Matematická logika
Přednáška č. 10

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Domácí úkol

Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí

$$((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x)) \models (\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x))$$

$$((\forall x)\neg p(x) \vee (\exists x)q(x)) \models (\exists x)(\neg p(x) \vee q(x))$$

$$((\forall x)\neg p(x) \vee (\exists x)q(x)) \wedge (\forall x)(p(x) \wedge \neg q(x))$$

$$((\forall x)\neg p(x) \vee (\exists x)q(x)) \wedge (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)\neg q(x)$$

Kontradikce. Tedy se jedná o logický důsledek.

Obsah přednášky

- Teorie lineárního uspořádání
- Teorie grup
- Teorie následníka
- Peanova aritmetika.

Isomorfismus

Definice

Nechť $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou dvě interpretace jazyka $L = \{p, \cdots\}$. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je **isomorfní** s $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : M \to N$ takové, že pro všechny atomické formule p jazyka L a pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models p_{\mathcal{M}}[e] \quad \text{právě tehdy, když} \quad \mathcal{N} \models p_{\mathcal{N}}[f \circ e].$$

Poznámky.

- Vzájemně jednoznačné zobrazení (1-1 zobrazení) je „prosté“ a „na“.
- Isomorfismus: 1-1 zobrazení + atomické formule „zachovávají.“
- Je-li $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ a $\mathcal{N} \cong \mathcal{P}$, pak $\mathcal{M} \cong \mathcal{P}$.
- Existuje 1-1 zobrazení mezi M a N, právě když M a N mají stejnou mohutnost.

Isomorfní struktury

Nechť $L = \{<\}$.
Isomorfismus = 1-1 zobrazení f + $(\forall x)(\forall y)(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

1. $\mathbb{N} \cong \mathbb{S}$. $\mathbb{N}$ - přirozená čísla, $\mathbb{S}$ - sudá čísla.
   $f : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$ definujeme $f(x) = 2x$. Platí $(\forall x)(\forall y)(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$.
2. $\mathbb{N} \cong \mathbb{A}$. $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{A}$ je nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$. $f : \mathbb{A}$ očíslujeme.
3. $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}$, neplatí. Existuje 1-1 zobrazení, ale nezachovává uspořádání.
4. $\mathbb{N} \cong \mathbb{R}$, neplatí. Neexistuje 1-1 zobrazení. Cantorův diagonální důkaz.

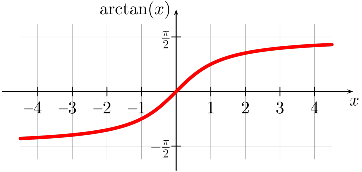
Natural	Real
0	0.236436775676...
1	0.098473294543...
2	0.193214042202...
3	0.843279242093...
4	0.012934812343...
5	0.639423412934...
6	0.017773923845...
7	0.238920090909...
8	0.123984732999...
9	0.646329878122...
10	0.000123943437...
11	0.981298312892...
⋮	⋮
	0.293233992132...
	0.746894310875...

Existence nekonečně nekonečných mohutností.

Isomorfní struktury

Nechť $L = \{<\}$.
Isomorfismus = 1-1 zobrazení f + $(\forall x)(\forall y)(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

5. $(0,1) \cong (0,a)$, kde $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x$
6. $(a,b) \cong (c,d)$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, otevřené intervaly na reálných číslech.
7. $\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = arctg(x)$



8. $\mathbb{R} \cong (0,1)$, $f(x) = \dfrac{arctg(x)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$.
9. $< a, b) \cong (a,b)$ neplatí. Existuje 1-1 zobrazení, ale nezachovává uspořádání.
10. $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$ neplatí.
11. $\mathbb{R} \cong (a,b) \cup (c,d)$ neplatí.

Teorie lineárního uspořádání

Definice

Nechť $L = \{p(x, y)\}$. **Lineární uspořádání** je dáno těmito formulemi

- T: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((p(x, y) \wedge p(y, z)) \Rightarrow p(x, z)\big)$ – transitivita
- R: $(\forall x)\neg p(x, x)$ – ireflexivita
- L: $(\forall x)(\forall y)\big(p(x, y) \vee (x = y) \vee p(y, x)\big)$ – linearita

i) Modely lineárního uspořádání: $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, $\langle \mathbb{A}, < \rangle$, kde $\mathbb{A} \subseteq R$, libovolná podmnožina přirozených (celých, racionálních, reáných) čísel. Slova podle abecedy. Vojáci podle výšky.

ii) L: $(\forall x)(\forall y)\big(\neg p(x, y) \Rightarrow ((x = y) \vee p(y, x))\big)$
L: $(\forall x)(\forall y)\big(\neg(x < y) \Rightarrow (y \leq x)\big)$ pro čísla.

Modely lineárního uspořádání

Příklad

Uveďte formule, které odlišují tyto modely lineárního uspořádání $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, případně $\langle \mathbb{A}, < \rangle$, kde $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$.

- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ - přirozená a celá čísla.
  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models (\forall x)(\exists y)(y < x)$ neomezenost zdola
  $\langle \mathbb{N}, < \rangle \models (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ existence nejmenšího prvku
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ a $\langle \mathbb{S}, < \rangle$, přirozená a sudá čísla
  $\langle \mathbb{S}, < \rangle \cong \langle \mathbb{N}, < \rangle$, tedy $\langle \mathbb{S}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{N}, < \rangle$,
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ a $\langle \mathbb{A}, < \rangle$, kde $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$
  $\langle \mathbb{N}, < \rangle \models (\forall x)(\exists y)(x < y)$ neomezenost shora
  $\langle \mathbb{A}, < \rangle \models (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ existence největšího prvku?
- $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ a $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, celá a racionální čísla
  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \models (\forall x)(\forall y)((x < y) \Rightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y))$ – hustota
  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models (\exists x)(\exists y)((x < y) \wedge (\forall z)(z \leq x \vee y \leq z))$
- $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ a $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, racionální a reálná čísla.
  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$

Elementárně ekvivalentní modely

Definice

Nechť L je jazyk, $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou dvě interpretace jazyka L.

- **Teorie interpretace** $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ je množina všech uzavřených formulí jazyka L, které platí v interpretaci $\mathcal{M}$.
- Jestliže $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, pak řekneme, že $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou **elementárně ekvivalentní**. Píšeme $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
- Teorie T je **úplná**, jestliže každá uzavřenou formuli jazyka L je buď logickým důsledkem T nebo je vyvratitelná, tj. buď platí $T \models A$, nebo $T \models \neg A$.

Příklady:

- Teorie lineárního uspořádání $\{T, R, L\} \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, $\{T, R, L\} \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{R})\dots$
- Jestliže $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, pak $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$,
- Tedy neboť $\langle \mathbb{S}, < \rangle \cong \langle \mathbb{N}, < \rangle$, pak je i $\langle \mathbb{S}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{N}, < \rangle$.
- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$.
- Neplatí $\langle \mathbb{N}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Z}, < \rangle$.
- Neplatí $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, < \rangle$.
- Tedy teorie lineárního uspořádání není úplná.

Teorie hustého lineárního uspořádání

Definice

Nechť $L = \{<\}$. Teorie **hustého lineárního uspořádání** je teorie lineárního uspořádání, pro kterou navíc platí

- H: $(\forall x)(\forall y)\big((x < y) \Rightarrow (\exists z)(x < z < y)\big)$ – hustota

Modely:

i) $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, racionální čísla

ii) $\langle \mathbb{Q}_0^+, < \rangle$, nezáporná racionální čísla

iii) $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, reálná čísla

iv) $\langle (0,1), < \rangle$, reálná čísla na intervalu $(0,1)$

v) $\big\langle \langle 0,1 \rangle, < \big\rangle$, reálná čísla na intervalu $\langle 0,1 \rangle$

Je teorie hustého lineárního uspořádání úplná? Není.

- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \models (\forall x)(\exists y)(y < x) \wedge (\forall x)(\exists y)(x < y)$ neomezenost zdola a shora,
- $\langle \mathbb{Q}_0^+, < \rangle \models (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ existence nejmenšího prvku
- $\langle \langle 0,1 \rangle, < \rangle \models (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ existence největšího prvku

Teorie neomezeného hustého lineárního uspořádání

Definice

Nechť $L = \{<\}$. Teorie **neomezeného hustého lineárního uspořádání** je teorie hustého lineárního uspořádání, pro kterou navíc platí

- N: $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(y < x \wedge x < z)$ – neomezenost

Modely

i) $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, racionální čísla

ii) $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, reálná čísla

iii) $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, < \rangle$, reálná čísla

iv) $\langle (a, b), < \rangle$, reálná čísla na otevřeném intervalu, $a, b \in \mathbb{R}$, $\langle (a, b), < \rangle \cong \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

v) $\langle (a, b) \cup (c, d), < \rangle$, reálná čísla na sjednocení otevřených intervalů

Teorie neomezeného hustého lineárního uspořádání je úplná. Bez důkazu. Tedy

$$\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle \equiv \langle (a, b), < \rangle \equiv \langle (a, b) \cup (c, d), < \rangle$$

Teorie následníka

Hledáme úplnou teorii popisující vlastnosti přirozených čísel.

Teorie následníka

$L = \{S, 0\}$, S - unární funkční symbol, 0 - konstanta

i) $(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$

ii) $(\forall x)\neg(S(x) = 0)$

iii) $(\forall x)(\neg(x = 0) \Rightarrow (\exists y)(x = S(y)))$

iv) $(\forall x)\neg(S^m(x) = x)$, kde $m \geq 1$

$S^m(x) = \underbrace{(S \circ S \circ \ldots \circ S)}_{m \text{ krát}}(x)$. Jedná se tedy o nekonečnou množinu axiomů.

Modely:

- $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $S(x) = x + 1$
- $\{0, 2, 4, \ldots\}$, $S(x) = x + 2$
- $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, $S(x) = x - 1$
- $\{0, 1, 2, \ldots, \alpha - 2, \alpha - 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \alpha + 3 \ldots\}$, $S(x) = x + 1$, nestandardní model

Úplná teorie

Teorie grup

Definice

Nechť $L = \{e, f\}$, f – binární funkční symbol, e – konstanta (neutrální prvek).
Grupa splňuje tyto axiomy:

- A: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)f(f(x,y),z)) = f(x, f(y,z))$ – asociativita
- N: $(\forall x)f(x,e) = x$ – neutralita
- I: $(\forall x)(\exists z)f(x,z) = e$ – inverzní prvek

Model nekomutativní grupy – permutace

M – množina vzájemně jednoznačných zobrazení n prvkové množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, e – identita

f – skládání zobrazení, tj. $f(p,q) = p \circ q$ a $(p \circ q)(x) = p(q(x))$,

Např. pro $n = 3$:

x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$
0	0	0	1	1	2	2
1	1	2	0	2	0	1
2	2	1	2	0	1	0

Máme 6 různých prvků. Obecně M obsahuje $n!$ prvků.

Asociativita plyne z vlastností skládání zobrazení.

Inverzní prvek k $p_4 = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$ je $p_5 = \{(0,2),(1,0),(2,1)\}$.

Komutativita: Neplatí!

$$p_2 \circ p_4 = \left\{ \begin{array}{l} p_2(p_4(0)) = p_2(1) = 2 \\ p_2(p_4(1)) = p_2(2) = 1 \\ p_2(p_4(2)) = p_2(0) = 0 \end{array} \right\} = p_6 \neq p_4 \circ p_2 = \left\{ \begin{array}{l} p_4(p_2(0)) = p_4(0) = 1 \\ p_4(p_2(1)) = p_4(2) = 0 \\ p_4(p_2(2)) = p_4(1) = 2 \end{array} \right\} = p_3.$$

Aditivní grupy

$L = \{+, 0\}$

- A: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) = (x + y) + z)$ – asociativita
- N: $(\forall x)(x + 0 = x)$ – neutralita
- I: $(\forall x)(\exists z)(x + z = 0)$ – inverzní prvek
- K: $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$ – komutativita

Modely aditivní grupy a jejich elementární ekvivalence:

i) $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$, netvoří grupu - chybí inverzní prvky
ii) $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$
iii) $\langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle \quad \models (\forall x)(\exists y)(x = y + y)$
iv) $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle$, avšak neplatí $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle \cong \langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle$
v) $\langle \{0\}, +, 0 \rangle \quad \models (\forall x)(\forall y)(x = y)$
vi) $\langle 3\mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, $3\mathbb{Z} = \{0, 3, -3, 6, -6, \dots\}$, $3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, tedy i $3\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$.
vii) $n\mathbb{Z} = \{0, n, -n, 2n, -2n, 3n, -3n, \dots\}$, $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, tedy i $n\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$

Teorie grup není úplná.

Multiplikativní grupy

$L = \{\cdot, 1\}$

- A: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$ – asociativita
- N: $(\forall x)(x \cdot 1 = x)$ – neutralita
- I: $(\forall x)(\exists z)(x \cdot z = 1)$ – inverzní prvek
- K: $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$ – komutativita

Modely multiplikativní grupy a jejich elementární ekvivalence:

i) $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$ – přirozená čísla   není grupa

ii) $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ – racionální čísla   není grupa

iii) $\langle \mathbb{Q}^+, \cdot, 1 \rangle$

iv) $\langle \mathbb{R}^+, \cdot, 1 \rangle \quad \models (\forall x)(\exists y)(y \cdot y = x)$, neplatí v $\langle \mathbb{Q}^+, \cdot, 1 \rangle$

v) $\langle \{1\}, \cdot, 1 \rangle \quad \models (\forall x)(\forall y)(x = y)$, neplatí jinde

vi) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle \quad \models (\forall x)(\exists y)((x \neq y) \wedge (x \cdot x = y \cdot y))$, neplatí v $\langle \mathbb{Q}^+, \cdot, 1 \rangle$

vii) $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle \quad \models (\forall x)(\exists y)(y \cdot y \cdot y \cdot y = x \cdot x)$, neplatí v $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1 \rangle$

viii) $\langle \{1, -1\}, \cdot, 1 \rangle \quad \models (\exists x)\neg(x = 1)$

Robinsonova aritmetika

Robinsonova aritmetika, $L = \{\leq, +, \cdot, S, 0\}$

i) $(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$

ii) $(\forall x)(S(x) \neq 0)$

iii) $(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = S(y)))$

iv) $(\forall x)(x + 0 = x)$

v) $(\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$

vi) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$

vii) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$

viii) $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \Leftrightarrow (\exists z)(y = z + x))$

- Standardní model: $\langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, x+1, 0 \rangle$, $\models (\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$
- Nestandardní model: $\langle \mathbb{M} = \{0, 1, 2, \ldots, \alpha, \beta\}, S(x) = x + 1, S(\alpha) = \alpha, S(\beta) = \beta \rangle$

$+$	y	α	β
x	$x+y$	α	β
α	α	α	β
β	β	α	β

$\cdot$	0	$y \neq 0$	α	β
x	0	$x \cdot y$	α	β
α	0	α	α	α
β	0	β	β	β

$\mathbb{M} \models \neg(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$. Robinsonova aritmetika není úplná.

Peanova aritmetika

Peanova aritmetika, $L = \{\leq, +, \cdot, S, 0\}$

i) $(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$

ii) $(\forall x)(S(x) \neq 0)$

iii) $(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = S(y)))$

iv) $(\forall x)(x + 0 = x)$

v) $(\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$

vi) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$

vii) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$

viii) $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \Leftrightarrow (\exists z)(y = z + x))$

ix) Schéma indukce: Je-li $A(x)$ formule, pak platí

$$\Big(A(0) \wedge (\forall x)\big(A(x) \Rightarrow A(S(x))\big)\Big) \Rightarrow (\forall x)A(x).$$

Je Peanova aritmetika úplná?

Peanova aritmetika

Věta

Následující formule platí v Peanově aritmetice (logické důsledky):

a) $(\forall x)(0 + x = x)$

b) $(\forall x)(\forall y)(S(y) + x = S(y + x))$

c) $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$

d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z))$

e) $(\forall x)(0 \cdot x = 0)$

f) $(\forall x)(\forall y)(S(y) \cdot x = y \cdot x + x)$

g) $(\forall x)(\forall y)(y \cdot x = x \cdot y)$

h) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$

j) $(\forall x)(\forall y)((\forall z)(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z))$

Důkaz indukcí

Při důkazu používáme schéma indukce:

$$\Big(A(0) \wedge (\forall x)\big(A(x) \Rightarrow A(S(x))\big)\Big) \Rightarrow (\forall x)A(x)$$

ad a) Chceme dokázat: $(\forall x)(0 + x = x)$
Použijeme schéma indukce pro $A(x) : 0 + x = x$
$A(0) : 0 + 0 = 0$ – platí z iv)
$A(S(x)) : 0 + S(x) = S(0 + x) = S(x)$ – platí z v) a $A(x)$
Díky platnosti $A \Rightarrow B, A \models B$ platí i $(\forall x)(0 + x = x)$.

ad b) Chceme dokázat: $(\forall x)(\forall y)(S(y) + x = S(y + x))$
$A(x) : (\forall y)(S(y) + x = S(y + x))$
$A(0) : (\forall y)(S(y) + 0 = S(y + 0))$, neboť $S(y) + 0 = S(y) = S(y + 0)$ – z iv) dvakrát
$A(S(x)) : (\forall y)(S(y) + S(x) = S(y + S(x)))$, neboť
$S(y) + S(x) = S(S(y) + x) = S(S(y + x)) = S(y + S(x))$ – z v) a $A(x)$ a v)

ad c) $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$
$A(x) : (\forall y)(x + y = y + x)$
$A(0) : (\forall y)(0 + y = y = y + 0)$, neboť $0 + y = y = y + 0$ – z a) a iv)
$A(S(x)) : (\forall y)(S(x) + y = y + S(x))$, neboť
$(S(x) + y = S(x + y) = S(y + x) = y + S(x))$ – z b) a $A(x)$ a v)

Presburgerova aritmetika

Presburgerova aritmetika, $L = \{\leq, +, S, 0\}$

i) $(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$

ii) $(\forall x)(S(x) \neq 0)$

iii) $(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(x = S(y)))$

iv) $(\forall x)(x + 0 = x)$

v) $(\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$

vi) $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \Leftrightarrow (\exists z)(y = z + x))$

vii) Schéma indukce: Je-li $A(x)$ formule, pak platí

$$\Big(A(0) \wedge (\forall x)\big(A(x) \Rightarrow A(S(x))\big)\Big) \Rightarrow (\forall x)A(x).$$

Presburgerova aritmetika je úplná.

Peanova aritmetika není úplná. Gődelova věta o neúplnosti

Domácí úkol

Dokažte, že v Peanově aritmetice platí asociativní a distributivní zákon, tj. Věta 19/22 d), g).