Matematická logika
Přednáška č. 1

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Podmínky úspěšného absolvování

- **Přednášky:**
  - přednášky jsou každý týden
  - na konci přednášek domácí úlohy - za správné vyřešení 1b
  - odevzdání ručně vypracované na začátku následující přednášky
- **Cvičení:**
  - cvičení jednou za 14 dnů
  - dva zápočtové testy po 15b
  - liché týdny: 1. test v 5. týdnu (2.- 6. listopadu), 2. test v 11. týdnu (14.- 18. prosince)
  - sudé týdny: 1. test v 6. týdnu (9.-13. listopadu) a 2.test v 10. týdnu semestru (7.-11. prosince)
  - k zápočtu nutno získat alespoň polovinu ze 30b
- **Zkouška:**
  - ke zkoušce je nutné mít zápočet, maximálně 30b
  - písemka se třemi částmi, maximálně $32b + 18b + 20b = 70b$
  - ze všech částí je třeba polovina bodů
  - $+$ nepovinné body z přednášek 10b
  - $+$ nepovinná ústní zkouška: - 5b až $+$ 10b.

Doporučená literatura

- **Trlifajová, K., Vašata, D., *Matematická logika*, ČVUT, Praha, 2013, 2015.**
- Švejdar, V., *Logika - neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha, 2002.
- Sochor, A., *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha, 2001.
- Demlová, M., *Mathematical Logic*, ČVUT, Praha: Kernberg Publishing, 2008.
- Bergmann, M., Moor, J., Nelson, J. *The Logic Book*, McGraw-Hill, 2008.
- Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman and Hall, 1997.
- Copi, I.M. *Symbolic Logic*, The Macmilian Company, London, 1967.
- Smullyan, R., *Jak se jmenuje tahle knížka?, Navěky nerozhodnuto, Satan, Cantor a nekonečno, ...*

Obsah první přednášky

- Význam, historie, jazyk, formule
- Logické spojky
- Formule výrokové logiky
- Pravdivostní tabulky

Význam logiky

$\cdots$ *just a logical deduction*

Tři úrovně logiky

1. Správné logické úsudky

   Jestliže prší, pak nosím deštník.
   Prší. Tudíž mám deštník.

2. Logika jako matematika

   $A \Rightarrow B, A \models B$

3. Logika jako teorie.

   Axiomatický systém je úplný, tedy každé pravdivé tvrzení je dokazatelné.

Správné logické úvahy

Je-li Jan komunista, pak je ateista. Jan je ateista. Tedy Jan je komunista.

Ne.

Všichni studenti jsou inteligentní. Někteří inteligentní lidé jsou podivíni.
Plyne z toho, že někteří studenti jsou podivíni?

Ne.

Jediná kniha, kterou jsem kdy četl, je Pán prstenů.
Co je opakem tohoto tvrzení neboli co platí, jestliže lžu?

Nečetl jsem žádnou knihu,
nebo jsem četl jinou knihu,
nebo jsem četl ještě nějakou další knihu.

Historie logiky

- Antické Řecko (6. - 3. století př.n.l.)
- Středověk (11. - 13. století)
- Moderní logika (19. - 20. století)

Stoicko–megarská škola (4. – 3. století př.n.l.)

Stoická dedukční schémata

(1) *Jestliže prší, pak mám děštník. Prší. Tedy mám deštník.*
Jestliže prvé, pak druhé, avšak prvé, tudíž druhé.

(2) Jestliže prvé, pak druhé, avšak ne druhé, tudíž ne prvé.

(3) Ne zároveň prvé a druhé, avšak prvé, tudíž ne druhé.

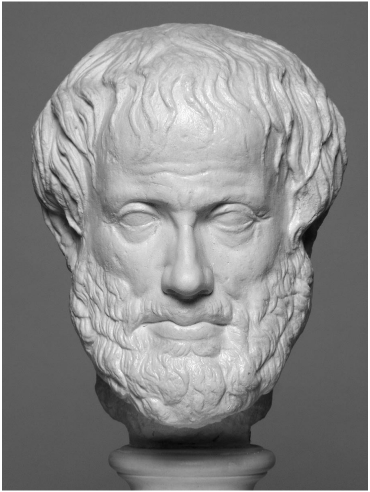
(4) Buď jen prvé, nebo jen druhé, ale prvé, tudíž ne druhé.

(5) Buď jen prvé, nebo jen druhé, ale ne druhé, tudíž prvé.

Logické hádanky

- *Člověk o sobě říká, že lže. Mluví pravdu nebo lže?* Paradox lháře
- *Co jsi neztratil, to máš. Ale neztratil jsi rohy. Tedy je máš.*
- *Tento člověk je švec. Tento člověk je dobrý. Tudíž tento člověk je dobrý švec.*

Aristotelés (384 – 322 př.n.l.)



Základní zákony logiky

- Zákon vyloučení sporu
  $\neg(A \wedge \neg A)$
- Zákon vyloučeného třetího
  $A \vee \neg A$
- Zákon identity
  $A = A$

Aristotelské typy soudů

- S je P.
  Kočka je bílá.
- Všechna/některá S jsou/nejsou P.
  Všechny/některé kočky jsou/nejsou bílé.

	Kladné	**Záporné**
Obecné	**A** Všechna S jsou P. *Všechny kočky jsou bílé.*	**E** Žádná S nejsou P. *Žádné kočky nejsou bílé.*
Částečné	**I** Některá S jsou P. *Některé kočky jsou bílé.*	**O** Některá S nejsou P. *Některé kočky nejsou bílé.*

Sylogistika

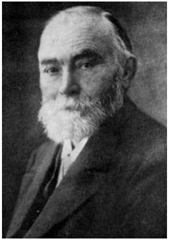
Sylogismum: Ze dvou předpokladů odvodíme závěr.

Kdy je platný?

- I. Každá kočka je šelma.
  II. Každá šelma je zvíře.
  III. Tudíž každá kočka je zvíře. BARBARA
- I. Žádný člověk není zvíře.
  II. Některé zvíře je šelma.
  III. Tudíž některá šelma není člověk. FRESISON
- I. Žádný člověk není zvíře.
  II. Některé zvíře je šelma.
  III. Tudíž některý člověk není šelma. neplatí

Gottlob Frege

- logické spojky, kvantifikátory, proměnné, relace
- Axiomatický systém: 6 axiomů + 1 odvozovací pravidlo
- Axiom neomezené abstrakce: Je-li $\phi(x)$ formule, pak $\{x; \phi(x)\}$ je množina.
- *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903)
- Logicismus.



David Hilbert a Kurt Gődel

Hilbertův program

- Formalizace matematických i jiných disciplín.
- Převedení do axiomatického tvaru.
- Důkaz bezespornosti formálního systému.

Věty o neúplnosti

- V každé teorii T, která obsahuje aritmetiku, existuje nedokazatelné tvrzení.
- Nelze dokázat bezespornost teorie obsahující aritmetiku.

Neklasické logiky

- Intuicionistická logika. Nepřijímá princip vyloučeného třetího. Konstruktivistická matematika.
- Modální logika. Přidává modalitu výroku *je možné, je nutné.*
  - *Je nutné, že bude námořní bitva.* $\Box A$
  - *Je možné, že bude námořní bitva.* $\Diamond A$
  - $\neg\Box A \Leftrightarrow \Diamond\neg A$
  - $\neg\Diamond A \Leftrightarrow \Box\neg A$
- Fuzzy-logika. Pravdivostní hodnota výroku leží mezi 0 a 1. A je formule VL, $e(A) \in [0, 1]$

Prvotní výrok a formule

Definice

Prvotní výrok je jednoduchá oznamovací věta, u které má smysl se ptát, zda je či není pravdivá. Prvotní výroky označujeme velkými tiskacími písmeny $A, B, \dots$, kterým říkáme **prvotní formule**.

Příklady:

- A: *Je rok 2015.*
- B: $2 + 2 = 5$.
- P: *Prší.*
- A_1: *Bitva u Hastingsu byla v roce 1066.*
- A_2: *Bitva na Bílé hoře byla v roce 1621.*

- Množina prvotních výroků: $\{$*Je rok 2011.*, $2 + 2 = 5, \dots\}$
- Množina prvotních formulí: $\{A, B, C, P, A_1, A_2\}$

Pravdivostní hodnota

Definice

Pravdivostní ohodnocení množiny prvotních výroků je funkce v z množiny prvotních formulí do množiny $\{0, 1\}$.

Pokud pro prvotní výrok A platí $v(A) = 1$, řekneme, že výrok A je **pravdivý při ohodnocení** v.
Pokud platí $v(A) = 0$, řekneme, že je **nepravdivý při ohodnocení** v.

Příklady:

- A: *Je rok 2015.* $v(A) = 1$
- B: $2 + 2 = 5$. $v(B) = 0$
- P: *Prší.* $v(P) = 0$ (?)
- A_1: *Bitva u Hastingsu byla v roce 1066.* $v(A_1) = 1$
- A_2: *Bitva u Bílé hory byla v roce 1621.* $v(A_2) = 0$

Negace $\neg$

$\neg A$: „Není pravda, že A.“, „A je nepravdivé.“

Příklady:

- B: $2+2=5$. $v(B)=0$
- $\neg B$: $2+2\neq 5$. $v(\neg B)=1$
- A: *Je rok 2015.* $v(A)=1$
- $\neg A$: *Není pravda, že je rok 2015. Není rok 2015.* $v(\neg A)=0$
- $\neg\neg A$: *Není pravda, že není rok 2015.* $v(\neg\neg A)=1$

Negace formule je pravdivá, právě když je formule nepravdivá.

Pravdivostní hodnoty $\neg A$ pro všechna možná ohodnocení A můžeme přehledně znázornit v **pravdivostní tabulce**:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Konjunkce $\wedge$

$A \wedge B$: „A a B.“, „A a současně B.“

Příklady:

- $A \wedge C$: *Je rok 2015 a studuji FIT.* $v(A \wedge C) = 1$
- $A_1 \wedge A_2$: *Bitva u Hastingsu byla v roce 1066 a bitva na Bílé hoře v roce 1621.* $v(A_1 \wedge A_2) = 0$

Konjunkce dvou formulí je pravdivá tehdy a jen tehdy, když jsou obě formule pravdivé.

Pravdivostní tabulka:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkce $\vee$

$A \vee B$: „A nebo B.“

Příklady:

- $A \vee C$: *Je rok 2015 nebo studuji FIT.* $v(A \vee C) = 1$
- $A_1 \vee A_2$: *Bitva u Hastingsu byla v roce 1066 nebo bitva na Bílé hoře v roce 1621.* $v(A_1 \vee A_2) = 1$

Disjunkce dvou formulí je pravdivá, právě když alespoň jedna z nich je pravdivá.

Pravdivostní tabulka:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pozor! Disjunkce nemá vylučovací význam - „Buď A, nebo B.“

Implikace $\Rightarrow$

$A \Rightarrow B$: „Z A vyplývá B.“ „Jestliže A, pak B.“ „A implikuje B.“

Příklad:

- P: *Prší.*, K: *Jdu do kina.*
- $P \Rightarrow K$: *Jestliže prší, pak jdu do kina.*

– Implikace je nepravdivá tehdy, když přepoklad je pravdivý a závěr nepravdivý.
– Implikace je pravdivá tehdy, když platí negace předpokladu nebo závěr.

Pravdivostní tabulka:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ekvivalence $\Leftrightarrow$

$A \Leftrightarrow B$: „A právě tehdy, když B.“, „A tehdy a jen tehdy, když B.“, „A je ekvivalentní s B.“

Příklad:

- P: *Prší.*, K: *Jdu do kina.*
- $P \Leftrightarrow K$: *Jdu do kina právě tehdy, když prší.*, *Jdu do kina vždy, když prší.*

Ekvivalence dvou formulí je pravdivá právě tehdy, když obě mají stejnou pravdivostní hodnotu.

Pravdivostní tabulka:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Formalizace výroků

a) *Kdo nemá geometrické myšlení* (G), *ať nevstupuje* (V).
b) *Do divadla chodím vždy* (D), *když hrají komedii* (K).
c) *Vyber si, buď dostaneš jen polévku* (P), *nebo jen salát (S).*
d) *Trestný čin týrání zvířete (Z) spáchá každý, kdo týrá zvíře (T), a byl za podobný přestupek v posledním roce postižen (P) nebo za takový čin v posledních dvou letech odsouzen (O).*

a) $\neg G \Rightarrow \neg V$
b) $D \Leftrightarrow K$
c) $(P \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge S)$, $\quad (P \vee S) \wedge \neg(P \wedge S)$, $\quad P \Leftrightarrow \neg S$
d) $Z \Leftrightarrow (T \wedge (P \vee O))$

Formule výrokové logiky

Definice

Jazyk výrokové logiky obsahuje

- symboly pro prvotní formule $A, B, \ldots$,
- logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
- závorky ( ).

Definice

Formule výrokové logiky definujeme takto:

I. Prvotní formule je výroková formule.

II. Jsou-li A a B výrokové formule, pak jsou i $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ a $(A \Leftrightarrow B)$ výrokové formule.

III. Formule je řetězec symbolů sestavený podle pravidel I. a II. v konečně mnoha krocích.

Příklady: $A,\ B,\ A \wedge B,\ \neg A \Rightarrow B,\ (A \Rightarrow B) \vee \neg((A \wedge B) \vee B)$

Poznámka: Vnější závorky vynecháváme $A \wedge B$ znamená $(A \wedge B)$.

Formační strom a podformule

Definice

Podformule formule je každá část formule, která je sama formulí.

Příklad: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (C \Rightarrow A)$

Podformule: $A,\ B,\ C,\ A \wedge B,\ \neg(A \wedge B),\ C \Rightarrow A$

Formační strom:

$$\begin{tikzcd}
 & & \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (C \Rightarrow A) \arrow[dl, no head] \arrow[drr, no head] & & & \\
 & \neg(A \wedge B) \arrow[d, no head] & & & C \Rightarrow A \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & A \wedge B \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & C & & A \\
A & & B & & &
\end{tikzcd}$$

Pravdivostní ohodnocení formule

Definice (induktivní definice pravdy)

Je-li dáno pravdivostní ohodnocení prvotních formulí, pak **pravdivostní hodnotu výrokové formule** určíme indukcí podle složitosti formule postupným určováním pravdivosti podformulí od prvotních až po výslednou formuli.

Využíváme pravdivostní tabulku pro logické spojky:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Říkáme, že formule A je **pravdivá při ohodnocení** v, právě když $v(A) = 1$,
a formule A je **nepravdivá při ohodnocení** v, právě když $v(A) = 0$.

Pravdivostní tabulka pro dvě prvotní formule

Příklad: Sestavte pravdivostní tabulku pro $A \Leftrightarrow (B \wedge \neg A)$.
Podformule - $A, B, \neg A, B \wedge \neg A, A \Leftrightarrow (B \wedge \neg A)$

A	B	$\neg A$	$B \wedge \neg A$	$(A \Leftrightarrow (B \wedge \neg A))$
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Zjednodušená tabulka:

A	$\Leftrightarrow$	$(B$	$\wedge$	$\neg$	$A)$
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0

Pravdivostní tabulka pro tři prvotní formule

Příklad: Nalezněte všechny podformule a sestavte pravdivostní tabulku
$A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$
Podformule - $A, B, C, \neg B, (\neg B \wedge C), A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$

A	B	C	$\neg B$	$\neg B \wedge C$	$A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Ostrov poctivců a padouchů

Poctivci mluví vždy pravdu, padouši vždy lžou.

1. Zde máme dva obyvatele ostrova A,B. A prohlásí: "B je poctivec a já jsem padouch."
   A: A mluví pravdu, A je poctivec. $\neg A$: A lže, A je padouch.
   A řekl: $B \wedge \neg A$.
   $A \Leftrightarrow (B \wedge \neg A)$

A	B	$\neg A$	$B \wedge \neg A$	$(A \Leftrightarrow (B \wedge \neg A))$
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

   Oba jsou padouši.

2. Tentokrát A řekne: "Je-li ten druhý poctivec, pak já jsem padouch."
   $A \Leftrightarrow (B \Rightarrow \neg A)$
   A je poctivec a B je padouch.

DOMÁCÍ ÚKOL

Pro III. paralelku - úterý

Na ostrově žijí dva typy lidí - poctivci (vždy mluví pravdu), padouši (vždy lžou). O dvou obyvatelích budeme říkat, že mají stejnou povahu, když jsou oba poctivci nebo oba padouši.

Potkáme 3 lidi, A, B, C.

A řekne: *B a C mají stejnou povahu.* Na to se někdo zeptá C: *Mají A a B stejnou povahu?*

Co odpoví C?

DOMÁCÍ ÚKOL

Pro II. paralelku - pondělí

Jsem v jeskyni na ostrově. Vedou z ní dva východy. Pouze jedním z nich se dostanu ven. Stojí před nimi domorodec a mohu mu položit pouze jednu otázku, na niž odpoví buď „ano“, nebo „ne“. Na co se ho mám zeptat, abych se dostal(a) ven?