cvičení 7

Opakování 6. cvičení

(1) $V = a^* b a^* + b c a^*$

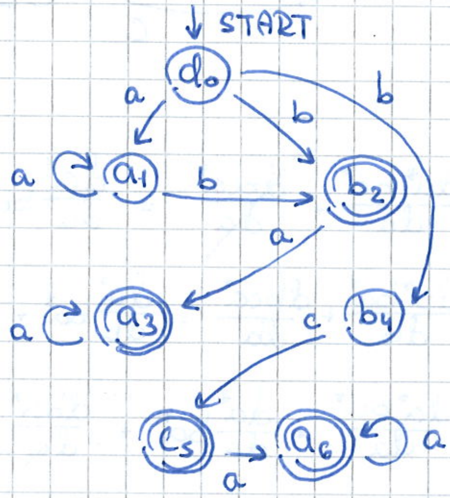
a) metoda sousedů

$$V' = a_1^* b_2 a_3^* + b_4 c_5 a_6^*$$

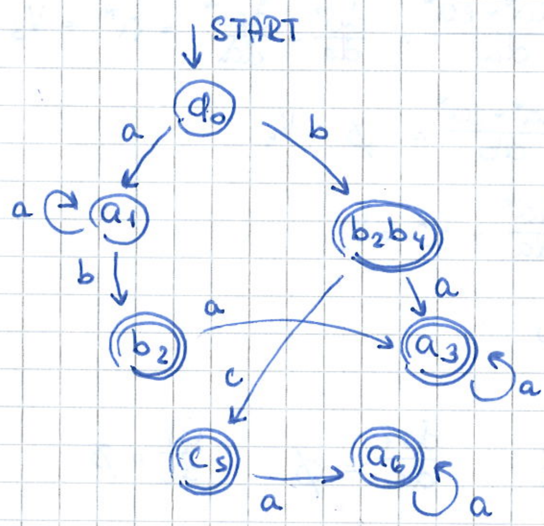
$Z = \{a_1, b_2, b_4\}$ $\quad F = \{a_6, c_5, a_3, b_2\}$

$P = \{a_1a_1, a_1b_2, b_2a_3, a_3a_3, b_4c_5, c_5a_6, a_6a_6\}$

δ_{NKA}	a	b	c
→ q_0	a_1	b_2, b_4	
a_1	a_1	b_2	
← b_2	a_3		
← a_3	a_3		
b_4			c_5
← c_5	a_6		
← a_6	a_6		

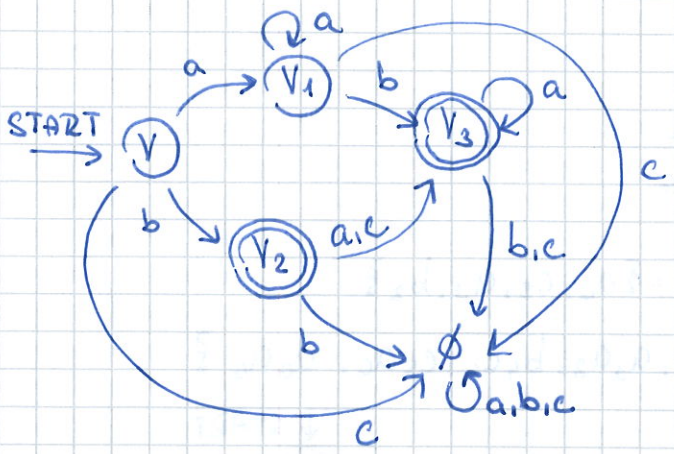


δ_{DKA}	a	b	c
→ $[q_0]$	$[a_1]$	$[b_2b_4]$	
$[a_1]$	$[a_1]$	$[b_2]$	
← $[b_2b_4]$	$[a_3]$		$[c_5]$
← $[b_2]$	$[a_3]$		
← $[a_3]$	$[a_3]$		
← $[c_5]$	$[a_6]$		
← $[a_6]$	$[a_6]$		



b) metoda derivací

$$V = a^*ba^* + bca^*$$



$V = a^*ba^* + bca^*$
$V_1 = a^*ba^*$
$V_2 = a^* + ca^*$
$V_3 = a^*$
$V_4 = \emptyset$

$$\frac{dV}{da} = \frac{da^*ba^*}{da} + \cancel{\frac{dbca^*}{da}} = \frac{da^*}{da}ba^* + \cancel{\frac{dba^*}{da}} = \frac{da}{da}a^*ba^* = a^*ba^* = V_1$$

$$\frac{dV}{db} = \frac{da^*ba^*}{db} + \frac{dbca^*}{db} = \frac{da^*}{db}ba^* + \frac{dba^*}{db} + ca^* = a^* + ca^* = V_2$$

$$\frac{dV_1}{da} = \frac{da^*ba^*}{da} = \frac{da^*}{da}ba^* + \cancel{\frac{dba^*}{da}} = a^*ba^* = V_1$$

$$\frac{dV_1}{db} = \frac{da^*ba^*}{db} = \cancel{\frac{da^*}{db}ba^*} + \frac{dba^*}{db} = a^* = V_3$$

$$\frac{dV_2}{da} = \frac{da^* + ca^*}{da} = \frac{da^*}{da} + \cancel{\frac{dca^*}{da}} = a^* = V_3$$

$$\frac{dV_2}{db} = \frac{da^* + ca^*}{db} = \emptyset = V_4$$

$$\frac{dV_3}{da} = \frac{da^*}{da} = a^* = V_3 \qquad \frac{d\emptyset}{da} = \emptyset \quad \frac{d\emptyset}{db} = \emptyset \quad \frac{d\emptyset}{dc} = \emptyset$$

$$\frac{dV_3}{db} = \emptyset$$

$$\frac{dV_3}{dc} = \emptyset \qquad \frac{dV_1}{dc} = \emptyset \qquad \frac{dV}{dc} = \emptyset$$

$$\frac{dV_2}{dc} = \frac{da^* + ca^*}{dc} = \cancel{\frac{da^*}{dc}} + \frac{dca^*}{dc} = a^* = V_3$$

$$V_1 = (a+b)(b+\varepsilon) \xrightarrow{\text{pro metodu}} \text{derivací pomocí derivují}$$

$\downarrow$ pro metodu sousedů

$$V_1' = (a_1+b_2)(b_3+\varepsilon)$$

$$V_2 = (a^*c + b^*a\varepsilon^*)^*(b+\emptyset)^* = (a^*c+b^*a)^*b^*$$

$$V_3 = (a^*c + b^*\emptyset a)^* = (a^*c)^*$$

$$V_4 = ((ab^*c+a^*)^*(a+b\emptyset+a)^*)^*$$
$$= ((ab^*c+a^*)^*a^*)^* \underset{\text{dle } V_4}{=} ((ab^*c+a^*)+a)^* = (ab^*c+a^*)^* \underset{\text{dle } V_{10}}{=} (ab^*c+a)^*$$

Příklad 7.1 - viz příklad 6.6

Příklad 7.2 - viz příklad 6.7

Příklad 4.3

$G_1 = (\{S, A\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$

$P: \quad S \to 0S \mid 1A \mid 1$

$\quad\quad A \to 2A \mid 0$

$$S = 0S + 1A + 1$$
$$A = 2A + 0 \quad \longrightarrow \quad A = 2^*0$$

$$S = 0S + 12^*0 + 1$$

$$S = 0^*(12^*0 + 1)$$

$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$

$P: \quad S \to \varepsilon \mid 1A \mid 2B \mid 1$

$\quad\quad A \to 0A \mid 1B \mid 0$

$\quad\quad B \to 1B \mid 2A$

$$S = \varepsilon + 1A + 2B + 1$$
$$A = 0A + 1B + 0$$
$$B = 1B + 2A \quad \longrightarrow \quad B = 1^*2A$$

$$S = \varepsilon + 1A + 21^*2A + 1$$
$$A = 0A + 11^*2A + 0$$

$$S = \varepsilon + 1A + 21^*2A + 1$$
$$A = (0 + 11^*2)A + 0 \quad \longrightarrow \quad A = (0 + 11^*2)^*0$$

$$S = \varepsilon + 1(0 + 11^*2)^*0 + 21^*2(0 + 11^*2)^*0 + 1$$

Příklad 7.4

1) $V = (0+1)^* 0$

$$V = (0+1)^* 0$$
$$V_1 = (0+1)^* 0 + \varepsilon$$

$$V \to 0V_1 \mid 1V \mid 0$$

$$V_1 \to 0V_1 \mid 1V \mid 0 \mid \varepsilon$$

$$\frac{dV}{d0} = \frac{d(0+1)^*0}{d0} = \frac{d(0+1)^*}{d0}0 + \frac{d0}{d0} = \frac{d(0+1)}{d0}(0+1)^*0 + \varepsilon = (0+1)^*0 + \varepsilon = V_1$$

$$\frac{dV}{d1} = \frac{d(0+1)^*0}{d1} = \frac{d(0+1)^*}{d1}0 + \cancel{\frac{d0}{d1}} = \frac{d(0+1)}{d1}(0+1)^*0 = (0+1)^*0 = V$$

$$\frac{dV_1}{d0} = \frac{d(0+1)^*0+\varepsilon}{d0} = \frac{d(0+1)^*}{d0}0 + \frac{d0}{d0} + \cancel{\frac{d\varepsilon}{d0}} = (0+1)^*0 + \varepsilon = V_1$$

$$\frac{dV_1}{d1} = \frac{d(0+1)^*0+\varepsilon}{d1} = \frac{d(0+1)^*}{d1}0 + \cancel{\frac{d0}{d1}} + \cancel{\frac{d\varepsilon}{d1}} = (0+1)^*0 = V$$

bez ε-pravidel:

$$V \to 0V_1 \mid 1V \mid 0$$

$$V_1 \to 0V_1 \mid 1V \mid 0 \quad \leftarrow \text{lze odstranit}$$

$V_1 \to aV_2 \quad \frac{dV_1}{da} = V_2$

$V_1 \to a \quad \frac{dV_1}{da} = V_2 a$

$\varepsilon \in h(V_2)$

$V \to \varepsilon \quad \varepsilon \in h(V)$

1) copy all non ε-production
2) pro ∀N (kde $N \to \varepsilon$) copy all rules in which N appears on the right with & without N
3) $S \to \varepsilon$ zkontrolovat pravou stranu

2) $V = (0+1)^* 101^*$

$V \to 0V \mid 1V_1$

$V_1 \to 0V_2 \mid 1V_1 \mid 0$

$V_2 \to 0V \mid 1V_3 \mid 1 \mid \varepsilon$

$V_3 \to 0V_2 \mid 1V_3 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

$V = (0+1)^* 101^*$
$V_1 = (0+1)^* 101^* + 01^*$
$V_2 = (0+1)^* 101^* + 1^*$
$V_3 = (0+1)^* 101^* + 01^* + 1^*$

$$\frac{dV}{d0} = \frac{d(0+1)^*}{d0} 101^* + \frac{d101^*}{\cancel{d0}} = (0+1)^* 101^* = V$$

$$\frac{dV}{d1} = \frac{d(0+1)^*}{d1} 101^* + \frac{d101^*}{d1} = (0+1)^* 101^* + 01^* = V + 01^* = V_1$$

$$\frac{dV_1}{d0} = \frac{dV}{d0} + \frac{d01^*}{d0} = V + 1^* = (0+1)^* 101^* + 1^* = V_2$$

$$\frac{dV_1}{d1} = \frac{dV}{d1} + \cancel{\frac{d01^*}{d1}} = V_1$$

$$\frac{dV_2}{d0} = \frac{dV}{d0} + \cancel{\frac{d1^*}{d0}} = V$$

$$\frac{dV_2}{d1} = \frac{dV}{d1} + \frac{d1^*}{d1} = V_1 + 1^* = \underbrace{(0+1)^* 101^* + 01^*}_{V_1} + 1^* = V_3$$

$$\frac{dV_3}{d0} = \frac{dV_1}{d0} + \cancel{\frac{d1^*}{d0}} = V_2$$

$$\frac{dV_3}{d1} + \frac{dV_1}{d1} + \frac{d1^*}{d1} = V_1 + 1^* = V_3$$

Bez ε-pravidel:

$V \to 0V \mid 1V_1$

$V_1 \to 0V_2 \mid 1V_1 \mid 0$

$V_2 \to 0V \mid 1V_3 \mid 1$

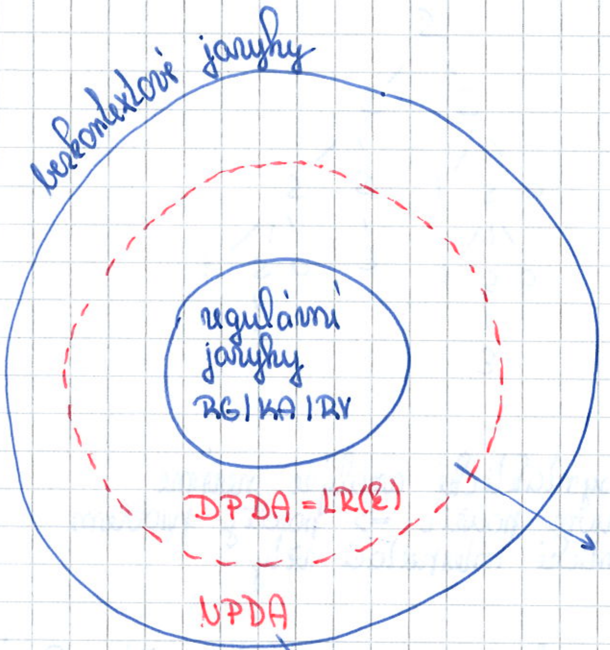
$V_3 \to 0V_2 \mid 1V_3 \mid 0 \mid 1$

cvičení 8

Bezkontextové jazyky a gramatiky

Bezkontextová gramatika

$$N \to (N \cup T)^*$$



deterministický zás. automat (LR(k) gramatika)

nedeterministický zásobníkový automat (= bezk. jazyky)

nejednoznačná (víceznačná) / jednoznačná BG

(Př.) $G_1 = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$ $\quad P: \; S \to 0S1 \mid SS \mid \varepsilon$ (1., 2., 3.)

$w_1 = 001101$

1) jaký jazyk generuje G_1? $L(G_1)$ = "správně vyvážená závorková struktura"

2) $w_1 \in L(G_1)$?

001101 $\quad$ 0 → push 0, 1 → pop

SYNTAKTICKÁ ANALÝZA

$w_1 \in L(G_1)$?

w_1 .. struktura

311312 (pravý rozklad)

211313 (levý rozklad)

3) derivace

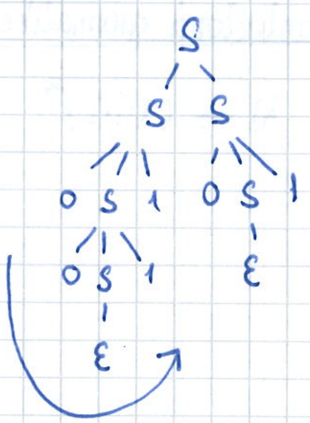
$$S \overset{2.}{\Rightarrow} SS \overset{1.}{\Rightarrow} S0S1 \overset{3.}{\Rightarrow} S01 \overset{1.}{\Rightarrow} 0S101 \overset{1.}{\Rightarrow} 00S1101 \overset{3.}{\Rightarrow} 001101$$

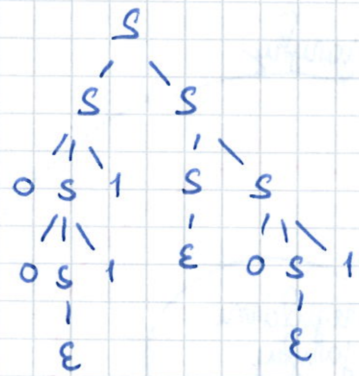
PRÁVÁ DERIVACE

$$S \overset{2.}{\Rightarrow} SS \overset{1.}{\Rightarrow} 0S1S \overset{1.}{\Rightarrow} 00S11S \overset{3.}{\Rightarrow} 0011S \overset{1.}{\Rightarrow} 00110S1 \overset{3.}{\Rightarrow} 001101$$

LEVÁ DERIVACE

4, derivační strom 001101





- problém! při syntaktické analýze nevíme jaký derivační strom použil => později problém např. při sémantické interpretaci věty

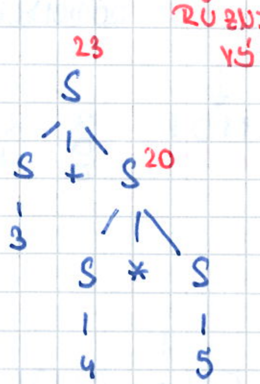
nejednoznačná gramatika - v daném jazyce existuje věta, která má více než 1 derivační strom

- nelze sestrojit algoritmus, který by pro danou gramatiku rozhodl, zdali je jednoznačná nebo víceznačná

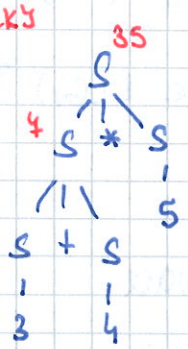
př. $G_2 = (\{S\}, \{+, *, 0, 1, \dots, 9\}, P, S)$, kde P:

P: $S \rightarrow S+S \mid S*S \mid 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$

$w_2 = 3+4*5$



RŮZNÝ SÉMANTICKÝ VÝZNAM



pozn. jednoznačná G_1: $S \rightarrow 0S1S \mid \varepsilon$

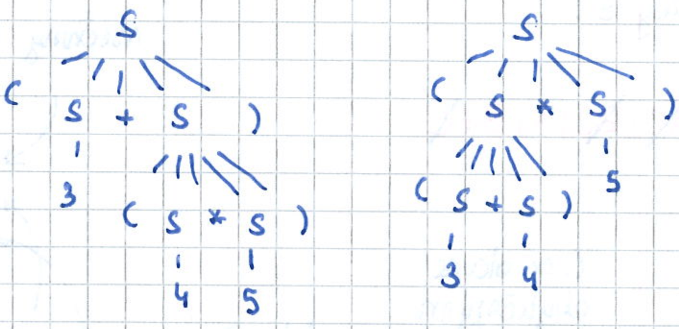
• jednoznačná gramatika (úprava G_2)

a) $S \to (S+S) \mid (S*S) \mid 0 \mid 1 \mid \dots 9$

- musíme lépe určit postup :

$3+4*5$

$(3+(4*5))$ $\qquad$ $((3+4)*5)$



b)

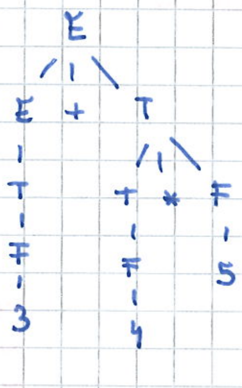
$E \to E+T \mid T$

$T \to T * F \mid F$

$F \to 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9 \mid (E)$

změníme gramatiku, aby respektovala prioritu násobení

$3+4*5$



Příklad 8.1

- $A \to ZNONZ \mid ZOZ \mid ZNOZ \mid ZONZ$
  $\cancel{N \to \varepsilon}$

- $S \to a \mid Xb \mid ZYZ \mid b \mid ZZ$
  $X \to Y \mid \cancel{\varepsilon}$
  $Y \to 1 \mid X$

  Y může být taky ε!

  $S' \to \varepsilon \mid S$
- $S \to AB\cancel{C} \mid AB \mid A\cancel{C} \mid \cancel{B}C \mid A \mid B \mid \cancel{C}$
  $A \to aA \mid \cancel{\varepsilon} \mid a$
  $B \to bB \mid \cancel{\varepsilon} \mid b$
  $C \to \cancel{\varepsilon}$

C se stane zbytečným symbolem po odstranění ε-přechodů

všechny N, kde $N \to \varepsilon$

$N_0 = \{\}$
$N_1 = \{A, B, C\}$
$N_2 = \{A, B, C, S\}$
$N_3 = \{A, B, C, S\}$

všechny N, kde $N \to (N_1)^*$

všechny N, kde $N \to (N_2)^*$

Příklad 8.2

- $A \to \cancel{B} \mid CC \mid DD \mid BOZO \mid CC \mid ABC \mid a$
  $B \to BOZO \mid CC \mid ABC \mid a$

- $S \to \cancel{A} \mid 11 \mid 1$
  $A \to \cancel{B} \mid 1 \mid 0$
  $B \to \cancel{S} \mid 0 \mid 11 \mid 1$

  špatně

  $S \to \cancel{A} \mid 11 \mid 1 \mid 0$
  $\times\ A \to \cancel{B} \mid 1 \mid 0 \mid 11$
  $\times\ B \to \cancel{S} \mid 0 \mid 11 \mid 1$

$N_S = \{A, B\}$
$N_A = \{B, S\}$
$N_B = \{S, A\}$

- $S \to \cancel{A} \mid \cancel{B} \mid aA \mid bS \mid cB \mid dS \mid bC \mid a \mid dD \mid c$
  $A \to \cancel{\varepsilon} \mid aA \mid bS \mid bC \mid a$
  $B \to \cancel{D} \mid cB \mid dS \mid dD \mid c$
  $C \to bC \mid a$
  $D \to dD \mid c$

$N_S = \{S, A, B, C, D\}$
$N_A = \{A, C\}$
$N_B = \{B, D\}$
$N_C = \{C\}$
$N_D = \{D\}$

Příklad 8.3

2 fáze → nalezení neterminálů, které mohou něco generovat
→ nalezení neterminálů dostupných z S

$S \to AB \mid C$
$A \to aA \mid a$
$B \to bB$
$C \to c$
$D \to bc$

všechny N, které na pravé straně mají T^*

1) $N_0 = \{\}$
$N_1 = \{A, C, D\}$
$N_2 = \{S, A, C, D\}$
$N_3 = \{S, A, C, D\}$

$S \to C$
$A \to aA \mid a$
$C \to c$
$D \to bc$

- vyloučí B a všechna pravidla ve kterých se B vyskytuje

všechny N, které na pravé straně mají $(T \cup N_1)^*$

$N \to (T \cup N_2)^*$

2) $N_0 = \{S\}$
$N_1 = \{S, C\}$
$N_2 = \{S, C\}$

$S \to C$
$C \to c$ → $S \to c$

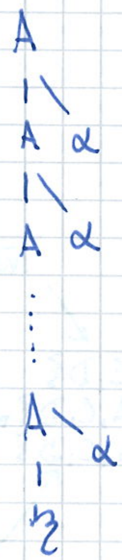
- vyloučí D a A

Příklad 8.4

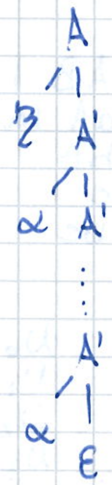
odstranění rekurzivity zleva

$A \to A\alpha \mid \beta \quad \to \quad A = \beta\alpha^*$

a)



b)



$A \to \beta A' \mid \beta$

$A \to \alpha A' \mid \alpha$

nepoužívá se, výsledná gramatika není LL(1)

$$\boxed{\begin{array}{l} A \to \beta A' \\ A \to \alpha A' \mid \varepsilon \end{array}}$$

- $E \to E + T \mid T$
  $T \to T * F \mid F$
  $F \to (E) \mid a$

$\downarrow$

$E \to TE'$

$E' \to +TE' \mid \varepsilon$

$T \to FT'$

$T' \to *FT' \mid \varepsilon$

$F \to (E) \mid a$

Příklad 8.5

* vlastní : bez cyklů (bez jedn. prav a ε-pravidel $\Rightarrow$ bez cyklů)
bez ε-pravidel
bez zbytečných symbolů

$S \to aB \mid bA$

$A \to aS \mid bAA \mid a$

$B \to bS \mid aBB \mid b$

$S \to a'B$ $\qquad a' \to a$

$S \to b'A$ $\qquad b' \to b$

$A \to a'S$

$A \to b'\langle AA\rangle$

$\langle AA\rangle \to AA$

$A \to a$

$B \to b'S$

$B \to a'\langle BB\rangle$

$\langle BB\rangle \to BB$

$B \to b$

Příklad 8.6

$L = \{a^m b^n : n \geq m \geq 1\}$

$a^m \overbrace{b^m b^k}^{n}$

$m \geq 1 \quad k \geq 0$

$S \to AB$

$A \to aAb \mid ab$

$B \to bB \mid \varepsilon$

1. vyloučení zbytečných symbolů ← $\{B, A, S\}$, $\{S, A, B\}$ OK

2. vyloučení ε-pravidel $\{B\}$

$S \to AB \mid A$

$A \to aAb \mid ab$

$B \to bB \mid b$

3. vyloučení jednoduchých pravidel

$N_S = \{S, A\} \quad N_A = \{A\} \quad N_B = \{B\}$

$S \to AB \mid aAb \mid ab$

$A \to aAb \mid ab$

$B \to bB \mid b$

$S \to AB \qquad a' \to a$

$S \to a' \langle Ab \rangle \qquad b' \to b$

$\langle Ab \rangle \to Ab'$

$S \to a'b'$

$A \to a' \langle Ab \rangle$

$\langle Ab \rangle \to Ab'$

$A \to a'b'$

$B \to b'B \mid b$

Příklad 8.7

$A \rightarrow BC \mid AB \mid 1$

$B \rightarrow AA \mid 0$

$C \rightarrow CB \mid 1 \mid 0$

$w = 110100$

V_{ij} - všechny neterminály, které generují "j" symbolů, počínaje symbolem na pozici "i"

př. $V_{4,1}$ - všechny N generující 1 symbol od pozice 4

$w = 110\boxed{1}00$

123456

$V_{4,1} = \{A, C\}$

- naším cílem je zjistit zdali $A \in V_{1,6}$

	V i \ j	1	2	3	4	5	6
1	1	A,C	B	A,B	B,A,C	A,B,C	A,B,C
1	2	A,C	A,C	B	B,A	B,A,C	
0	3	B,C	A	A	A,C,B		
1	4	A,C	A,C	A,B,C			
0	5	B,C	A,C				
0	6	B,C					

$V_{1,2}$

$w = \boxed{11}0100$

A,C A,C

$\{AA, AC, CA, CC\}$

$V_{1,3}$

$w = \boxed{110}100$

1+2 2+1

$\{A,C\}\ \{A,C\}$ $\{B\}\ \{B,C\}$

$\{AA, AC, CA, CC\}$ B $\{BB, BC\}$ A

- zpětně pomocí backtrackingu lze zjistit, které derivace použít k získání řetězce w

cvičení 9

Příklad 9.1 - viz 8.5

Příklad 9.2 - viz 8.6

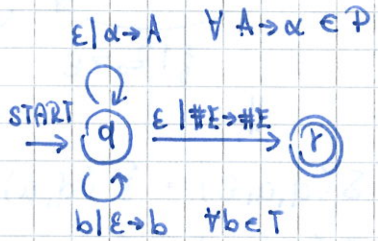
Příklad 9.3 - viz 8.7

Příklad 9.4

$$R = (\underset{Q}{\{q,r\}}, \underset{T}{\{+,*,(,),a\}}, \underset{G}{\{E,T,F,+,*,(,),a,\#\}}, \delta, \underset{q_0}{q}, \underset{Z_0}{\#}, \underset{F}{\{r\}})$$

δ:

$$\delta(q,b,\varepsilon) = \{(q,b)\} \quad \forall b \in \{+,*,(,),a\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,E+T) = \{(q,E)\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,T) = \{(q,E)\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,T*F) = \{(q,T)\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,F) = \{(q,T)\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,(E)) = \{(q,F)\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,a) = \{(q,F)\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,\#E) = \{(r,\#E)\}$$

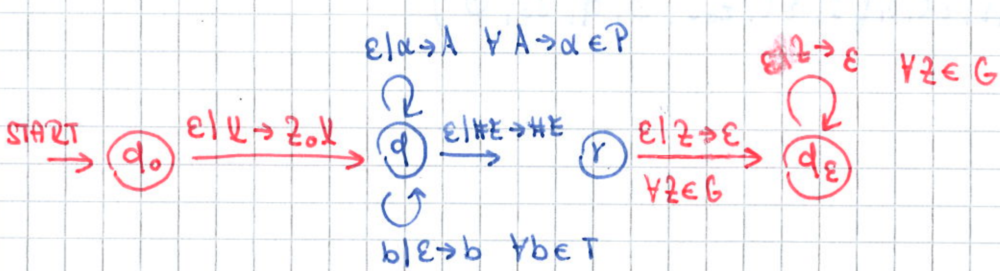


$$R_1 = (\{q,r,q_\varepsilon,q_0'\}, \{+,*,(,),a\}, \{E,T,F,+,*,(,),a,\#,X\}, \delta', q_0', X, \emptyset)$$

$$\delta'(q_0',\varepsilon,X) = \{(q, XZ_0)\}$$

$$\delta'(q,b,\varepsilon) = \{(q,b)\} \quad \forall b \in \{+,*,(,),a\}$$
$$\delta'(q,\varepsilon,E+T) = \{(q,E)\}$$
$$\delta'(q,\varepsilon,T) = \{(q,E)\}$$
$$\delta'(q,\varepsilon,T*F) = \{(q,T)\}$$
$$\delta'(q,\varepsilon,F) = \{(q,T)\}$$
$$\delta'(q,\varepsilon,(E)) = \{(q,F)\}$$
$$\delta'(q,\varepsilon,a) = \{(q,F)\}$$
$$\delta'(q,\varepsilon,\#E) = \{(r,\#E)\}$$

$$\delta'(r,\varepsilon,Z) = \{(q_\varepsilon,\varepsilon)\} \quad \forall Z \in \{E,T,F,+,*,(,),a,\#,X\}$$
$$\delta'(q_\varepsilon,\varepsilon,Z) = \{(q_\varepsilon,\varepsilon)\} \quad \forall Z \in \{E,T,F,+,*,(,),a,\#,X\}$$



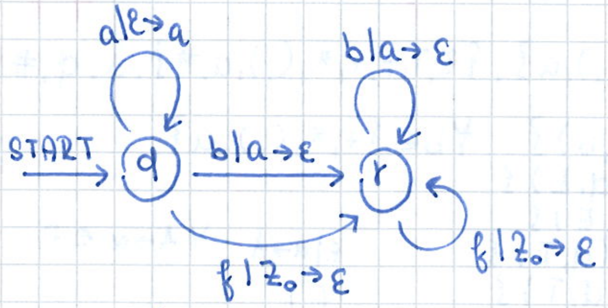
Příklad 9.5

$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb \mid \varepsilon\}, S)$

$R = (\{q, r\}, \{a, b, f\}, \{a, Z_0\}, \delta, q, Z_0, \emptyset)$

δ:



$\Vert$

$\delta(q, a, \varepsilon) = \{(q, a)\}$

$\delta(q, b, a) = \{(r, \varepsilon)\}$

$\delta(r, b, a) = \{(r, \varepsilon)\}$

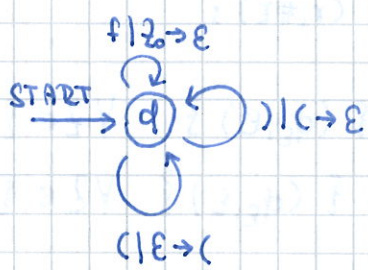
$\delta(r, f, Z_0) = \{(r, \varepsilon)\}$

$\delta(q, f, Z_0) = \{(r, \varepsilon)\}$

Příklad 9.6

L = "vyvážená závorková struktura"

$G = (\{S\}, \{(,)\}, \{S \rightarrow (S)S \mid \varepsilon\}, S)$



$=$

$\delta(q, (, \varepsilon) = \{(q, ()\}$

$\delta(q,), () = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, f, Z_0) = \{(q, \varepsilon)\}$

$R = (\{q\}, \{(,), f\}, \{(, Z_0\}, \delta, q, Z_0, \emptyset)$

Příklad 9.7

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$

P:
(1) $S \to AB$
(2) $A \to aAb$
(3) $A \to ab$
(4) $B \to cBd$
(5) $B \to cd$

1) SHORA DOLŮ

$R = (\{q\}, \{a,b,c,d\}, \{S,A,B,a,b,c,d\}, \delta, q, S, \emptyset)$

δ:

$$\left.\begin{array}{l} \delta(q,\varepsilon,S) = \{(q,AB)\} \\ \delta(q,\varepsilon,A) = \{(q,aAb),(q,ab)\} \\ \delta(q,\varepsilon,B) = \{(q,cBd),(q,cd)\} \end{array}\right] \text{EXPANZE}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(q,a,a) = \{(q,\varepsilon)\} \\ \delta(q,b,b) = \{(q,\varepsilon)\} \\ \delta(q,c,c) = \{(q,\varepsilon)\} \\ \delta(q,d,d) = \{(q,\varepsilon)\} \end{array}\right\} \text{SROVNÁNÍ}$$

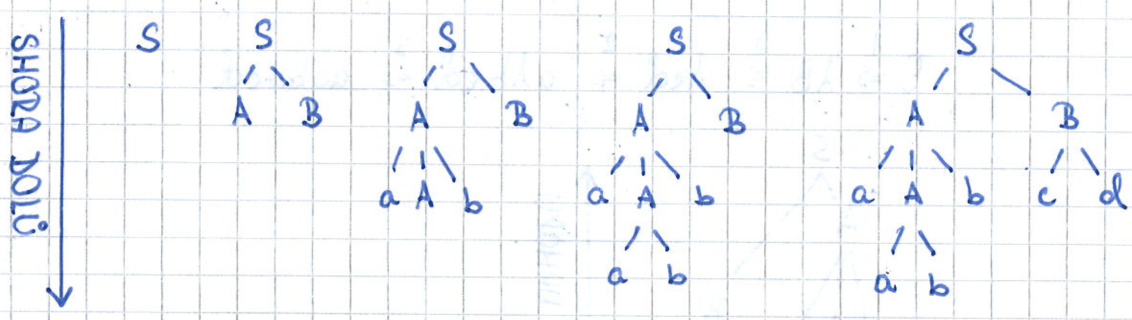
$$(q, aabbcd, S) \overset{(1)}{\vdash} (q, aabbcd, AB) \overset{(2)}{\vdash} (q, aabbcd, aAbB) \vdash$$
$$(q, abbcd, AbB) \vdash (q, abbcd, abbB) \vdash (q, bbcd, bbB) \vdash$$
$$\vdash (q, bcd, bB) \vdash (q, cd, B) \overset{(3)}{\vdash} (q, cd, cd) \underset{(5)}{\vdash} (q, d, d) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

levý rozklad: 1 2 3 5

vrchol zásobníku vlevo!

- posloupnost pravidel použitých při levé derivaci

$$S \overset{1}{\Rightarrow} AB \overset{2}{\Rightarrow} aAbB \overset{3}{\Rightarrow} aabbB \overset{5}{\Rightarrow} aabbcd$$



2) ZDOLA NAHORU

$R = (\{q,r\}, \{a,b,c,d\}, \{S,A,B,a,b,c,d,\#\}, \delta, q, \#, \{r\})$

δ:

$$\left.\begin{array}{l}\delta(q,a,\varepsilon) = \{(q,a)\}\\ \delta(q,b,\varepsilon) = \{(q,b)\}\\ \delta(q,c,\varepsilon) = \{(q,c)\}\\ \delta(q,d,\varepsilon) = \{(q,d)\}\end{array}\right\}\text{ PŘESUN}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta(q,\varepsilon,AB) = \{(q,S)\}\\ \delta(q,\varepsilon,aAb) = \{(q,A)\}\\ \delta(q,\varepsilon,ab) = \{(q,A)\}\\ \delta(q,\varepsilon,cBd) = \{(q,B)\}\\ \delta(q,\varepsilon,cd) = \{(q,B)\}\end{array}\right\}\text{ REDUKCE}$$

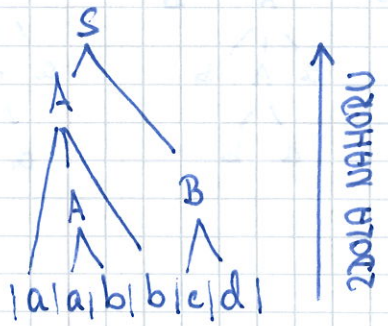
$$\delta(q,\varepsilon,\#S) = \{(r,\varepsilon)\} \quad \}\text{ PŘIJETÍ}$$

$(q, aabbcd, \#) \vdash (q, abbcd, \#a) \vdash (q, bbcd, \#aa)$
$\vdash (q, bcd, \#a\underset{\sim}{ab}) \vdash \underset{(3)}{(q, bcd, \#aA)} \vdash (q, cd, \#\underset{\sim}{aAb}) \vdash$
$\vdash \underset{(2)}{(q, cd\#A)} \vdash (q, d, \#Ac) \vdash (q, \varepsilon \#A\underset{\sim}{cd}) \vdash \underset{(5)}{(q, \varepsilon, \#AB)}$
$\vdash \underset{(1)}{(q, \varepsilon, \#S)} \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$

vrchol zásobníku vpravo!

pravý rozklad: 3 2 5 1 - obrácená posloupnost pravidel použitých při pravé derivaci

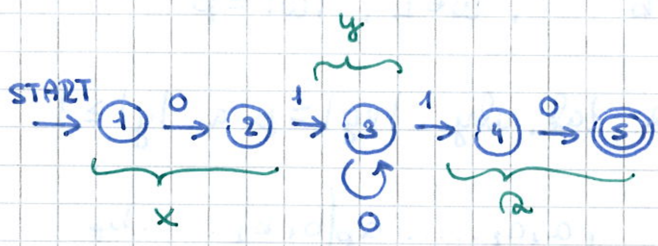
$$S \overset{1}{\Rightarrow} AB \overset{5}{\Rightarrow} Acd \overset{2}{\Rightarrow} aAbcd \overset{3}{\Rightarrow} aabbcd$$



Příklad 10.1

$$L = \{ 010^n10 : n \geq 0 \}$$

KA :



$p \geq 1$ a $\forall w \in L, |w| \geq p$ musí splňovat $\exists xyz : w = xyz, |xy| \leq p, |w| \geq 1 :$

$\forall i \geq 0 : xy^iz \in L$

$w \in L$: 0110
01010
010010
0100010
⋮

nejmenší možné p:

$p = 5$ pak $\forall w \in L, |w| \geq 5$ $\exists xyz : w = xyz, |xy| \leq 5, |w| \geq 1,$
$\forall i \geq 0 \; xy^iz \in L$

$p = 4 \; (3,2,1)$ pak $\forall w \in L, |w| \geq 4_{(3,2,1)}$ .....

neplatí pro $w = 0110$

Příklad 10.2

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

- předpokládáme, že L je regulární
- $w = a^p b^p$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$ a $|y| \geq 1$

$w: \underbrace{a_1 a_2 \ldots\ldots a_p}_{\text{max } xy} \underbrace{b_1 b_2 \ldots\ldots b_p}_{z}$

z může obsahovat jenom symboly b nebo také nejprve symboly a a potom b

$x = a^l$ $l + k \leq p$
$y = a^k$ $k \geq 1$
$z = a^j b^p$ $j \geq 0$
$l + k + j = p$

- volím $i = 0$ $\quad w = xy^0z = a^l (a^k)^0 a^j b^p = a^{l+j} b^p \notin L$

  protože $l + k + j = p \wedge k \geq 1 \Rightarrow l + j < p$

  $\Rightarrow$ spor s předpokladem

  DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.3

$L = \{ a^n b^n : n \geq 1 \}$

- předpokládáme, že L je regulární
- $w = a^p b^p$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$ a $|y| \geq 1$

$$w: \underbrace{a_1 a_2 \ldots a_p}_{\max xy} \mid b_1 b_2 \ldots b_p$$

z

$$x = a^l \qquad l + k \leq p$$
$$y = a^k \qquad k \geq 1$$
$$z = a^j b^p \qquad l + k + j = p$$

- volím $i = 0$ $\quad w = xy^0z = a^l (a^k)^0 a^j b^p = a^{l+j} b^p \notin L$

  protože $l + k + j = p \wedge k \geq 1 \Rightarrow l + j < p$

  $\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.4

$L = \{ 0^{k^2} : k \geq 1 \}$

$k=1 \quad 0^1 = 0$
$k=2 \quad 0^4 = 0000$
$k=3 \quad 0^9 = 000\,000\,000$
$\vdots$

- předpokládáme, že L je regulární
- $w = 0^{p^2}$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$ a $|y| \geq 1$

$w: \; \underbrace{0_1 0_2 \dots 0_p}_{\text{max } xy} \mid \underbrace{0_{p+1} 0_{p+2} \dots 0_{p^2}}_{z}$

$x = 0^l$ $\quad l+k \leq p$
$y = 0^k$ $\quad l+k+j = p$
$z = 0^j 0^{p^2-p}$ $\quad k \geq 1$
$\quad j \geq 0$

- $i = 0$ $\quad w = xy^0z = 0^l 0^j 0^{p^2-p} = 0^{l+j+p^2-p} \overset{?}{=} 0^{r^2}$ $\quad r \geq 0$
- $i = 1$ $\quad w = xy^1z = 0^l 0^k 0^j 0^{p^2-p} = 0^{p+p^2-p} = 0^{p^2} \in L$
- $i = 2$ $\quad w = xy^2z = 0^l 0^k 0^k 0^j 0^{p^2-p} = 0^k \underbrace{0^p 0^{p^2-p}}_{0^{p^2}} = 0^{k+p^2} \notin L$

protože $0^{k+p^2} \neq 0^{r^2}$ pro žádné r

neboť

$p^2 < k+p^2 < (p+1)^2$
$k \geq 1 \qquad p^2+2p+1$

$0 < k < 2p+1$

$k = p-l-j$ $\quad k \geq 1$
$l+k \leq p$

nemůže být čtverec, neboť je mezi dvěma po sobě jdoucími čtverci

=> spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.5

$$L = \{ a^m b^n : 0 \leq m < n \}$$

snažíme se během důkazu použít závislost $m<n$ (volíme větší i, abychom pumpovali větší počet a)

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $w = a^p b^{p+1}$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$ a $|y| \geq 1$

$w: \underbrace{a_1 a_2 \ldots\ldots a_p}_{\text{max } xy} b_1 b_2 \ldots b_p b_{p+1}$

z

$x = a^l$ $\quad$ $l+k \leq p$

$y = a^k$ $\quad$ $l+k+j = p$

$z = a^j b^{p+1}$ $\quad$ $k \geq 1$

$\quad$ $j \geq 0$

- $i = 0$ $\quad w = xy^0z = a^l a^j b^{p+1} \in L$

$l+k+j = p \wedge k \geq 1 \Rightarrow l+j < p+1$

- $i = 2$ $\quad w = xy^2z = a^l a^k a^k a^j b^{p+1} = a^p a^k b^{p+1} \notin L$

protože $p+k \geq p+1 \quad |-p$

$k \geq 1$ (pravda)

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.6

$$L = \{ a^m b^n : \underset{\sim\sim}{m > n} \geq 0 \}$$

budeme se snažit porušit závislost
(méně symbolů a než b)

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $w = a^p b^{p-1}$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$ a $|y| \geq 1$

w: $\underbrace{a_1 a_2 \ldots\ldots a_p}_{\text{max } xy} \underbrace{b_1 b_2 \ldots\ldots b_{p-1}}_{z}$

$x = a^l$
$y = a^k$
$z = a^j b^{p-1}$

$l + k + j = p$
$k \geq 1$

- volíme $i = 0$ $w = xy^0z = a^l a^j b^{p-1} \notin L$

protože $l + k + j = p \wedge k \geq 1 \Rightarrow l + j \leq p - 1$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.7

$$L = \{ a^m b^n : \underbrace{m+1 > n}_{} \geq 0 \}$$

$m = n$ nebo $m > n$ pak $m+1 > n$

$p \quad p \qquad p \quad p-1$

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $w = a^p b^{p-1}$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$ a $|y| \geq 1$

w: $\underbrace{a_1 a_2 \ldots\ldots a_p}_{\text{max } xy} \underbrace{b_1 b_2 \ldots\ldots b_{p-1}}_{z}$

$x = a^l$ $\qquad l+k+j = p$
$y = a^k$ $\qquad k \geq 1$
$z = a^j b^{p-1}$

kdyby ano, pak $w \in L$

- volíme $i = 0$ $\qquad w = xy^0z = a^l a^j b^{p-1}$ $\qquad l+j > p-1$?

$l+k+j = p \land k \geq 1 \Rightarrow l+j+1 \not> p$

nebot $l+j+1 \leq p$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.8

$L = \{ ww : w \in \{0,1\}^* \}$

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $w = 10^p10^p$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$ a $|y| \geq 1$

$w: \underbrace{1\,0_1 0_2 \dots}_{\max xy} 0_p \underbrace{1\,0_1 0_2 \dots\dots 0_p}_{z}$

I. $x = \varepsilon$
$y = 10^l$ $\quad l + j = p$
$z = 0^j10^p$

$i = 0 \quad w = xy^0z = 0^j10^p \notin L$

např. polovině je tam pouze jeden symbol 1

II. $x = 10^k$
$y = 0^l$ $\quad k + l + j = p$
$z = 0^j10^p$ $\quad l \geq 1$

$i = 0 \quad w = xy^0z = 10^k0^j10^p \notin L$

$k + l + j = p \wedge l \geq 1 \Rightarrow k + j < p$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.9

$L = \{ a^m b^n c^k a^l \cdot m \geq 1, k \geq 0, n \geq l \geq 0 \}$

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $w = ab^p a^p$, $|w| \geq p$, $w \in L$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| = p$, $|y| \geq 1$

$w: \underbrace{a b_1 b_2 \ldots}_{\text{max } xy} b_p a_1 a_2 \ldots a_p$

z

I. $x = \varepsilon$, $y = ab^l$, $z = b^k a^p$, $l + k = p$, $l \geq 0$

$i = 0$ $w = xy^0z = b^k a^p \notin L$

protože slovo musí minimálně jedno 'a' na začátku

II. $x = ab^k$, $y = b^l$, $z = b^j a^p$, $k + l + j = p$, $l \geq 1$

$i = 0$ $w = xy^0z = ab^k b^j a^p \notin L$

protože $k + l + j = p \wedge l \geq 1 \Rightarrow k + j < p$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.10

$$L = \{ a^m b^n c^k a^l : m \geq 0,\ 1 \leq n \leq l,\ k \geq 1 \}$$

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $w = b^p c a^p$, $w \in L$, $|w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$

$$w: \quad \underbrace{b_1 b_2 b_3 \ldots\ldots b_p}_{\text{max } xy} \underbrace{c\, a_1 a_2 \ldots\ldots a_p}_{z}$$

$$x = b^k \qquad y = b^l \qquad z = b^j c a^p \qquad l \geq 1,\ k + l + j = p$$

$i = 2$ $\quad w = xy^2z = b^k b^l b^l b^j c a^p = b^p b^l c a^p \notin L$

protože $l \geq 1 \Rightarrow p + l > p$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.11

$L =$ jazyk všech palindromů

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $\quad w = 0^p 1 0^p \quad , \ w \in L, \ |w| \geq p$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p, \ |y| \geq 1$

$$w: \ \underbrace{0_1 0_2 0_3 \ldots\ldots 0_p}_{\max xy} 1 \underbrace{0_1 0_2 0_3 \ldots\ldots 0_p}_{z}$$

$$x = 0^k \qquad\qquad k+l+j = p \ , \ l \geq 1$$
$$y = 0^l$$
$$z = 0^j 1 0^p$$

volím $i = 2 \qquad w = xy^2z = 0^k 0^l 0^l 0^j 1 0^p = 0^p 0^l 1 0^p \notin L$

protože

$$k+l+j = p \ \wedge \ l \geq 1 \ \Rightarrow \ p+l > p$$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

Příklad 10.12 PRO ZAJÍMAVOST

$$L = \{a^m b^n : m \neq n\}$$

- předpokládáme, že L je regulární
- volíme $\underline{w = a^p b^{p+p!}}$
- $w = xyz$ tak, aby $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$

$$w: \underbrace{a_1 a_2 \dots\dots a_p}_{\text{max } xy} \underbrace{b_1 b_2 \dots b_{p+p!}}_{z}$$

$x = a^l$ $\quad l + k + j = p$

$y = a^k$ $\quad k \geq 1$

$z = a^j \; b^{p+p!}$

- volíme $\underline{i = 1 + \frac{p!}{k}}$

$$w = xy^iz = a^l (a^k)^{1+\frac{p!}{k}} \; a^j \; b^{p+p!} =$$

$$= a^l a^k a^{p!} a^j b^{p+p!}$$

$$= a^{p+p!} \; b^{p+p!}$$

exponenty se rovnají $\Rightarrow$ $w \notin L$

$\Rightarrow$ spor s předpokladem

DANÝ JAZYK TEDY NENÍ REGULÁRNÍ

cvičení č.11

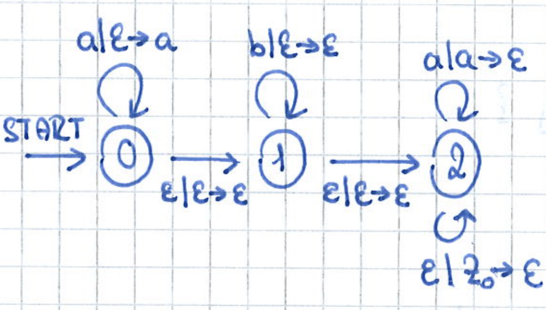
Příklad 11.1 - viz 9.7

Příklad 11.2

- $L_1 = \{a^n b^m a^n \mid m,n \geq 0\}$

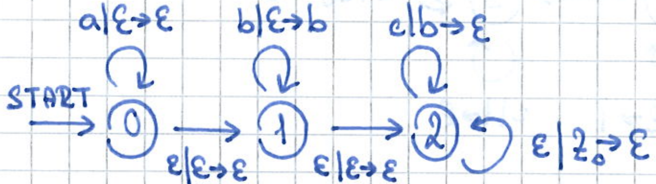
intuitivní návrh

sestavení gramatika a ZA jako model syn. analyzátoru pro metodu shora dolů nebo zdola nahoru



$$\begin{array}{l} \quad Q \qquad\quad T \qquad\quad \Gamma \qquad \delta \;\; q_0 \;\; Z_0 \;\; F \\ R = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \{Z_0,a\}, \delta, 0, Z_0, \emptyset) \end{array}$$

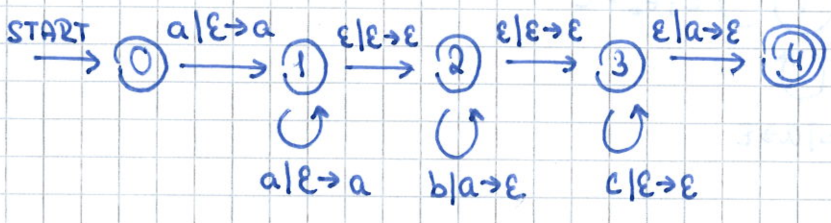
- $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid m,n \geq 0\}$



$$\begin{cases} \delta(0,a,\varepsilon) = (0,\varepsilon) \\ \delta(0,\varepsilon,\varepsilon) = (1,\varepsilon) \\ \delta(1,b,\varepsilon) = (1,b) \\ \delta(1,\varepsilon,\varepsilon) = (2,\varepsilon) \\ \delta(2,c,b) = (2,\varepsilon) \\ \delta(2,\varepsilon,Z_0) = (2,\varepsilon) \end{cases}$$

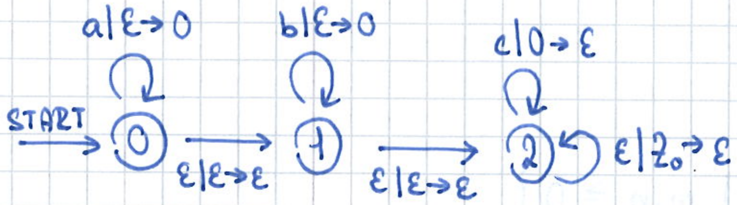
$R = (\{0,1,2\}, \{a,b,c\}, \{Z_0,b\}, \delta, 0, Z_0, \emptyset\}$

- $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0,\ i > j\}$



$R = (\{0,1,2,3,4\}, \{a,b,c\}, \{Z_0,a\}, 0, Z_0, \{4\})$

• $L_4 = \{ a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \wedge i+j = k \}$



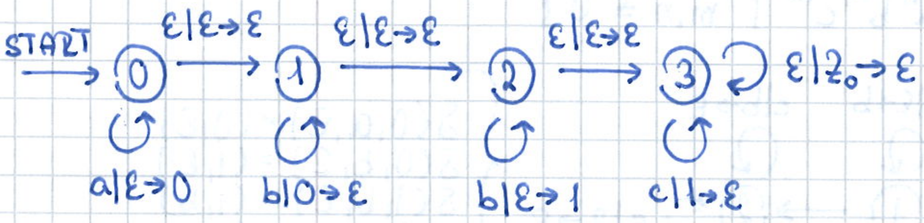
$R = (\{0,1,2\}, \{a,b,c\}, \{Z_0, 0\}, \delta, 0, Z_0, \emptyset)$

• $L_5 = \{ a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0,\ i+k = j \}$

$$\| $$

$a^i b^i b^k c^k$

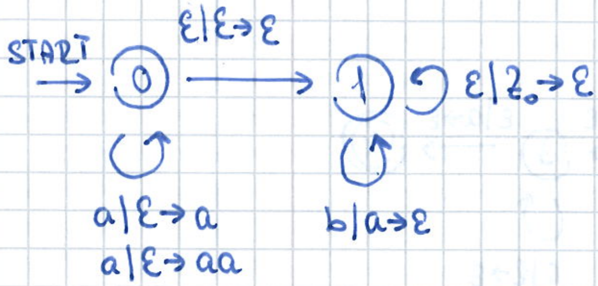
$R = (\{0,1,2,3\}, \{a,b,c\}, \{Z_0, 0, 1\}, \delta, 0, Z_0, \emptyset)$



• $L_6 = \{ a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n \}$

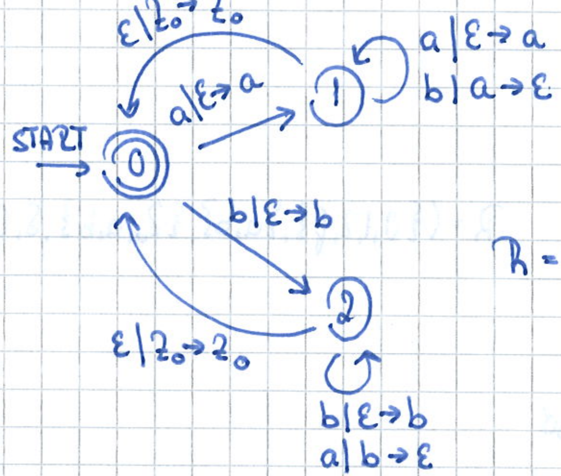
$$\|$$

$a^n b^n b^k \mid n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n$



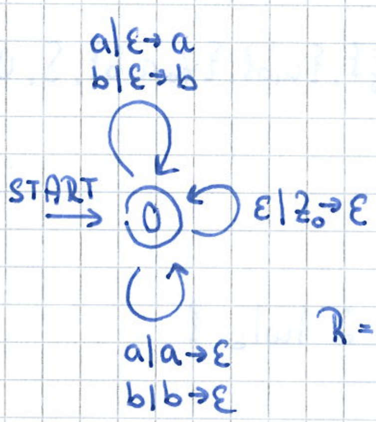
$R = (\{0,1\}, \{a,b\}, \{Z_0, a\}, \delta, 0, Z_0, \emptyset)$

• $L_7 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \}$



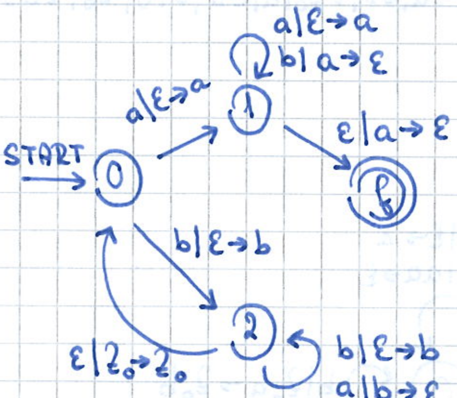
$R = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \{0\})$

nebo

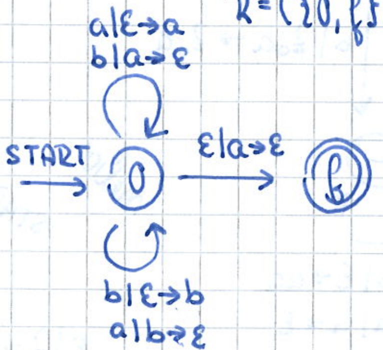


$R = (\{0\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \emptyset)$

• $L_8 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > |w|_b \}$



nebo

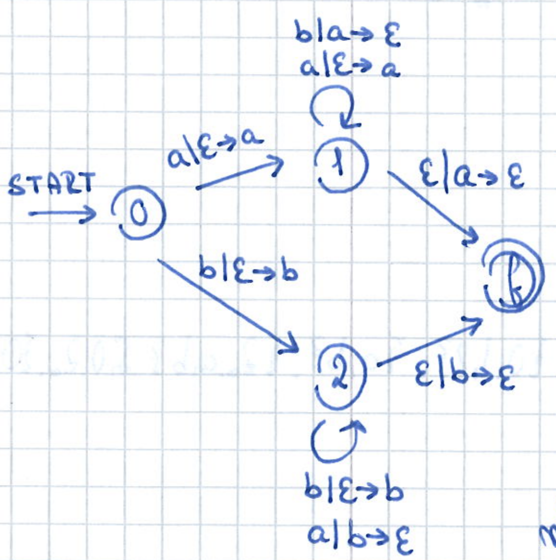


$R = (\{0,f\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \{f\})$

$R = (\{0,1,2,f\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \{f\})$

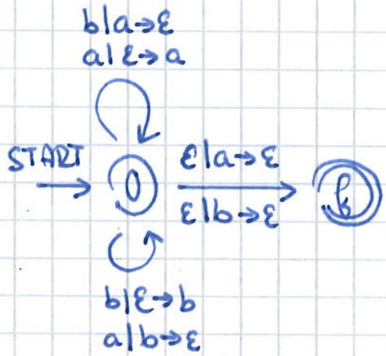
- $L_9 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b \}$

$\Rightarrow |w|_a > |w|_b \vee |w|_b > |w|_a$



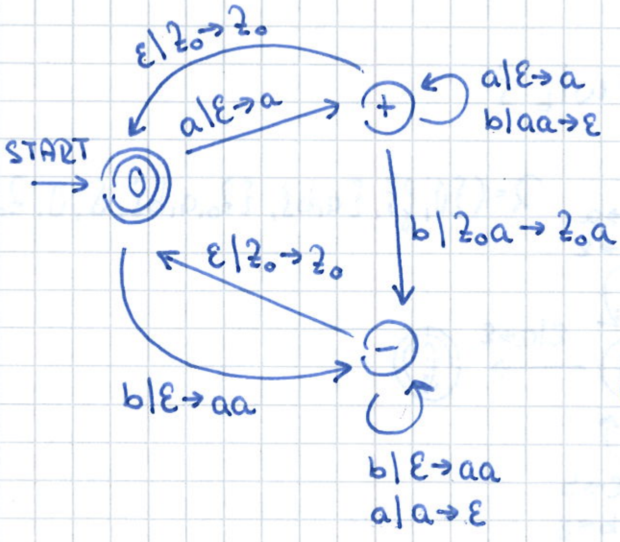
$R = (\{0,1,2,f\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \{f\})$

nebo



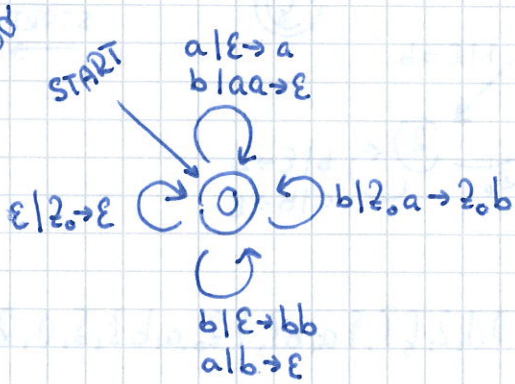
$R = (\{0,f\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \{f\})$

- $L_{10} = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 2|w|_b \}$



$R = (\{0,+,-\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \{0\})$

nebo



$R = (\{0\}, \{a,b\}, \{Z_0,a,b\}, \delta, 0, Z_0, \emptyset)$

Příklad 11.3

viz 10.10 a 10.8