Automaty a gramatiky (BI-AAG)

3. Operace s konečnými automaty

Jan Holub

Katedra teoretické informatiky

Fakulta informačních technologií

ČVUT v Praze

Vztah mezi DKA a NKA

Definice

Konečné automaty M_1 a M_2 nazýváme *ekvivalentní*, jestliže přijímají stejný jazyk, tj. $L(M_1) = L(M_2)$. $\square$

Věta

Každý konečný nedeterministický automat M může být převeden na ekvivalentní konečný deterministický automat M'. $\square$

Převod NKA na DKA

Algoritmus Převod NKA na DKA
Vstup: Konečný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$.
Výstup: Deterministický konečný automat $M' = (Q', T, \delta', q_0', F')$ takový, že $L(M) = L(M')$.
Metoda:

1. $Q' = \{\{q_0\}\}$, stav $\{q_0\}$ bude neoznačený.
2. Jestliže v Q' všechny stavy označeny, pokračuj krokem 4.
3. Vybereme z Q' neoznačený stav q' a provedeme:
   (a) Určíme $\delta'(q', a) = \bigcup_{p \in q'} \delta(p, a)$, $\forall a \in T$,
   (b) $Q' = Q' \cup \{\delta'(q', a)\}$, $\forall a \in T$,
   (c) stav $q' \in Q'$ označíme,
   (d) pokračujeme krokem 2.
4. $q_0' = \{q_0\}$.
5. $F' = \{q' : q' \in Q', q' \cap F \neq \emptyset\}$. $\square$

Převod NKA na DKA

Příklad

	δ_M	0	1
$\rightarrow$	q	$\{q, q_0\}$	$\{q, q_1\}$
	q_0	$\{q_0, q_f\}$	$\{q_0\}$
	q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_f\}$
$\leftarrow$	q_f	$\emptyset$	$\emptyset$

	$\delta_{M'}$	0	1
$\rightarrow$	$[q]$	$[q, q_0]$	$[q, q_1]$
	$[q, q_0]$	$[q, q_0, q_f]$	$[q, q_0, q_1]$
	$[q, q_1]$	$[q, q_0, q_1]$	$[q, q_1, q_f]$
$\leftarrow$	$[q, q_0, q_f]$	$[q, q_0, q_f]$	$[q, q_0, q_1]$
$\leftarrow$	$[q, q_1, q_f]$	$[q, q_0, q_1]$	$[q, q_1, q_f]$
	$[q, q_0, q_1]$	$[q, q_0, q_1, q_f]$	$[q, q_0, q_1, q_f]$
$\leftarrow$	$[q, q_0, q_1, q_f]$	$[q, q_0, q_1, q_f]$	$[q, q_0, q_1, q_f]$

Převod NKA na DKA

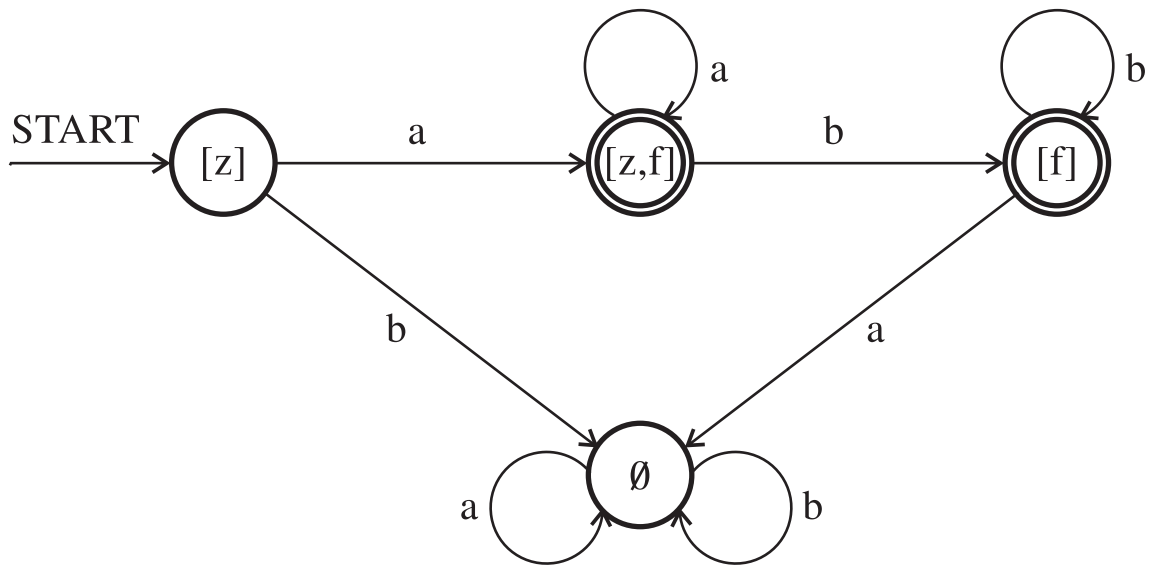
- Jak velký může být výsledný DKA?

Převod NKA na DKA

Příklad $M = (\{z, f\}, \{a, b\}, \delta, z, \{f\})$, kde δ:

δ	a	b
z	$\{z, f\}$	$\emptyset$
f	$\emptyset$	$\{f\}$

DKA $M' = (\{[z], [f], [z, f]\}, \{a, b\}, \delta', [z], \{[f], [z, f]\})$, kde δ':

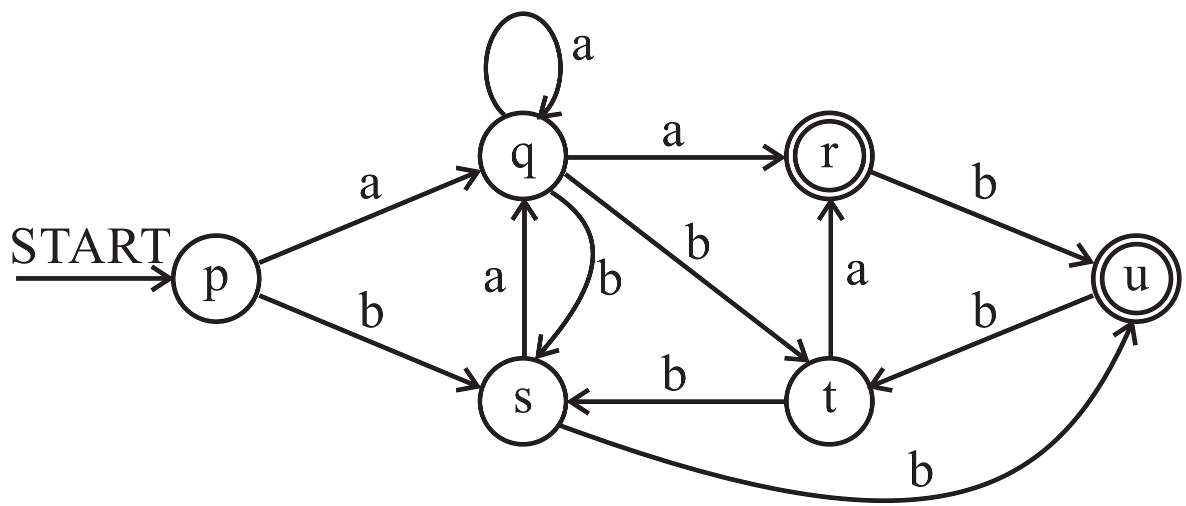


δ'	a	b
$[z]$	$[z, f]$	$\emptyset$
$[z, f]$	$[z, f]$	$[f]$
$[f]$	$\emptyset$	$[f]$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Homogenní konečný automat

Definice (Množiny cílových stavů)
$M = (Q, T, \delta, q_0, F)$. Pro libovolné $a \in T$ definujeme množinu cílových stavů pro symbol $a \in T$ a $Q(a) \subseteq Q$ takto:
$Q(a) = \{q : q \in \delta(p, a), a \in T, p, q \in Q\}$. □

Definice (Homogenní konečný automat)
$M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ a $Q(a)$ jsou množiny cílových stavů $\forall a \in T$.
Jestliže pro všechny dvojice symbolů $a, b \in T$, $a \neq b$, platí
$Q(a) \cap Q(b) = \emptyset$, pak se automat M nazývá *homogenní*. □



$$
\begin{aligned}
Q(a) &= \{q, r\} \\
Q(b) &= \{s, t, u\}
\end{aligned}
$$

Homogenní konečný automat

Pro homogenní konečný automat je soubor množin $\{Q(a) : a \in T\}$ rozklad množiny stavů Q na třídy, který může mít jeden z těchto dvou tvarů:

1. $$Q = \bigcup_{a \in T} Q(a) \cup \{q_0\}$$

   v případě, že $q_0 \notin \delta(q, a)$ pro žádné $q \in Q$ a žádné $a \in T$,

2. $$Q = \bigcup_{a \in T} Q(a)$$

   v případě, že $q_0 \in \delta(q, a)$ pro nějaké $q \in Q, a \in T$.
   V tomto případě $q_0 \in Q(a)$.

Homogenní konečný automat

Věta

Nechť $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ je homogenní nedeterministický konečný automat. Pak počet stavů ekvivalentního deterministického konečného automatu $M' = (Q', T, \delta', q_0', F')$ získaného standardním postupem je dán vztahem:

$$|Q'| \leq \sum_{a \in T} (2^{|Q(a)|}) - |T| + 1.$$

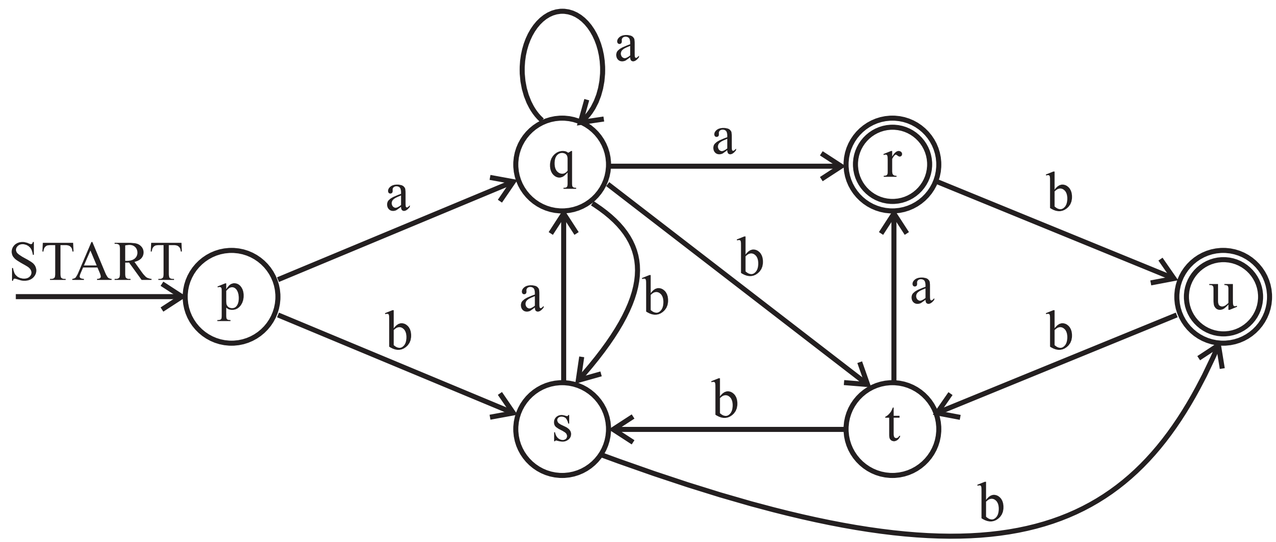
$\square$

Homogenní konečný automat

Příklad

Je dán homogenní nedeterministický konečný automat
$M = (\{p, q, r, s, t, u\}, \{a, b\}, \delta, p, \{r, u\})$, kde δ:

	a	b
p	q	s
q	q, r	s, t
r		u
s	q	u
t	r	s
u		t



Homogenní konečný automat

Příklad (pokračování)

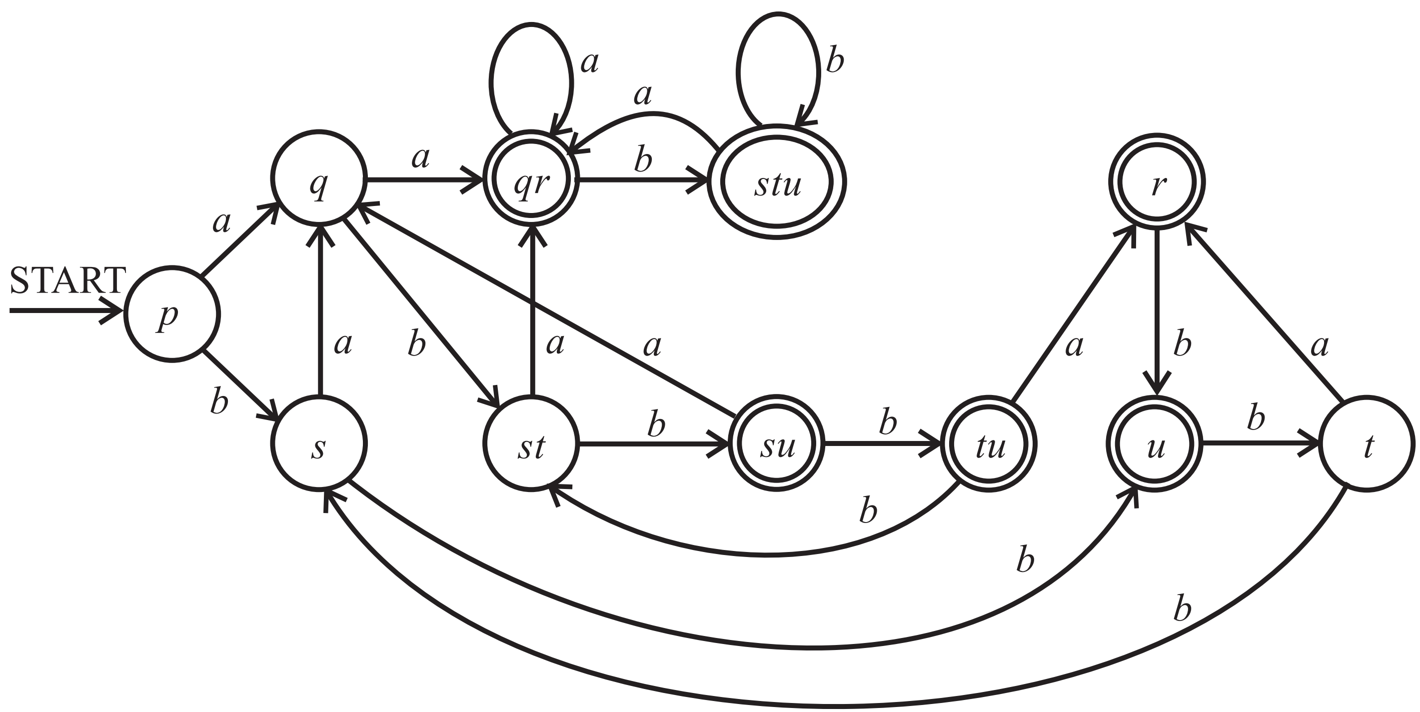
$Q(a) = \{q, r\},\ Q(b) = \{s, t, u\}$

$Q(a) \cap Q(b) = \emptyset$ proto DKA pro $M = (Q', T, \delta', q_0, F')$

$|Q'| \leq 2^{|Q(a)|} + 2^{|Q(b)|} - |T| + 1 = 2^2 + 2^3 - 2 + 1 = 4 + 8 - 2 + 1 = 11$

Ekvivalentní deterministický konečný automat je $M' = (\{p, q, qr, s, t, st, stu, u, su, t, tu\}, \{a, b\}, \delta, p, \{r, qr, u, su, tu, stu\})$, kde δ:

	a	b
p	q	s
q	qr	st
s	q	u
qr	qr	stu
st	qr	su
u		t
stu	qr	stu
su	q	tu
t	r	s
tu	r	st
r		u



KA a sjednocení jazyků

Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro sjednocení jazyků – ε-přechody.
Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.
Výstup: Konečný automat M, $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.
Metoda:

1. $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1),\ M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
2. $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$:
   (a) $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\},\ q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$,
   (b) $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_{01}, q_{02}\}$,
   $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$, $\forall q \in Q_1$, $\forall a \in T$,
   $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$, $\forall q \in Q_2$, $\forall a \in T$.
3. $F = F_1 \cup F_2$.

KA a sjednocení jazyků

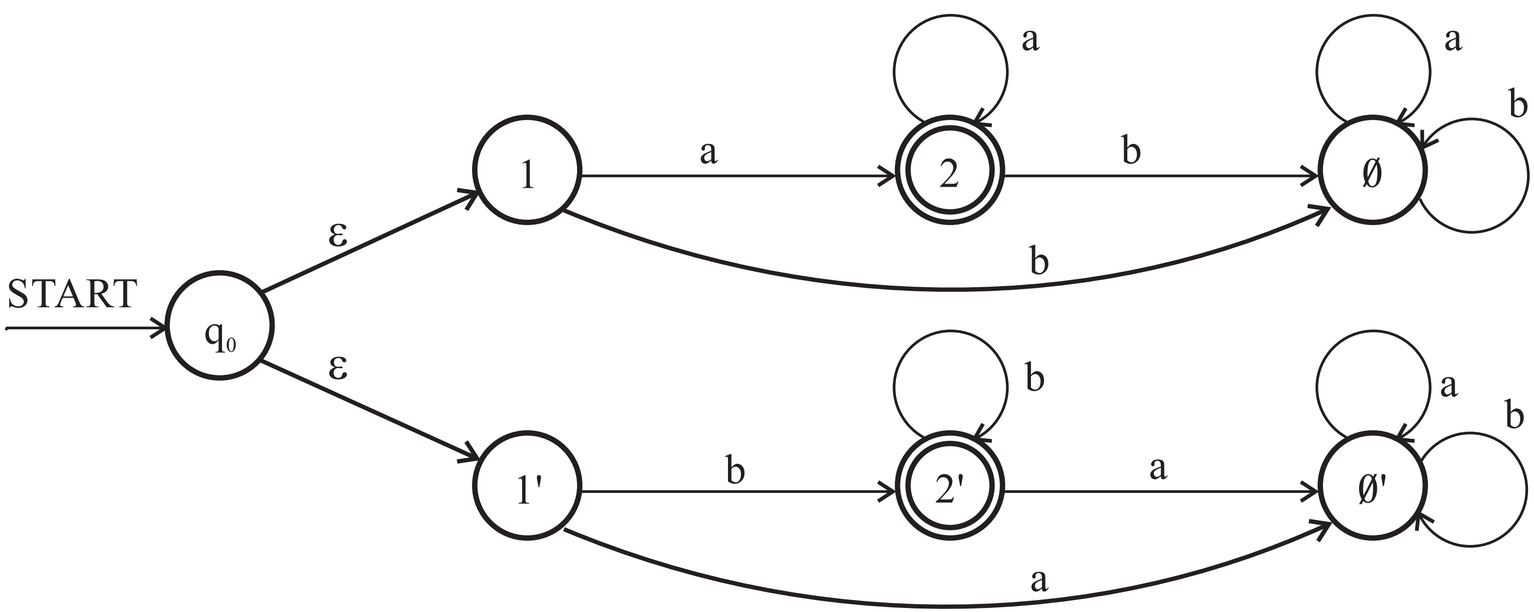
Příklad

$M_1 = (\{1, 2, \emptyset\}, \{a, b\}, \delta_1, 1, \{2\}), L(M_1) = \{a^+\}$

$M_2 = (\{1', 2', \emptyset'\}, \{a, b\}, \delta_2, 1', \{2'\}), L(M_2) = \{b^+\}$

	δ_1	a	b
$\rightarrow$	1	2	$\emptyset$
$\leftarrow$	2	2	$\emptyset$
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	δ_2	a	b
$\rightarrow$	$1'$	$\emptyset'$	$2'$
$\leftarrow$	$2'$	$\emptyset'$	$2'$
	$\emptyset'$	$\emptyset'$	$\emptyset'$



KA a sjednocení jazyků

Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro sjednocení jazyků – paralelní činnost.

Vstup: Dva úplně určené konečné automaty M_1 a M_2.

Výstup: Konečný automat M, který přijímá jazyk $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

Metoda: Označíme $M = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.

Automat M je definován takto:

$M = (Q_1 \times Q_2, T, \delta, (q_{01}, q_{02}), (F_1 \times Q_2) \cup \ (Q_1 \times F_2))$, kde δ:

$\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ pro $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

KA a sjednocení jazyků

Příklad

$M_1 = (\{1, 2, \emptyset\}, \{a, b\}, \delta_1, 1, \{2\}),\ L(M_1) = \{a^+\}$

$M_2 = (\{1', 2', \emptyset'\}, \{a, b\}, \delta_2, 1', \{2'\}),\ L(M_2) = \{b^+\}$

	δ_1	a	b
$\rightarrow$	1	2	$\emptyset$
$\leftarrow$	2	2	$\emptyset$
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	δ_2	a	b
$\rightarrow$	$1'$	$\emptyset'$	$2'$
$\leftarrow$	$2'$	$\emptyset'$	$2'$
	$\emptyset'$	$\emptyset'$	$\emptyset'$

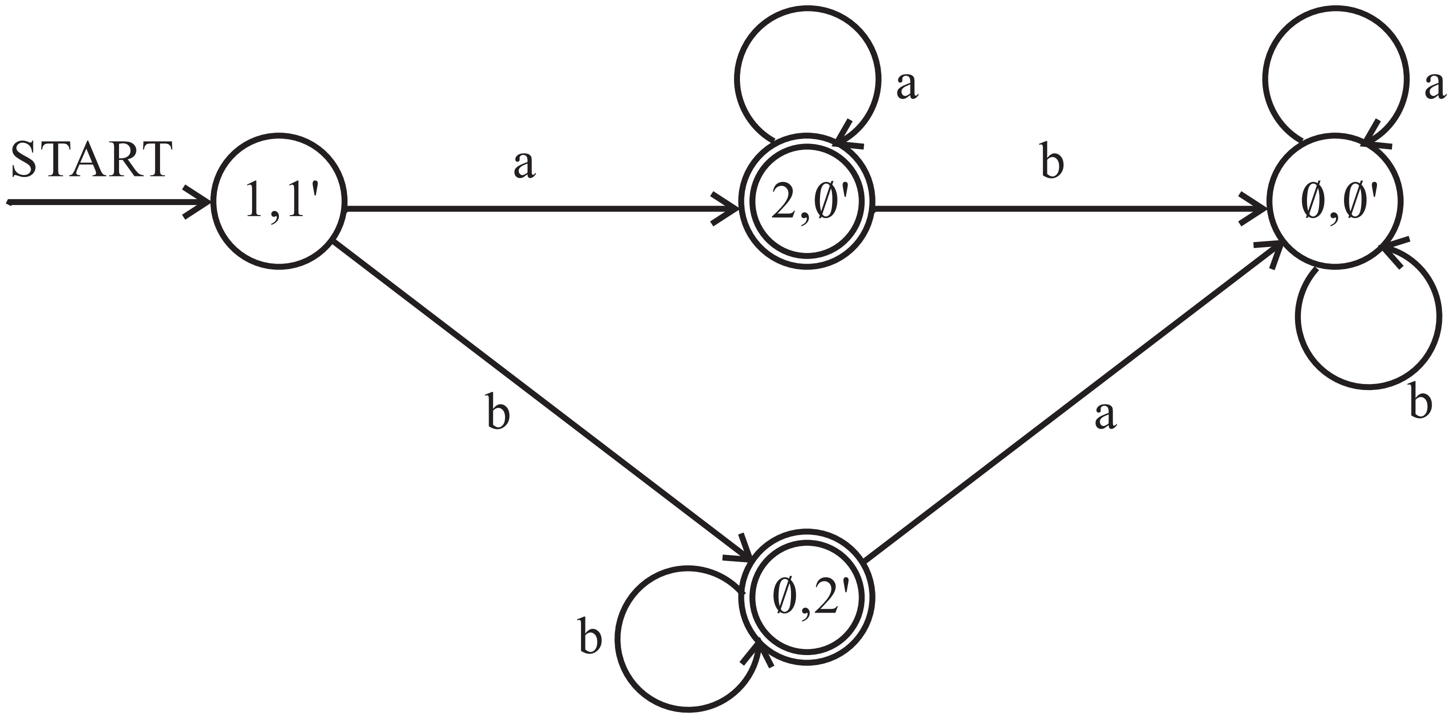
$L(M) = \{a^+ \cup b^+\}$

$M = (\{(1, 1'), (2, \emptyset'), (\emptyset, 2'), (\emptyset, \emptyset')\}, \{a, b\}, \delta, (1, 1'), \{(2, \emptyset'), (\emptyset, 2')\})$

	δ	a	b
$\rightarrow$	$(1, 1')$	$(2, \emptyset')$	$(\emptyset, 2')$
$\leftarrow$	$(2, \emptyset')$	$(2, \emptyset')$	$(\emptyset, \emptyset')$
$\leftarrow$	$(\emptyset, 2')$	$(\emptyset, \emptyset')$	$(\emptyset, 2')$
	$(\emptyset, \emptyset')$	$(\emptyset, \emptyset')$	$(\emptyset, \emptyset')$

KA a sjednocení jazyků

Příklad (pokračování)



KA a průnik jazyků

Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro průnik jazyků – paralelní činnost.

Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.

Výstup: Automat M přijímající jazyk $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$

Metoda:

1. $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1), M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
2. Výsledný automat M:
   $M = (Q_1 \times Q_2, T, \delta, (q_{01}, q_{02}), F_1 \times F_2)$, kde δ:
   $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) \ \forall (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

KA a průnik jazyků

Příklad

M: $L(M) = \{w : w \in \{a,b\}^*, aba$ předpona w, bab přípona $w\}$.

M_1 přijímá řetězce začínající předponou aba,

$M_1 = (\{1,2,3,4,\emptyset\}, \{a,b\}, \delta_1, 1, \{4\})$

M_2 přijímá řetězce končící příponou bab,

$M_2 = (\{1',2',3',4'\}, \{a,b\}, \delta_2, 1', \{4'\})$

	δ_1	a	b
$\rightarrow$	1	2	$\emptyset$
	2	$\emptyset$	3
	3	4	$\emptyset$
$\leftarrow$	4	4	4
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	δ_2	a	b
$\rightarrow$	$1'$	$1'$	$2'$
	$2'$	$3'$	$2'$
	$3'$	$1'$	$4'$
$\leftarrow$	$4'$	$3'$	$2'$

KA a průnik jazyků

Příklad (pokračování)

$M = (\{(1,1'),(2,1'),(3,2'),(4,1'),(4,2'),(4,3'),(4,4'),(\emptyset,1'),(\emptyset,2'),(\emptyset,3'),(\emptyset,4')\},\{a,b\},\delta,(1,1'),\{(4,4')\})$

	δ	a	b
$\rightarrow$	$(1,1')$	$(2,1')$	$(\emptyset,2')$
	$(2,1')$	$(\emptyset,1')$	$(3,2')$
	$(\emptyset,1')$	$(\emptyset,1')$	$(\emptyset,2')$
	$(\emptyset,2')$	$(\emptyset,3')$	$(\emptyset,2')$
	$(\emptyset,3')$	$(\emptyset,1')$	$(\emptyset,4')$
	$(\emptyset,4')$	$(\emptyset,3')$	$(\emptyset,2')$
	$(3,2')$	$(4,3')$	$(\emptyset,2')$
	$(4,3')$	$(4,1')$	$(4,4')$
	$(4,1')$	$(4,1')$	$(4,2')$
	$(4,2')$	$(4,3')$	$(4,2')$
$\leftarrow$	$(4,4')$	$(4,3')$	$(4,2')$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

KA a průnik jazyků

Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro průnik jazyků – jen dosažitelné stavy.

Vstup: $M_1 = (Q_1, T, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T, \delta_2, q_{02}, F_2)$.

Výstup: $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = \{(q_{01}, q_{02})\}$, $Q_{\text{new}} = \{(q_{01}, q_{02})\}$.
2. Jestliže $Q_{\text{new}} = \{\}$, jdi na krok 4.
3. Vybereme $q = (q_{n1}, q_{m2})$ z Q_{new} a:
   (a) určíme $\delta((q_{n1}, q_{m2}), a) = (\delta_1(q_{n1}, a), \delta_2(q_{m2}, a)), \forall a \in T$,
   (b) jestliže oba přechody $\delta_1(q_{n1}, a)$ a $\delta_2(q_{m2}, a)$ definovány, nevedou do $\emptyset$ a $(\delta_1(q_{n1}, a), \delta_2(q_{m2}, a)) \notin Q$, pak $Q = Q \cup (\delta_1(q_{n1}, a), \delta_2(a_{m2}, a))$ a $Q_{\text{new}} = Q_{\text{new}} \cup (\delta_1(q_{n1}, a), \delta_2(a_{m2}, a))$
   (c) $Q_{\text{new}} = Q_{\text{new}} \setminus \{(q_{n1}, q_{m2})\}$
   (d) pokračujeme krokem 2.

KA a průnik jazyků

Algoritmus (pokračování):

2. $q_0 = (q_{01}, q_{02})$.
3. $F = \{q : q \in Q,\ q = (q_{n1}, q_{m2}),\ q_{n1} \in F,\ q_{m2} \in F\}$.

KA a doplněk jazyka

Konečný automat, který přijímá doplněk jazyka do T^*:

- $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ přijímá jazyk L.
- $M' = (Q, T, \delta, q_0, Q \setminus F)$ přijímá jazyk $T^* \setminus L$.

Automat M je úplně určený a deterministický.

KA a součin jazyků

Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro součin jazyků – ε-přechody.

Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.

Výstup: Konečný automat M, $L(M) = L(M_1).L(M_2)$.

Metoda:

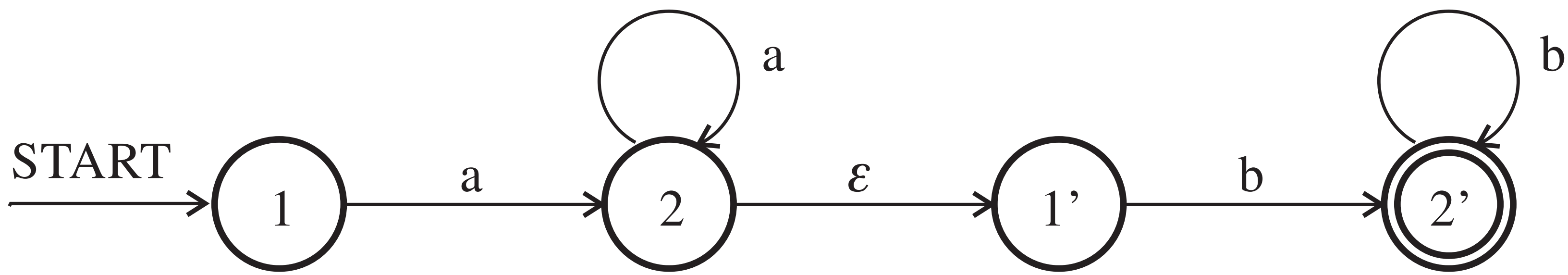
1. $M_1 = (Q_1, T_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
2. Výsledný automat $M = (Q, T, \delta, q_{01}, F_2)$ je zkonstruován takto:
   (a) $Q = Q_1 \cup Q_2$,
   (b) $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ pro všechna $q \in Q_1$ a $a \in T_1$,
   $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ pro všechna $q \in Q_2$ a $a \in T_2$,
   $\delta(q, \varepsilon) = q_{02}$ pro všechna $q \in F_1$.

KA a součin jazyků

Příklad

Sestrojíme konečný automat pro součin jazyků a^+ a b^+.

$$M = (\{1, 2, 1', 2'\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{2'\})$$



KA a součin jazyků

Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro součin jazyků – bez ε-přechodů.

Vstup: Dva konečné automaty M_1 a M_2.

Výstup: Konečný automat M, $L(M) = L(M_1).L(M_2)$.

Metoda:

1. $M_1 = (Q_1, T_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $M_2 = (Q_2, T_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$.
2. Sestrojíme NKA $M' = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, T_1 \cup T_2, \delta, q_0, F)$,

$$q_0 = \begin{cases} q_{01}, & \text{jestliže } q_{01} \notin F_1, \\ [q_{01}, q_{02}], & \text{jestliže } q_{01} \in F_1, \end{cases}$$

   (a) $\delta(q, x) = \delta_1(q, x)$, jestliže $q \in Q_1, \delta_1(q, x) \notin F_1$,
   (b) $\delta(q, x) = \delta_1(q, x) \cup \{q_{02}\}$, jestliže $q \in Q_1, \delta_1(q, x) \in F_1$,
   (c) $\delta(q, x) = \delta_2(q, x)$, jestliže $q \in Q_2$,
   (d) $\delta(q, x) = \delta_1(q_{01}, x) \cup \delta_2(q_{02}, x)$, jestliže $q = [q_{01}, q_{02}]$.
   (e) Jestliže $q_{01} \notin F_1$, pak $F = F_2$.
   Jestliže $q_{01} \in F_1$ a $q_{02} \in F_2$, pak $F = F_2 \cup \{[q_{01}, q_{02}]\}$.

KA a součin jazyků

Algoritmus (pokračování):

3. Sestrojíme deterministický konečný automat M.

KA a součin jazyků

Příklad

Sestrojíme automat, který přijímá jazyk a^+b^+.

$M_1 = (\{1, 2, \emptyset\}, \{a, b\}, \delta_1, 1, \{2\}), L(M_1) = \{a^+\}$
$M_2 = (\{1', 2', \emptyset'\}, \{a, b\}, \delta_2, 1', \{2'\}), L(M_2) = \{b^+\}$

	δ_1	a	b
$\rightarrow$	1	2	$\emptyset$
$\leftarrow$	2	2	$\emptyset$
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	δ_2	a	b
$\rightarrow$	$1'$	$\emptyset'$	$2'$
$\leftarrow$	$2'$	$\emptyset'$	$2'$
	$\emptyset'$	$\emptyset'$	$\emptyset'$

	δ	a	b
$\rightarrow$	1	$\{2, 1'\}$	$\emptyset$
	2	$\{2, 1'\}$	$\emptyset$
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$1'$	$\emptyset'$	$\{2'\}$
$\leftarrow$	$2'$	$\emptyset'$	$\{2'\}$
	$\emptyset'$	$\emptyset'$	$\emptyset'$

$M = (\{1, 2, \emptyset, 1', 2', \emptyset'\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{2'\})$.
Získaný NKA M převedeme na ekvivalentní DKA.

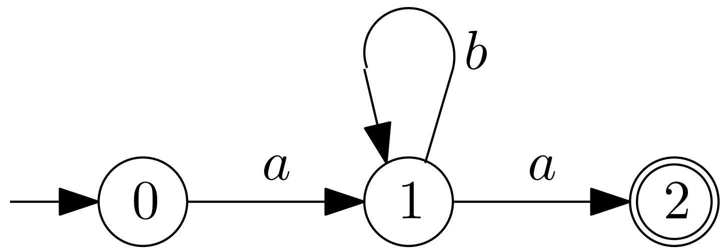
KA a iterace jazyka

Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro iteraci jazyka – s ε-přechody.
Vstup: Konečný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, který přijímá jazyk L.
Výstup: Konečný automat M^*, který přijímá jazyk L^*.
Metoda: Sestrojme konečný automat $M^* = (Q, T, \delta', q_0', F \cup \{q_0'\})$, kde zobrazení δ' je definováno takto:
$\delta'(q, x) = \delta(q, x)$ pro všechna $q \in Q$ a všechna $x \in T$,
$\delta'(q, \varepsilon) = \{q_0\}$ pro všechna $q \in F$,
$\delta'(q_0', \varepsilon) = \{q_0\}$.

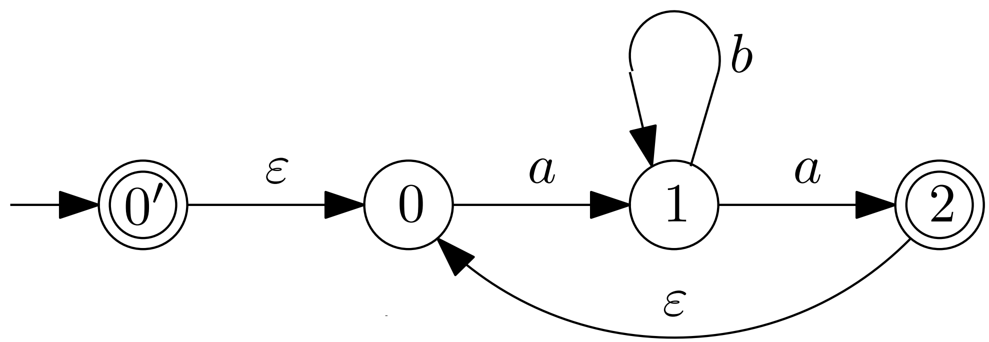
KA a iterace jazyka

Příklad

Sestrojíme konečný automat, který přijímá iteraci jazyka ab^*a. Je dán automat M, který přijímá všechny řetězce tvaru ab^*a.



Výsledný automat má tvar $M = (\{0', 0, 1, 2\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{0', 2\})$:



KA a iterace jazyka

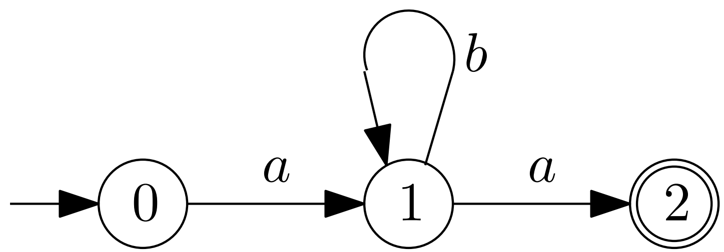
Algoritmus Konstrukce konečného automatu pro iteraci jazyka – bez ε-přechodů.
Vstup: Konečný automat $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$, který přijímá jazyk L.
Výstup: Konečný automat M^*, který přijímá jazyk L^*.
Metoda:

1. Sestrojíme nedeterministický konečný automat $M' = (Q, T, \delta', q'_0, F \cup \{q'_0\})$, kde zobrazení δ' je definováno takto:
   $\delta'(q'_0, x) = \delta(q_0, x)$.
   $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$ jestliže $q \in Q, \delta(q, x) \cap F = \emptyset$.
   $\delta'(q, x) = \delta(q, x) \cup \{q_0\}$ jestliže $q \in Q, \delta(q, x) \cap F \neq \emptyset$.
2. K automatu M' sestrojíme deterministický konečný automat M^*.

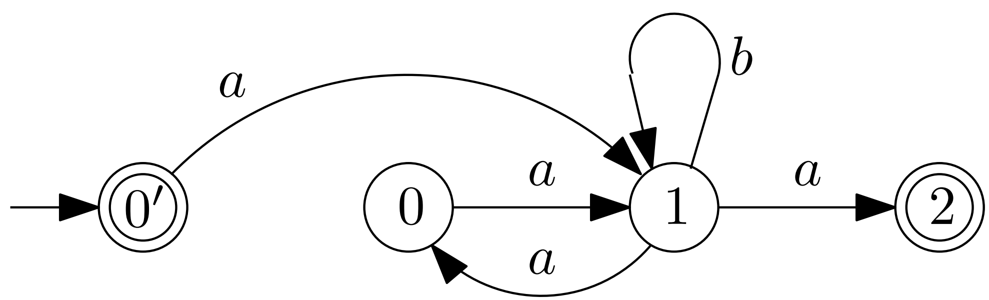
KA a iterace jazyka

Příklad

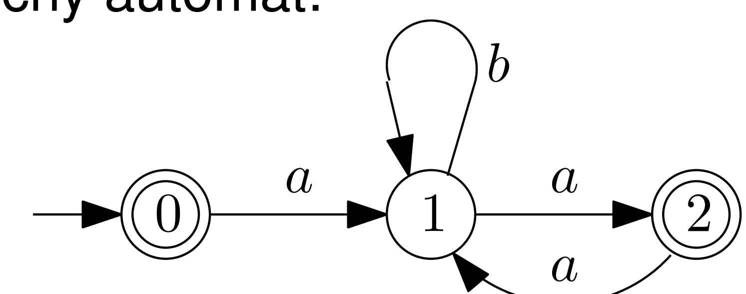
Je dán automat M, který přijímá všechny řetězce tvaru ab^*a.



Automat, který přijímá iteraci jazyka ab^*a, tj. jazyk $(ab^*a)^*$:



Deterministický konečný automat:



Minimalizace DKA

Algoritmus Minimalizace DKA

Vstup: DKA $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ bez zbytečných a nedosažitelných stavů, který přijímá jazyk L.

Výstup: Minimální DKA $M' = (Q_m, T, \delta_m, q_{0m}, F_m)$ jazyk L.

Metoda:

1. Rozděl stavy Q na dvě skupiny $Q_{\mathrm{I}} = Q \setminus F$, $Q_{\mathrm{II}} = F$.
2. Vytvoř tabulku δ', kde pro každý stav $q \in Q$ je jeden řádek $\delta'(Q_i, a) = Q_j$, $q \in Q_i, \delta(q, a) \in Q_j, \forall a \in T$. (V tabulce nahraď stavy skupinami, do kterých náleží.)
3. Jestliže v nějaké skupině Q_i nejsou všechny řádky stejné, rozděl tuto skupinu tak, aby každá měla shodné řádky pro všechny své členy.
4. Pokračuj bodem 2 dokud se skupiny dělí.
5. Q_m jsou všechny vytvořené skupiny, F_m jsou všechny vytvořené skupiny koncových stavů, δ_m je poslední tabulka vzniklá v bodě 2, q_{0m} je skupina obsahující q_0.

Minimalizace DKA

Příklad

Minimalizujte následující DKA.

	stav	vstupní symbol	
	δ	a	b
$\rightleftarrows$	q_0	q_5	q_1
	q_1	q_4	q_3
	q_2	q_2	q_5
	q_3	q_3	q_0
	q_4	q_1	q_2
$\leftarrow$	q_5	q_0	q_4