Regulární výrazy

BI-AAG (5.cvičení)

Bc. Eliška Šestáková
sestaeli@fit.cvut.cz

23.10.2014

Opakování 4.cvičení – skládání KA

1. Nechť jsou dány formální jazyky:

   $L_1 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w \text{ končí na 000 nebo 11 }\}$
   $L_2 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w \text{ neobsahuje tři stejné symboly za sebou }\}$

   Určete automat M tak, aby $L(M) = (L_1 L_2)^*$.

2. Vytvořte konečný automat, který přijímá jazyk všech binárních číslic dělitelných 4 nebo začínajících 1010.

   $$L = \{w : w \in \{0,1\}^*, w \text{ je dělitelné 4 nebo začíná na 1010 }\}$$

Základní pojmy

- Vztahy mezi formálními systémy pro regulární jazyky
- Definice regulárního výrazu
- Hodnota regulárního výrazu
- Identické, ekvivalentní a podobné regulární výrazy
- Regulární rovnice
- Derivace regulárních výrazů
- Integrál regulárních výrazů

Axiomy

$$
\begin{array}{ll}
A_1 : x + (y + z) = (x + y) + z & \text{(asociativnost sjednocení),} \\
A_2 : x + y = y + x & \text{(komutativnost sjednocení),} \\
A_3 : x + \emptyset = x & \text{(}\emptyset\text{ je nulový prvek pro sjednocení),} \\
A_4 : x + x = x & \text{(idempotence sjednocení),} \\
A_5 : x.(y.z) = (x.y).z & \text{(asociativnost zřetězení),} \\
A_6 : \varepsilon x = x\varepsilon = x & \text{(}\varepsilon\text{ je jednotkový prvek pro zřetězení),} \\
A_7 : \emptyset x = x\emptyset = \emptyset & \text{(}\emptyset\text{ je nulový prvek pro zřetězení),} \\
A_8 : x.(y + z) = x.y + x.z & \text{(distributivnost zleva),} \\
A_9 : (x + y).z = x.z + y.z & \text{(distributivnost zprava),} \\
A_{10} : x^* = \varepsilon + x^* x & \\
A_{11} : x^* = (\varepsilon + x)^* & \\
A_{12} : x = x\alpha + \beta \Rightarrow x = \beta\alpha^* & \text{(řešení levé regulární rovnice),} \\
A_{13} : x = \alpha x + \beta \Rightarrow x = \alpha^*\beta & \text{(řešení pravé regulární rovnice).}
\end{array}
$$

Věty v axiomatické teorii regulárních výrazů

$V_1: \quad \emptyset^* = \varepsilon$

$V_2: \quad x^* + x = x^*$

$V_3: \quad (x^*)^* = x^*$

$V_4: \quad (x + y)^* = (x^* y^*)^*$

$V_5: \quad x^* y = y + x^* x y$

$V_6: \quad x^* y = y + x x^* y$

$V_7: \quad x^* y = (x^n)^*.(y + xy + x^2 y + ... + x^{n-1} y)$

$V_8:$ Jestliže $\varepsilon \in h(x)$, pak $x x^* = x^*$

$V_9: \quad (xy)^* x = x(yx)^*$

$V_{10}: \quad (x + y)^* = (x^* + y^*)^*$

Příklad 5.1

Sestrojte regulární výraz pro následující jazyky:

- $L_1 = \{w : w \in \{0,1\}^*, 3 \mid |w|\}$
- $L_2 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w$ obsahuje alespoň 3 symboly 1 $\}$
- $L_3 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w$ má sudý počet symbolů 0 $\}$
- $L_4 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w$ má lichý počet symbolů 1 $\}$
- $L_5 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w$ má sudý počet symbolů 0 nebo lichý počet symbolů 1 $\}$
- $L_6 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w$ obsahuje střídající se symboly 0 a 1 $\}$
- $L_7 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w$ obsahuje 0110 $\}$
- $L_8 = \{w : w \in \{0,1\}^*, w$ má po každém symbolu 0 alespoň dva symboly 1 $\}$

Příklad 5.2

Upravte a zjednodušte regulární výrazy:

- $V_1 = 0^*(0^* + 1^*)$
- $V_2 = 11^* + 0^*0 + \epsilon$
- $V_3 = 0^*(1 + \epsilon)0^*(0 + 1)^*$
- $V_4 = (bb + aa)^*(\epsilon + b(b + (bb)^*baa)) + aa + bb$

Příklad 5.3

Řešte regulární rovnice:

1. $x = 01x + 1$
2. $x = x1 + x01 + 2$
3. $x = 1x + 01(x + 1^*)$
4. $x = x + x(1 + 0^*1 + \epsilon)$
5. $x = (x + 1)(0^*1 + 1)^*$

Příklad 5.4

Řešte soustavy regulárních rovnic:

1. $x = 01^*y + 0x + 0$
   $y = 1x + 1$
2. $x = x0 + y1 + 2^*$
   $y = x01 + y1 + 0$
3. $x = 01x + 1^*y + 01$
   $y = 101y + 1x + 0$
4. $x = (01^* + 1)x + y$
   $y = 11 + 1x + 00z$
   $z = \epsilon + x + y$

Příklad 5.5

Určete derivaci regulárních výrazu:

1. $\frac{d(10^*1)}{d1}$
2. $\frac{d(01+10)^*}{d0}$
3. $\frac{d(010+101+0^*1+1^*0)}{d0}$
4. $\frac{d(10^*1^*0)}{d(100)}$
5. $\frac{d(10^*1^*0)}{d(011)}$

- $\frac{dV}{d\varepsilon} = V$
- pro $a \in \Sigma$ platí:
  $\frac{d\varepsilon}{da} = \emptyset \quad \frac{d\emptyset}{da} = \emptyset$
  $$\frac{db}{da} = \begin{cases} \emptyset, \text{ jestliže } a \neq b \\ \varepsilon, \text{ jestliže } a = b \end{cases}$$
  $\frac{d(U+V)}{da} = \frac{dU}{da} + \frac{dV}{da}$
  $\frac{d(UV)}{da} = \frac{dU}{da}V + \{\frac{dV}{da} : \varepsilon \in h(U)\}$
  $\frac{d(V^*)}{da} = \frac{dV}{da}.V^*$
- Pro $x = a_1 a_2 ... a_n$, $a_i \in \Sigma$ platí
  $\frac{dV}{dx} = \frac{d}{da_n}(\frac{d}{da_{n-1}}(\dots\frac{d}{da_2}(\frac{dV}{da_1})\dots))$

Příklad 5.6

Určete integrály regulárních výrazů:

1. $\int (101 + 010)\, d1$
2. $\int 0(1^* + 0^*)\, d1$
3. $\int 0^*(1 + 0^*10)\, d0$
4. $\int (101 + 010)\, d101$

- $\int V d\varepsilon = V$
- pro $a \in \Sigma$ platí:
  $\int \varepsilon\ da = a,$
  $\int \emptyset\ da = \emptyset,$
  $\int b\ da = ab,$
  $\int (U + V)\ da = \int U\ da + \int V\ da,$
  $\int (U.V)\ da = aUV,$
  $\int V^*\ da = aV^*.$
- pro $x = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ platí:
  $\int V\ dx = \int \cdots [\int (\int V\ da_n)\ da_{n-1}] \cdots da_1.$

Příklad 5.7

Máme slovo $x = abba$. Vyjádřete pomocí regulárních výrazů jazyky pro všechny neprázdné předpony, přípony, faktory a podposloupnosti slova x.