# BI-AAG cvičení 4 - Algoritmy

Bc. Eliška Šestáková

16.10.2014

**Konstrukce KA pro sjednocení jazyků – $\varepsilon$-přechody** :

- Vstup:
  Dva konečné automaty $M_1$ a $M_2$.

- Výstup:
  Konečný automat $M$, $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

- Metoda:
  1. $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
  2. $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$:
     (a) $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$, $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$,
     (b) $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_{01}, q_{02}\}$,
     $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$, $\forall q \in Q_1$, $\forall a \in T$,
     $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$, $\forall q \in Q_2$, $\forall a \in T$.
  3. $F = F_1 \cup F_2$.

**Konstrukce KA pro sjednocení jazyků – paralelní činnost** :

- Vstup:
  Dva úplně určené konečné automaty $M_1$ a $M_2$.

- Výstup:
  Konečný automat $M$, který přijímá jazyk $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

- Metoda:
  Označíme $M = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
  Automat $M$ je definován takto:
  $M = (Q_1 \times Q_2, T, \delta, (q_{01}, q_{02}), (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2))$, kde $\delta$:
  $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ pro $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

**Konstrukce KA pro průnik jazyků – paralelní činnost** :

- Vstup:
  Dva konečné automaty $M_1$ a $M_2$.
- Výstup:
  Automat $M$ přijímající jazyk $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$
- Metoda:
  1. $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1), M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.

  2. Výsledný automat $M$:
     $M = (Q_1 \times Q_2, T, \delta, (q_{01}, q_{02}),\ F_1 \times F_2)$, kde $\delta$:
     $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))\ \forall (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

**KA přijímající doplněk jazyka do $T^*$** :

- Vstup:
  $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, úplně určený a deterministický, přijímající jazyk $L$.

- Výstup:
  $M' = (Q, T, \delta, q_0, F')$ přijímající $T^* \setminus L$ (doplněk jazyka $L$ do $T^*$).

- Metoda:
  $M' = (Q, T, \delta, q_0, Q \setminus F)$ (invertujeme koncové stavy)

**Konstrukce KA pro součin jazyků – $\varepsilon$-přechody** :

- Vstup:
  Dva konečné automaty $M_1$ a $M_2$.

- Výstup:
  Konečný automat $M$, $L(M) = L(M_1).L(M_2)$.

- Metoda:
  1. $M_1 = (Q_1, T_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
  2. Výsledný automat $M = (Q, T, \delta, q_{01}, F_2)$ je zkonstruován takto:
     (a) $Q = Q_1 \cup Q_2$,
     (b) $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ pro všechna $q \in Q_1$ a $a \in T_1$,
     $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ pro všechna $q \in Q_2$ a $a \in T_2$,
     $\delta(q, \varepsilon) = q_{02}$ pro všechna $q \in F_1$.

**Konstrukce KA pro součin jazyků – bez $\varepsilon$-přechodů** :

- Vstup:
  Dva konečné automaty $M_1$ a $M_2$.

- Výstup:
  Konečný automat $M$, $L(M) = L(M_1).L(M_2)$.

- Metoda:
  1. $M_1 = (Q_1, T_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
  2. Sestrojíme NKA $M' = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, T_1 \cup T_2, \delta, q_0, F)$,
     $q_0 = \begin{cases} q_{01}, \text{ jestliže } q_{01} \notin F_1, \\ [q_{01}, q_{02}], \text{ jestliže } q_{01} \in F_1, \end{cases}$
     (a) $\delta(q, x) = \delta_1(q, x)$, jestliže $q \in Q_1, \delta_1(q, x) \notin F_1$,
     (b) $\delta(q, x) = \delta_1(q, x) \cup \{q_{02}\}$, jestliže $q \in Q_1, \delta_1(q, x) \in F_1$,
     (c) $\delta(q, x) = \delta_2(q, x)$, jestliže $q \in Q_2$,
     (d) $\delta(q, x) = \delta_1(q_{01}, x) \cup \delta_2(q_{02}, x)$, jestliže $q = [q_{01}, q_{02}]$.
     (e) Jestliže $q_{01} \notin F_1$, pak $F = F_2$.
     Jestliže $q_{01} \in F_1$ a $q_{02} \in F_2$, pak $F = F_2 \cup \{[q_{01}, q_{02}]\}$.

**Konstrukce KA pro iteraci jazyka – s $\varepsilon$-přechody.** :

- Vstup:
  Konečný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, který přijímá jazyk $L$.

- Výstup:
  Konečný automat $M^*$, který přijímá jazyk $L^*$.

- Metoda: Sestrojme konečný automat $M^* = (Q, T, \delta', q_0', F \cup \{q_0'\})$,
  kde zobrazení $\delta'$ je definováno takto:
  $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$ pro všechna $q \in Q$ a všechna $x \in T$,
  $\delta'(q, \varepsilon) = \{q_0\}$ pro všechna $q \in F$,
  $\delta'(q_0', \varepsilon) = \{q_0\}$.

**Minimalizace DKA** :

- Vstup:
  DKA $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ bez zbytečných a nedosažitelných stavů, který přijímá jazyk $L$.
- Výstup:
  Minimální DKA $M' = (Q_m, T, \delta_m, q_{0m}, F_m)$ jazyk $L$.
- Metoda:
  1. Rozděl stavy $Q$ na dvě skupiny $Q_{\mathrm{I}} = Q \setminus F$, $Q_{\mathrm{II}} = F$.
  2. Vytvoř tabulku $\delta'$, kde pro každý stav $q \in Q$ je jeden řádek $\delta'(Q_i, a) = Q_j$, $q \in Q_i, \delta(q, a) \in Q_j, \forall a \in T$. (V tabulce nahraď stavy skupinami, do kterých náleží.)
  3. Jestliže v nějaké skupině $Q_i$ nejsou všechny řádky stejné, rozděl tuto skupinu tak, aby každá měla shodné řádky pro všechny své členy.
  4. Pokračuj bodem 2 dokud se skupiny dělí.
  5. $Q_m$ jsou všechny vytvořené skupiny, $F_m$ jsou všechny vytvořené skupiny koncových stavů, $\delta_m$ je poslední tabulka vzniklá v bodě 2, $q_{0m}$ je skupina obsahující $q_0$.

**Příklad minimalizace DKA** :

Nejprve se ujistíme, že vstupem pro minimalizaci je DKA bez nedosažitelných a zbytečných stavů. Případně tyto stavy před vlastní minimalizací vyloučíme (zde stav D – nedosažitelný).

Stavy si rozdělíme do dvou množin – koncové stavy a ostatní. Stavy přejmenujeme dle toho, do které množiny patří (množinu pojmenováváme například dle prvního stavu, jenž do dané množiny náleží). Zde máme skupiny A (nekoncové stavy) a C (koncové stavy).

| $\delta_0$ | | 0 | 1 | $\delta_1$ | 0 | 1 | $\delta_2$ | 0 | 1 | $\delta_3$ | 0 | 1 | $\delta_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | A | B | F | A | | | | | | | | | |
| | B | G | C | A | | | | | | | | | |
| $\leftarrow$ | C | A | I | C | | | | | | | | | |
| | D | C | G | | | | | | | | | | |
| | E | H | F | A | | | | | | | | | |
| | F | I | G | A | | | | | | | | | |
| | G | G | E | A | | | | | | | | | |
| | H | G | I | A | | | | | | | | | |
| $\leftarrow$ | I | E | C | C | | | | | | | | | |

Dále doplníme přechodovou tabulku pro naše nově pojmenované stavy. Například ze stavu A jsme přecházeli na 0 do stavu B, tento stav je nyní ale ve skupině A, proto bude v nové přechodové funkci přechod z A na 0 do A.

| $\delta_0$ | | 0 | 1 | $\delta_1$ | 0 | 1 | $\delta_2$ | 0 | 1 | $\delta_3$ | 0 | 1 | $\delta_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | A | B | F | A | A | A | | | | | | | |
| | B | G | C | A | A | C | | | | | | | |
| $\leftarrow$ | C | A | I | C | A | C | | | | | | | |
| | D | C | G | | | | | | | | | | |
| | E | H | F | A | A | A | | | | | | | |
| | F | I | G | A | C | A | | | | | | | |
| | G | G | E | A | A | A | | | | | | | |
| | H | G | I | A | A | C | | | | | | | |
| $\leftarrow$ | I | E | C | C | A | C | | | | | | | |

Zkontrolujeme zdali v každé ze skupin mají všechny stavy stejné přechody. Pokud některé stavy v dané skupině mají odlišné přechody, vytvoříme pro ně novou skupinu. Zde například stav A a B již nemohou společně zůstat ve skupině A, neboť se liší přechodem pro 1. Pro stav B tedy vytvoříme novou skupinu B.

Po úpravě rozdělení stavů do skupin opět pokračujeme vyplněním přechodové tabulky a kontroly rozdělení stavů.

| $\delta_0$ | | 0 | 1 | $\delta_1$ | 0 | 1 | $\delta_2$ | 0 | 1 | $\delta_3$ | 0 | 1 | $\delta_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | A | B | F | A | A | A | A | B | F | A | B | F | A |
| | B | G | C | A | A | C | B | A | C | B | G | C | B |
| $\leftarrow$ | C | A | I | C | A | C | C | A | C | C | A | C | C |
| | D | C | G | | | | | | | | | | |
| | E | H | F | A | A | A | A | B | F | A | B | F | A |
| | F | I | G | A | C | A | F | C | A | F | C | G | F |
| | G | G | E | A | A | A | A | A | A | G | G | A | G |
| | H | G | I | A | A | C | B | A | C | B | G | C | B |
| $\leftarrow$ | I | E | C | C | A | C | C | A | C | C | A | C | C |

Algoritmus končí ve chvíli, kdy rozdělení stavů v daném kroku je stejné, jako v kroku předchozím (zde $\delta_4$ a $\delta_3$).