polynomu). Pokud však je stupeň polynomu sudý, pak je oborem hodnot pouze část reálné osy (konkrétně jistá polopřímka nebo bod).

Hledání kořenů polynomů je obecně komplikovaná úloha. Explicitní vzorečky, jako například (3.4), jsou známé pouze pro polynomy stupně 1, 2, 3 a 4. Pro polynomy vyššího stupně nejen že nejsou známy vzorce pro kořeny, ale je **dokázáno**, že takovéto vzorce neexistují. Při hledání kořenů se pak musíme uchýlit k numerickým metodám[3].

Otázka 10: Která z následujících funkcí je polynomem?

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x}$,

b) $f(x) = x \sin(2) - x^3$,

c) $f(x) = e^{2\ln(1+x^2)}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

Otázka 11: Nalezněte kořeny následujících polynomů.

a) $x^2 + x - 12$,

b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$,

c) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

3.4 Racionální lomená funkce

Racionální lomená funkce je každá funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

[3]Vizte například metodu půlení intervalu, či Newtonovu metodu probíranou v BI-ZMA.

kde P a Q jsou polynomy. Obecně lze říci, že definičním oborem takovéto funkce je množina všech reálných čísel bez kořenů polynomu Q, tj.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Mezi racionální lomené funkce speciálně patří lineární a kvadratické funkce. Skutečně, stačí volit $Q(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, a P jako polynom prvního resp. druhého stupně.

O oboru hodnot už není snadné jednoduše něco říci a tuto otázku proto vynecháme. Na několika příkladech si aspoň ukážeme, že mohou nastat velmi různorodé možnosti. Vizte obrázek č. 3.3.

3.5 Trigonometrické funkce

Mezi trigonometrické funkce řadíme funkce sinus (sin), kosinus (cos), tangens (tg), kotanges (cotg) a jejich **vhodně zvolené** inverzní funkce arkus sinus (arcsin), arkus kosinus (arccos) a arkus tangens (arctg).

Funkce sinus a kosinus jsou definovány pomocí následující geometrické konstrukce, či algoritmu. Na vstupu je zadán úhel α a výsledkem bude hodnota $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$.

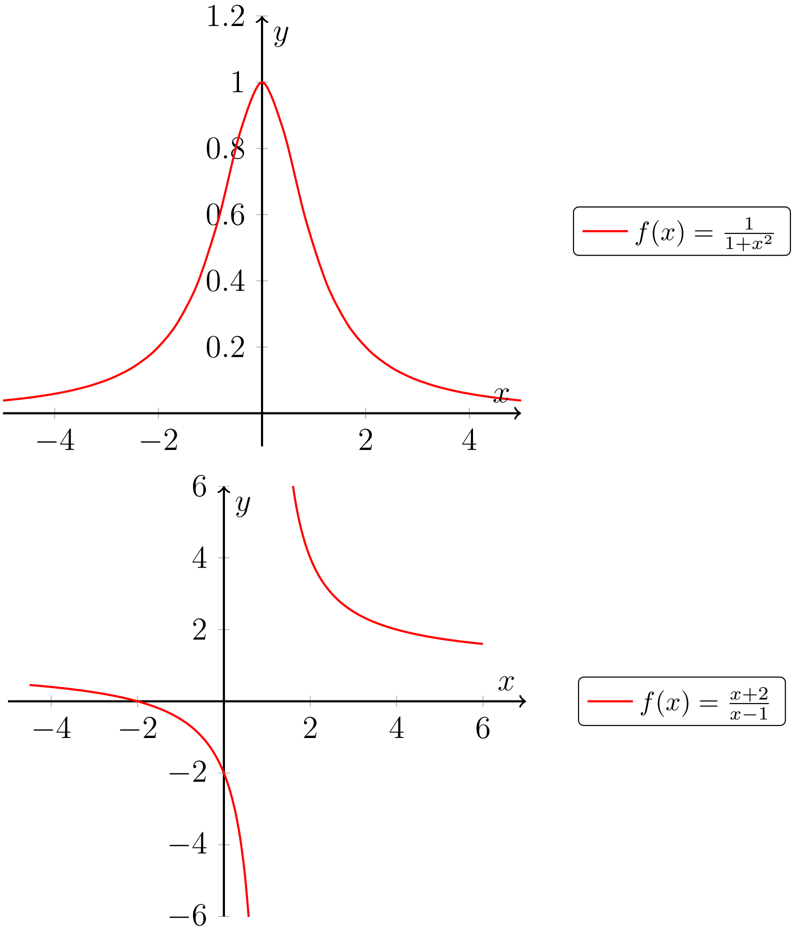
i) V souřadném systému s pravoúhlými osami x a y sestroj jednotkovou kružnici K (tj. kružnici s poloměrem 1 v daných jednotkách os).

ii) Od kladného směru osy x vynes úhel α proti směru hodinových ručiček. Jedním ramenem tohoto úhlu je kladná část osy x a druhé rameno označme p.

iii) Označme A průnik p a K. Dále sestrojme bod P, průnik osy x a rovnoběžky s osou y procházející bodem A. Tímto způsobem získáváme pravoúhlý trojúhelník OPA.

iv) (Orientovaná) délka strany OP představuje $\cos(\alpha)$ a délka strany PA představuje $\sin(\alpha)$.

Samozřejmě, že přesnost výsledku závisí na přesnosti našich rýsovacích nástrojů. Nekonečné přesnosti lze dosáhnout pouze v případě nekonečně přesných



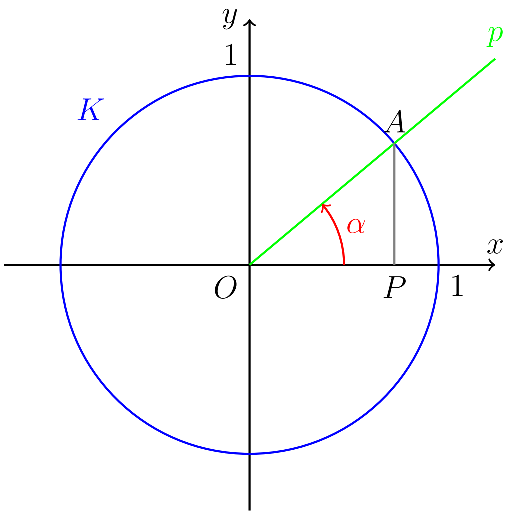
Obrázek 3.3: Příklady racionálních lomených funkcí.

nástrojů (zde pravítko, kružítko a úhloměr). Náčrtek konstrukce je uveden na obrázku č. 3.4.

Přímo z konstrukce plyne důležitá vlastnost funkcí sinus a kosinus,

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \tag{3.5}$$

Tato rovnost pouze vyjadřuje Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku OPA s přeponou délky 1 a odvěsnami délky $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$.



Obrázek 3.4: Geometrická konstrukce trigonometrických funkcí sinus a kosinus.

Velmi užitečné jsou tzv. **součtové vzorce** pro funkce sinus a kosinus. Tyto vzorce lze nejsnadněji odvodit pomocí vlastností násobení komplexních čísel a využití goniometrického tvaru komplexního čísla.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \tag{3.6}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \tag{3.7}$$

Díky sudosti funkce kosinus a lichosti funkce sinus ze vzorců (3.6) a (3.7) ihned dostáváme analogické vzorce pro rozdíl

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Analogické vzorce lze odvodit pro funkce tangens i kotangens. Dále z vzorců (3.6) a (3.7) plynou vzorce pro tzv. **dvojnásobný úhel**, které se velmi často používají,

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha),\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pomocí vztahů (3.5) a (3.8) ihned odvodím vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu,

$$\cos^2(\alpha/2) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(x)\Big), \qquad \Big|\cos(\alpha/2)\Big| = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\cos(x)\Big)},$$
$$\sin^2(\alpha/2) = \frac{1}{2}\Big(1-\cos(x)\Big), \qquad \Big|\sin(\alpha/2)\Big| = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1-\cos(x)\Big)}.$$

O známenku musíme rozhodnout na základě úhlu α.

Základní hodnoty funkcí sinus a kosinus jsou shrnuty v následující tabulce č. 3.1 a jejich grafy si můžete připomenout na obrázku č. 3.5.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabulka 3.1: Hodnoty funkcí sinus a kosinus pro význačné úhly v prvním kvadrantu.

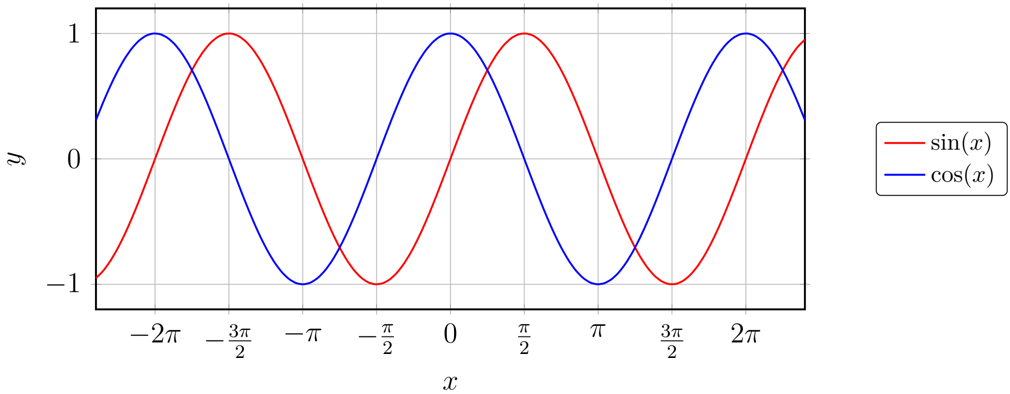
Pomocí funkcí sin a cos definujeme funkce tangens tg a kotangens cotg předpisy

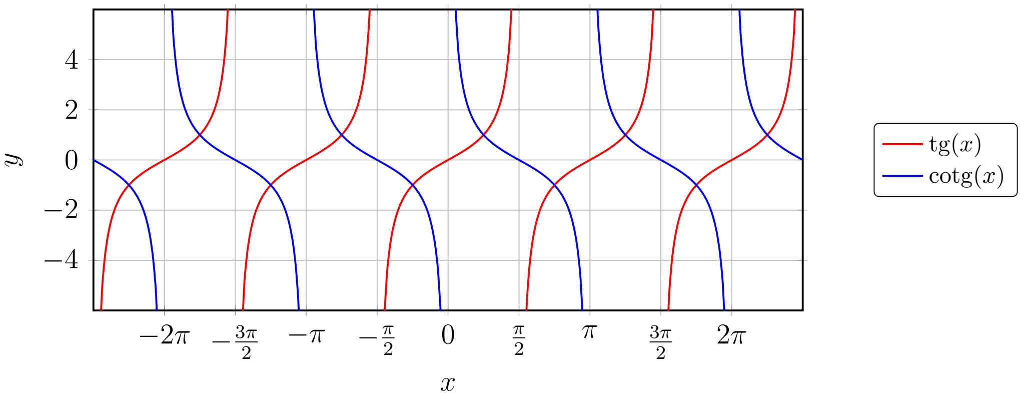
$$\operatorname{tg}\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{cotg}\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Jejich obory hodnot jsou tvořeny celou množinou $\mathbb{R}$. Pro názornost uvádíme i jejich grafy na obrázku č. 3.5.

Ani jedna z doposud zavedených trigonometrických funkcí není prostá na svém definičním oboru. Pokud zvolíme libovolné y z oboru hodnot funkce sin, pak existuje nekonečně mnoho x z definičního oboru funkce sin tak, že $\sin(x) = y$. Nelze tedy zadanému $y \in H_{\sin}$ jednoznačně přiřadit $x \in D_{\sin}$ splňující $y = \sin(x)$. Stejná poznámka platí i pro cos, tg a cotg. Trigonometrické funkce nejsou prosté a proto k nim neexistují inverzní funkce.

K vyřešení tohoto problému musíme trigonometrické funkce vhodně zúžit, tedy zmenšit jejich definiční obor. Ve shodě se zažitou konvencí definujeme





Obrázek 3.5: Trigonometrické funkce sin, cos, tg a cotg.

i) **arcus sinus**, arcsin, jako inverzní funkci k sin zúžené na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$,

ii) **arcus kosinus**, arccos, jako inverzní funkci k cos zúžené na interval $\langle 0, \pi\rangle$,

iii) **arcus tangens**, arctg, jako inverzní funkci k tg zúžené na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

iv) **arcus kotangens**, arccotg, jako inverzní funkci k cotg zúžené na interval $(0, \pi)$.

Otázka 12: Z geometrické definice funkcí sin a cos odvoďte hodnoty $\sin\frac{\pi}{4}$ a $\cos\frac{\pi}{4}$.

Otázka 13: Vypočtěte hodnotu následujících výrazů.

a) $\arcsin \sin \dfrac{9\pi}{4}$,

b) $\sin \dfrac{7\pi}{4}$

Otázka 14: Odvoďte součtové vzorce pro funkci tg. Tzn. vyjádřete $\operatorname{tg}(x+y)$ pomocí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{tg} y$.

3.6 Exponenciální a logaritmické funkce

Čtenáři je jistě dobře známo jak definovat celočíselnou mocninu reálného čísla a. Na tomto místě si ji připomeneme. Pro přirozené n klademe

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ členů}} \tag{3.9}$$

a pro $n = 0$ pak $a^0 := 1$. Pro záporná celá čísla n dále definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$. Číslo $-n$ je pak kladné a ve jmenovateli můžeme použít (3.9). Například platí

$$\pi^0 = 1, \quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \quad 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

Dle této definice mocniny zřejmě pro každá celá k a n platí důležité vztahy

$$a^k \cdot a^n = a^{k+n} \quad \text{a} \quad \left(a^k\right)^n = a^{kn}. \tag{3.10}$$

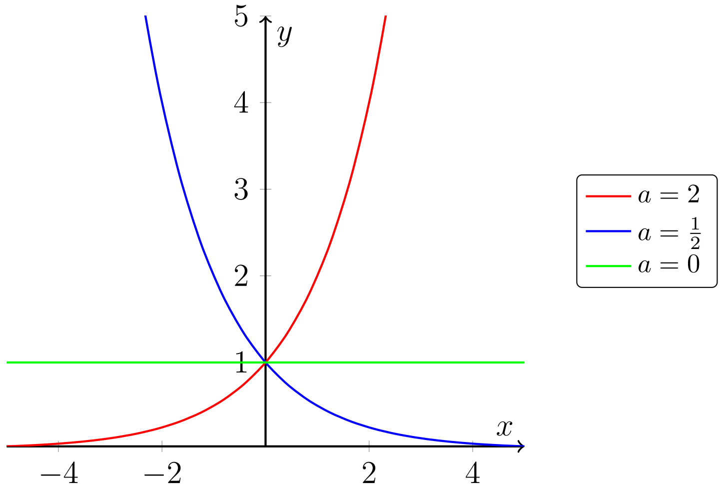
Operaci „mocnění“ s $a > 0$ lze definovat nejen pro celočíselné koeficienty. V tento okamžik není jasné, jak vypočíst hodnotu výrazu 3^π, či $1.2^{2.8}$. Podrobněji se touto otázkou budeme zabývat v BI-ZMA. V následujícím odstavci proto shrnnujeme pouze formální vlastnosti obecné mocninné funkce.

Pro $a > 0$ funkci

$$f(x) = a^x, \quad x \in D_f = \mathbb{R},$$

nazýváme **exponenciálou o základu** a. Tato funkce rozšiřuje mocninnou funkci ze začátku této sekce. Speciálně pro celá x platí vztahy (3.9) a (3.10). Dále pro libovolná reálná x a y stále platí

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{a} \quad \left(a^x\right)^y.$$



Obrázek 3.6: Exponenciální funkce.

Na obrázku č. (3.6) je znázorněn známý průběh funkce f pro různé základy a. Obecně lze říci, že pro

$a > 1$ je f ostře rostoucí ($f(x) < f(y)$ kdykoliv $x < y$), $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = (0, +\infty)$.

$a < 1$ je f ostře klesající ($f(x) > f(y)$ kdykoliv $x < y$), $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = (0, +\infty)$.

$a = 1$ je f konstatní funkcí s hodnotou 1.

Logaritmus je funkce inverzní k exponenciální funkci (přirozeně pouze v případě základu různého od jedné, v tomto případě není exponenciální funkce prostá). Přesněji řečeno, z průběhu exponenciální funkce $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ vidíme, že pro každé reálné číslo y existuje právě jedno x splňující $a^x = y$. O takovéto funkci také říkáme, že je prostá (v tomto případě na celém $\mathbb{R}$).

Inverzní funkci k exponenciální o základu a, $0 < a \neq 1$, nazýváme logaritmem o základu a a značíme $\log_a$. Definičním oborem exponenciální funkce bylo celé $\mathbb{R}$ a oborem hodnot interval $(0, +\infty)$. Odtud plyne, že definičním oborem logaritmu je $D_{\log_a} = (0, +\infty)$ a oborem hodnot logaritmu je $H_{\log_a} = \mathbb{R}$.

Z vlastností exponenciály lze odvodit důležité vlastnosti logaritmu,

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0, \tag{3.11}$$

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0, \tag{3.13}$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0 \text{ a } y \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

První dvě vlastnosti, (3.11) a (3.12), jsou pouze vyjádřením inverzního vztahu mezi exponenciálou a logaritmem, platí tedy definitoricky. Dokažme si vlastnost (3.13). Pro kladná x, y existují reálná u, v taková, že

$$x = a^u \quad \text{a} \quad y = a^v.$$

Odtud

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}.$$

Takže

$$\log_a xy = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Podobným způsobem lze dokázat vlastnost (3.14).

Otázka 15: Jaký je definiční obor funkce $f(x) = \log_a x^2$?

3.7 Absolutní hodnota

Pro reálné číslo x klademe

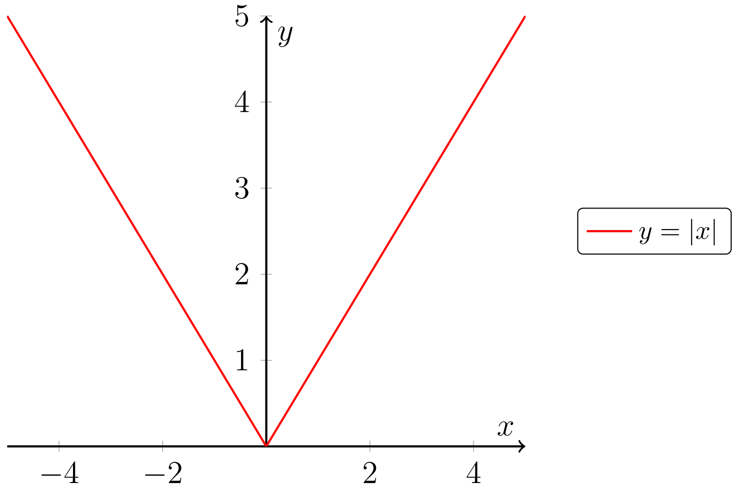
$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Funkci $|\cdot|$ nazýváme **absolutní hodnotou**. Zápis použitý v rovnici (3.15) je třeba interpretovat následovně: Pokud je dané x větší nebo rovno 0, pak je $|x|$ definováno jako x a v případě že x je záporné je $|x|$ definováno jako $-x$. Graf absolutní hodnoty je vynesen na obrázku č. 3.7.

Shrňme nyní několik základních vlastností absolutní hodnoty. Přímo z definice (3.15) zřejmě plyne, že pro každé reálné x a y platí

$$|-x| = |x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|, \tag{3.16}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ pokud } y \neq 0.$$



Obrázek 3.7: Graf absolutní hodnoty.

Veledůležitou vlastností absolutní hodnoty je tzv. **trojúhelníková nerovnost**.

Věta 8 (Trojúhelníková nerovnost)**:** Pro každé reálné x a y platí nerovnost

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Důkaz. Uvažme reálná x a y libovolně pevně. Pokud

- $x + y \geq 0$, pak $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
- $x + y < 0$, pak $|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$.

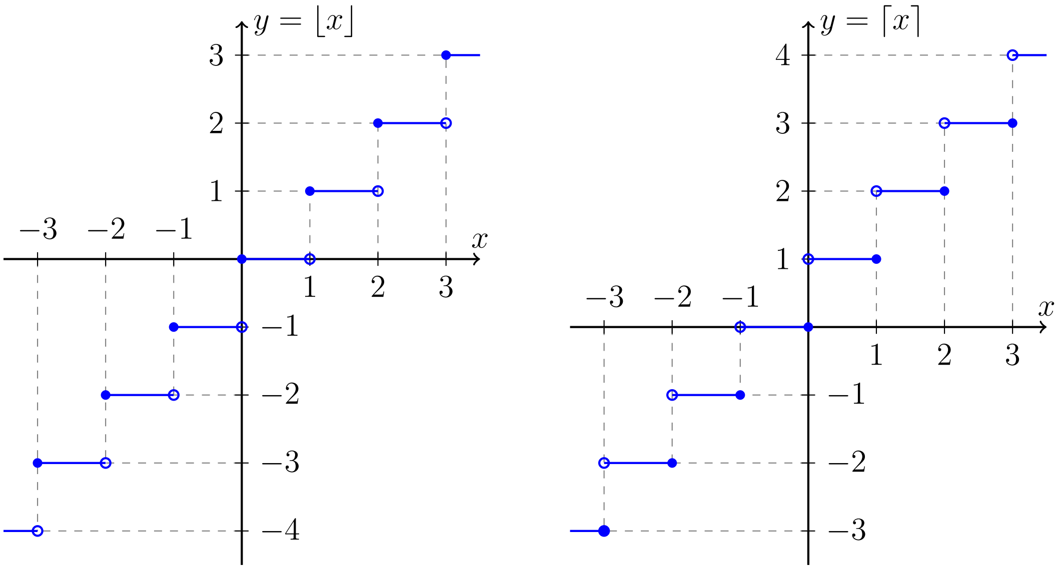
Využili jsme definici absolutní hodnoty a její vlastnosti z (3.16). □

Otázka 16: Načrtněte graf funkce $f(x) = |x - 1| - |2x + 1|$.

3.8 Dolní a horní celá část

Dalšími často používanými a užitečnými funkcemi jsou **dolní celá část** a **horní celá část** reálného čísla.

Dolní celá část reálného čísla x je definována jako největší celé číslo menší nebo rovné x a značíme ji $\lfloor x \rfloor$. Podobně horní celá část reálného čísla x je definována jako nejmenší celé číslo větší nebo rovné x a značíme ji $\lceil x \rceil$. Grafy horní a dolní celé části jsou uvedeny na obrázku č. 3.8.



Obrázek 3.8: Grafy dolní (vlevo) a horní (vpravo) celé části.

3.9 Shrnutí důležitých bodů

- Zavedli jsme polynomy, zobecnění lineárních a kvadratických funkcí.
- Umíme nalézt kořeny a vrchol paraboly.
- Definovali jsme trigonometrické funkce sin, cos, tg, cotg a jejich vhodně zvolené inverzní funkce.
- Známe důležité vlastnosti funcí sin, cos a jejich funkční hodnoty pro speciální hodnoty argumentu.
- Probrali jsme vlastnosti exponenciální a logaritmické funkce.

- Zopakovali jsme definici absolutní hodnoty a dokázali platnost tzv. trojúhelníkové nerovnosti.
- Zavedli jsme dolní a horní celou část reálného čísla.

Kapitola 4

Analytická geometrie v rovině

4.1 Základní pojmy

Připomeňme, jak lze pomocí rovnic popisovat geometrické objekty v rovině. Tyto pojmy jsou velmi užitečné, neboť jak každý ví, výstupní zařízení drtivého množství elektronických zařízení je dvourozměrné (monitory, papír, projektory, atd.).

Uvažme v rovině pravoúhlý souřadný systém s osami x, y a počátkem O. Bod v této rovině je popsán dvěma čísly, nazývanými **souřadnice bodu**. Má-li například bod A souřadnice $(1,2)$, píšeme[1] $A = (1,2)$. Bod A leží na průsečíku přímky rovnoběžné s osou y a procházející $x = 1$ a přímky rovnoběžné s osou x procházející $y = 2$. Podrobně je tato situace znázorněna na Obrázku 4.1.

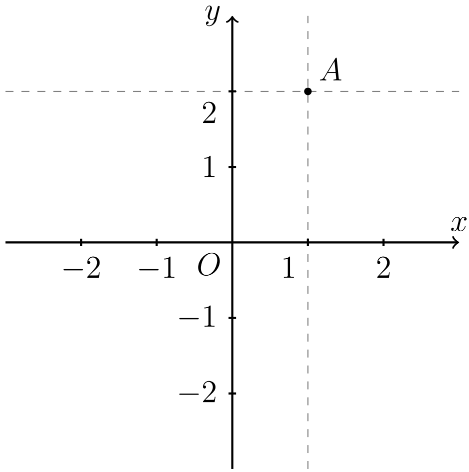
Dalším důležitým geometrickým objektem je **vektor**. Vektory budeme označovat malým písmenem se šipkou, např. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Vektory chápeme jako dvojici čísel[2] udávající směr, je-li dán vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$, pak čísla a_1 a a_2 nazýváme **složkami vektoru** $\vec{a}$. Vektory můžeme násobit číslem a sčítat podle předpisů

$$\alpha \cdot (a_1, a_2) := (\alpha a_1, \alpha a_2), \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \tag{4.1}$$

O operacích násobení číslem a sčítání vektorů zavedených v (4.1) se někdy ze zřejmých důvodů říká, že působí „po složkách“. Rovnost mezi vektory je

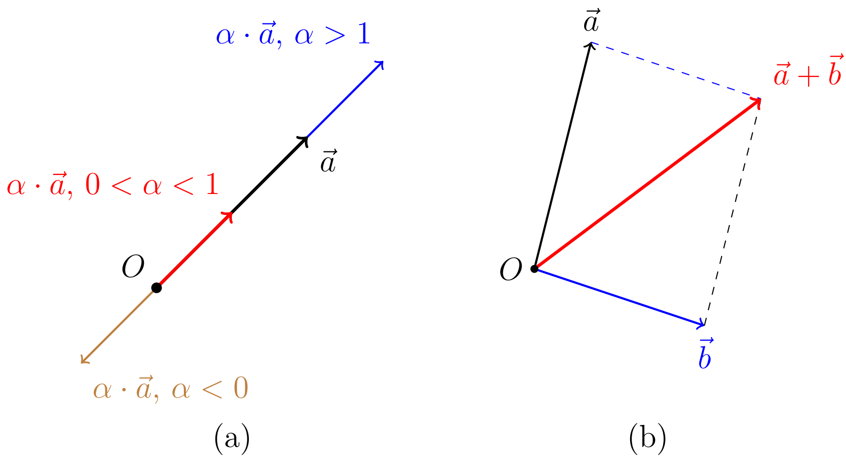
[1] Značení souřadnic bodu pomocí výrazů typu $A[1,2]$ nepoužíváme. Toto značení spíše evokuje ve čtenáři pocit, že A je jakási funkce dvou proměnných.

[2] Budeme stále používat řádkový zápis, i když korektnější by bylo psát vektory do sloupců. Více na toto téma se dozvíte v BI-LIN.



Obrázek 4.1: Provoúhlý souřadný systém a bod $A = (1, 2)$.

definována intuitivně. Řekneme, že dva vektory $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$ jsou si rovny, právě když se jejich složky rovnají, tedy když $a_1 = b_1$ a $a_2 = b_2$. Rovnost pak přirozeně zapisujeme jako $\vec{a} = \vec{b}$. Geometrická interpretace operací násobení číslem a sčítání vektorů je znázorněna na obrázku č. 4.2.



Obrázek 4.2: Geometrický význam násobení (a) a sčítání vektorů (b).

Vektor můžeme násobit číslem. Můžeme násobit dva vektory mezi sebou? K tomuto účelu slouží **skalární součin**. Standardní skalární součin dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$ je definován předpisem

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Součin se nazývá „skalární“, protože jeho výsledkem není vektor, ale číslo (skalár). Skalární součin dále souvisí s úhlem mezi vektory. Dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají úhel $\alpha \in \langle 0, \pi)$ právě když

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}.$$

Délka vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je opět dána pomocí Pythagorovy věty. Značíme ji $\|\vec{a}\|$ a platí

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{pro } \vec{a} = (a_1, a_2).$$

Všimněte si, že délku lze vyjádřit pomocí skalárního součinu jako $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Těmito, a dalšími, geometrickými objekty se budete podrobněji zabývat v předmětu BI-LIN a to ne jen ve dvou dimenzích.

4.2 Přímka

Nejjednodušším geometrickým útvarem (mimo bod samotný), je **přímka**. K úplnému popsání přímky p stačí zadat bod A, kterým přímka prochází, a směr ve kterém přímka běží, tedy nenulový vektor $\vec{a}$. Přímka p je pak tvořena všemi body se souřadnicemi

$$(x, y) = A + t \cdot \vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Číslu t se říká parametr, neboť parametrizuje body na přímce. Všimněte si, že omezíme-li množinu ze které bereme hodnoty t, dostaneme pouze části přímky. Například pro $t \in \langle 0, +\infty)$ dostáváme polopřímku začínající v bodě A a mířící ve směru $\vec{a}$, pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ dostaneme úsečku spojující body A a $A + \vec{a}$. Tento způsob zadání přímky, tj. pomocí rovnice (4.2), se často nazývá **parametrické vyjádření přímky**.

Zmiňme nyní alternativní způsob udání přímky. Přímka je tvořena všemi body se souřadnicemi (x, y), které splňují **rovnici přímky**

$$ax + by + c = 0. \tag{4.3}$$

Konstanty a, b, c jsou parametry dané přímky. V rovnici (4.3) vystupují symboly x a y jako neznámé. Bod (α, β) na zadané přímce leží, právě když po dosazení α za x a β za y do (4.3) dostaneme platnou rovnost $(0 = 0)$. Rozeberme to podrobněji na příkladě přímky p zadané rovnicí

$$x - 2y + 1 = 0. \tag{4.4}$$

Bod $(1, 2)$ na přímce p neleží, protože po dosazení do (4.4) dostáváme $-2 = 0$, což není pravda. Naopak body $(-1, 0)$ a $(0, 1/2)$ po dosazní dávají $0 = 0$ a na přímce tedy léží. Dva body nám stačí k načrtnutí přímky.

Předpokládáme, že čtenář umí přecházet od parametrického popisu přímky k její rovnici a naopak.

Otázka 17: Udejte rovnici přímky zadané parametricky: $(x, y) = (1, 2) + (2t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Otázka 18: Udejte parametrické vyjádření přímky zadané rovnicí $3x-2y+1 = 0$.

Otázka 19: Sestrojte rovnici přímky procházející body $(1, -3)$ a $(2, 4)$.

4.3 Kružnice a elipsa

Rovnici kružnice lze snadno sestavit, vzpomeneme-li si opět na Pythagorovu větu. Kružnice se středem v bodě $C = (c_1, c_2)$ a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů (x, y) jež mají od bodu C vzdálenost rovnu r. Tedy

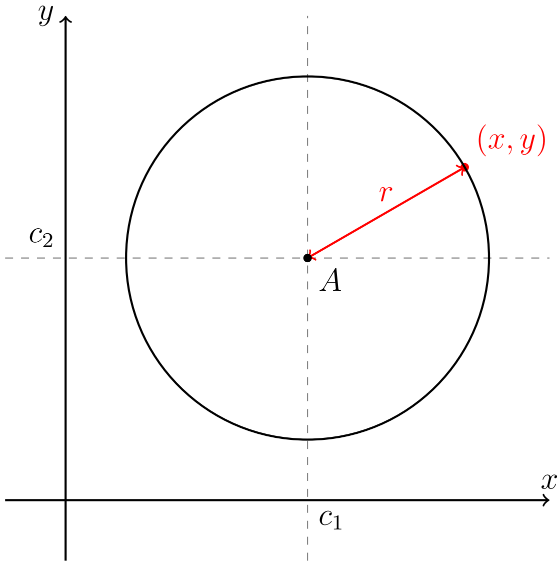
$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Na obrázku č. 4.3 je tato situace podrobně znázorněna.

Rovnice elipsy má tvar

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1,$$

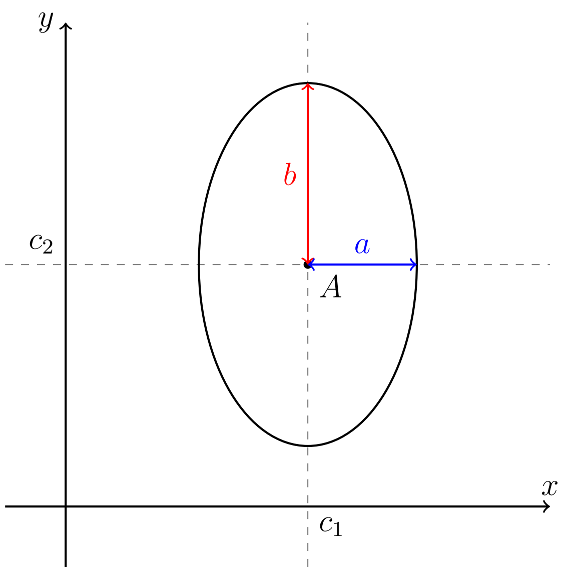
kde a a b jsou kladné parametry a $A = (c_1, c_2)$ je střed elipsy. Parametry a a b udávají délku hlavní a vedlejší poloosy. Pokud je $a = b$ dostáváme zřejmě kružnici. Ilustrace typické elipsy je na Obrázku 4.4.



Obrázek 4.3: Kružnice se středem v bodě $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ a poloměrem $r > 0$.

4.4 Shrnutí důležitých bodů

- Zavedli jsme rovinný souřadný systém a pojem bodu a vektoru.
- Ukázali jsme, jak v rovině popsat přímku, kružnici a elipsu.



Obrázek 4.4: Elipsa se středem v bodě $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ a parametry $0 < a < b$.

Kapitola 5

Varování

Předmět BI-ZMA je přednášen na Fakultě informačních technologií, řada studentů proto má vřelý vztah k různým počítačovým algebraickým systémům (CAS), ať už se jedná o samostatné programy (Mathematica, Maple, Matlab, Sage, Maxima, ...) či on-line aplikace (WolframAlpha). Rád bych na tomto místě upozornil, že ačkoliv používání těchto systémů v zásadě vítám, může být pro uživatele nedostatečně zasvěceného do různých partií matematiky matoucí.

Namátkou bych zmínil již klasické pasti.

- Jak to, že $\ln(-1)$, či $\sin(\mathrm{i})$, jsou vyhodnoceny a nevrací chybu?

  Odpověď: Prakticky všechny elementární funkce lze rozšířit takřka na celou množinu komplexních čísel. Ano, platí $\ln(-1) = \mathrm{i}\pi$ a $\sin(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\sinh(1)$. Komplexní analýzou se však v BI-ZMA z časových důvodů zabývat nemůžeme. Na přednášce bude ale aspoň zmíněno jak definovat e^z pro libovolné komplexní z.

- Jak to, že $\sqrt[3]{-1}$ je vyhodnocena jako $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ a ne jako -1?

  Odpověď: Pokud jste zvídaví, snadno ověříte, že tento výsledek není špatný:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{3}{4}}_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\Bigg)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = $$
$$= -\frac{3}{4}-\frac{1}{4} = -1.$$

„Problém“ tkví v tom, že v komplexních číslech má úloha

$$z^3 = -1, \quad z \in \mathbb{C},$$

celkem tři řešení. To, které jsme dostali, je tzv. principiální řešení – řešení s nejmenším „argumentem“. Opět, komplexní analýzou se v BI-ZMA zabývat nebudeme.

- V CAS Mathematica mají různé symboly rovnosti následující význam.
  - Symbol `==` se používá ve smyslu logické rovnosti (porovnání, zápis rovnic).
  - Symbol `=` se používá ve smyslu přiřazení.
  - Symbol `:=` má význam „opožděného vyhodnocení“.

Odpovědi na některé otázky

1 $\#A \cdot \#B$

3 a) $\mathrm{Re}z = 10$, $\mathrm{Im}z = -5$, b) $\mathrm{Re}z = 3$, $\mathrm{Im}z = -4$, c) $\mathrm{Re}z = -1$, $\mathrm{Im}z = 1$, d) $\mathrm{Re}z = \frac{2}{5}$, $\mathrm{Im}z = -\frac{1}{5}$.

4 a) omezená, b) pouze zdola omezená, c) není zdola ani shora omezená, d) omezená.

5 Ano, v případě $q = 1$ platí $\sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = n$.

6 5, −6.

7 Ani jeden ze zápisů není korektní.

8 Není. Například libovolná přímka rovnoběžná s osou y není grafem žádné funkce, tedy ani funkce tvaru $y = ax + b$ s reálnými a, b.

9 $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10 a) ne, b) ano, c) ano, d) ano.

11 a) 3 a −4, b) 1, −2 a 3, c) −2 a 2.

13 a) $\frac{\pi}{4}$, b) $-\frac{7\pi}{4}$.

15 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

17 $x + 2y - 5 = 0$.

18 $(x, y) = (-1, -1) + t \cdot (2, 3)$.

19 $7x - y - 10 = 0$.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Rejstřík

Literatura

[1] Bartsch, Hans-Jochen, *Matematické vzorce*, Mladá fronta, Praha, 2000

[2] Confuted, Using Quaternion to Perform 3D rotations, `http://www.cprogramming.com/tutorial/3d/quaternions.html`, 28. 9. 2013

[3] Weisstein, Eric W., *Euler-Mascheroni Constant*, MathWorld–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html`, 13. 10. 2013