Matematická logika
Přednáška č. 2

RNDr. Kateřina Trlifajová

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Obsah druhé přednášky

- Tautologie. Kontradikce. Splnitelná formule.
- Logický důsledek.
- Logicky ekvivalentní formule.
- Základní zákony výrokové logiky.
- Universální systémy logických spojek

Tautologie, kontradikce, splnitelnost

Definice

Formule A je

- **tautologie**, právě když pro každé ohodnocení v je $v(A) = 1$,
- **kontradikce**, právě když pro každé ohodnocení v je $v(A) = 0$,
- **splnitelná**, právě když alespoň pro jedno ohodnocení v je $v(A) = 1$.

metalogické pojmy

Příklady:

- $A \vee \neg A$ - tautologie
- $A \wedge \neg A$ - kontradikce
- A - splnitelná
- $A \Leftrightarrow B$ - splnitelná
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Tautologie a kontradikce

Sestrojme pravdivostní tabulku pro formuli $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Formule je tautologie.

Negace: $\neg\big((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\big)$ je kontradikce.

A	B	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	$\neg\big((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\big)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Tautologie, kontradikce, splnitelnost

Tvrzení

1. *Negace tautologie je kontradikce.*
2. *Negace kontradikce je tautologie.*
3. *Tautologie $\top$ je splnitelná.*
4. *Kontradikce $\bot$ není splnitelná.*

Příklady: $\neg(A \wedge \neg A)$ - tautologie, $\neg(A \vee \neg A)$ - kontradikce

Logická ekvivalence

Definice

Formule A a B jsou **logicky ekvivalentní** právě tehdy, když pro každé ohodnocení v je $v(A) = v(B)$. Píšeme $A \models\!\!\!\!\!= B$.

Příklad: $A \Rightarrow B \models\!\!\!\!\!= \neg B \Rightarrow \neg A$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Logický důsledek

Definice

Formule B je **logickým důsledkem** formule A, právě když pro každé ohodnocení v, pro které $v(A) = 1$, je i $v(B) = 1$. Píšeme $A \models B$. Říkáme též B **vyplývá** z A.

metalogický pojem

Příklad:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0

- $A \wedge B \models A$
- $A \models A \vee B$
- $B \models A \Rightarrow B$
- $\neg A \models A \Rightarrow B$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $A \Rightarrow B \models \neg B \Rightarrow \neg A$, $\neg B \Rightarrow \neg A \models A \Rightarrow B$

Vztah logického důsledku a logické ekvivalence

Tvrzení

Platí

i) $A \models B$ *právě, když* $A \Rightarrow B$ *je tautologie.*

ii) $A \models B$ *právě, když* $A \wedge \neg B$ *je kontradikce.*

iii) $A \models\!\mid B$ *právě, když* $A \models B$ *a* $B \models A$.

iv) $A \models\!\mid B$ *právě, když* $A \Leftrightarrow B$ *je tautologie.*

Důkaz:

1. $A \models B$, právě když pro každé ohodnocení v platí, že jestliže $v(A) = 1$, pak i $v(B) = 1$, víme, že pro každé ohodnocení v platí, $v(A) = 1$ nebo $v(A) = 0$, je-li $v(A) = 1$, pak i $v(B) = 1$ a tedy $v(A \Rightarrow B) = 1$, a je-li $v(A) = 0$, pak též $v(A \Rightarrow B) = 1$, což je právě když právě když $A \Rightarrow B$ je tautologie.
2. $A \models B$, právě když $A \Rightarrow B$ je tautologie, právě když $\neg(A \Rightarrow B)$ je kontradikce, právě když $A \wedge \neg B$ je kontradikce, neboť $\neg(A \Rightarrow B) \models\!\mid A \wedge \neg B$.

Tautologie a kontradikce

Definice

Do jazyka výrokové logiky zavedeme nové symboly $\top$ pro tautologii a $\bot$ pro kontradikci.

A	$\top$	$\bot$	$A \wedge T$	$A \vee T$	$A \wedge \bot$	$A \vee \bot$
1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0

Tvrzení

Pro jakoukoli formuli A platí:

i) $\bot \models A$

ii) $A \models \top$

iii) $A \wedge \top \mathrel{\models\!\!\!\dashv} A$

iv) $A \vee \top \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \top$

v) $A \wedge \bot \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bot$

vi) $A \vee \bot \mathrel{\models\!\!\!\dashv} A$

Příklad

Rozhodněte, zda a kde je mezi následujícími formulemi vztah logického důsledku.

$$A, B, A \wedge B, A \vee B, \top, \bot$$

$\bot$	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$	$\top$
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1

1. $\bot \models A \wedge B \models A \models A \vee B \models \top$
2. $\bot \models A \wedge B \models B \models A \vee B \models \top$

Logické zákony I.

Věta

Následující formule jsou tautologie:

i) $A \vee \neg A$ – *zákon vyloučeného třetího*

ii) $\neg(A \wedge \neg A)$ – *vyloučení sporu*

iii) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ – *zákon dvojí negace*

Platí tedy $\neg\neg A \mathrel{\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\mid} A$.

Například:

- *Spím nebo nespím.* $S \vee \neg S$
- *Není pravda, že zároveň spím a nespím.* $\neg(S \wedge \neg S)$
- *Není pravda, že nespím, vždy, když spím.* $\neg\neg S \Leftrightarrow S$ – logicky ekvivalentní výroky

Logické zákony II. (Algebraické vlastnosti spojek)

Věta

Následující dvojice formulí jsou logicky ekvivalentní:

i) $A \wedge A \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv A$

ii) $A \vee A \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv A$

iii) $A \wedge B \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv B \wedge A$ - *komutativní zákon* pro $\wedge$

iv) $A \vee B \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv B \vee A$ - *komutativní zákon* pro $\vee$

v) $(A \wedge B) \wedge C \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv A \wedge (B \wedge C)$ - *asociativní zákon* pro $\wedge$

vi) $(A \vee B) \vee C \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv A \vee (B \vee C)$ - *asociativní zákon* pro $\vee$

vii) $(A \wedge B) \vee C \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ - *distributivní zákony*

viii) $(A \vee B) \wedge C \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

ix) $A \wedge (A \vee B) \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv A$ - *zákony absorpce*

x) $A \vee (A \wedge B) \models\mathrel{\mkern-8mu}\dashv A$

Asociativní zákony a psaní závorek

Asociativní zákony

$$A \wedge (B \wedge C) \models\!\!\!\!= (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \models\!\!\!\!= (A \vee B) \vee C$$

Důsledek

Jestliže je několik formulí spojeno pouze konjunkcí resp. pouze disjunkcí můžeme závorky vynechat (a pořadí formulí přeházet).

Používáme zápis:

$$A \wedge B \wedge C \models\!\!\!\!= C \wedge A \wedge B$$

$$A \vee B \vee C \models\!\!\!\!= B \vee C \vee A$$

Tedy též například:

$$A \wedge \big(B \wedge (C \vee D)\big) \models\!\!\!\!= A \wedge B \wedge (C \vee D)$$

Asociativní a komutativní zákon pro implikaci?

- Platí pro implikaci komutativní zákon?

$$A \Rightarrow B \models\!\dashv B \Rightarrow A?$$

Ne.

- Platí pro implikaci asociativní zákon?

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \models\!\dashv (A \Rightarrow B) \Rightarrow C?$$

A	$\Rightarrow$	$(B$	$\Rightarrow$	$C)$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Rightarrow$	C
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0

Ne.

Implikace není ani komutativní ani asociativní. Nemůžeme vynechat závorky.

Distributivní zákony

Distributivní zákony

$$(A \wedge B) \vee C \models\!\!\!\!\!\!= (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C \models\!\!\!\!\!\!= (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Příklady:

- $$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \models\!\!\!\!\!\!= \big(A \vee (C \wedge D)\big) \wedge \big(B \vee (C \wedge D)\big) \models\!\!\!\!\!\!=$$
  $$\models\!\!\!\!\!\!= (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$
- V obecném případě
  $$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee (B_1 \wedge \ldots B_m) \models\!\!\!\!\!\!= (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (A_n \vee B_m)$$
- Obdobně
  $$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \models\!\!\!\!\!\!= \big(A \wedge (C \vee D)\big) \vee \big(B \wedge (C \vee D)\big) \models\!\!\!\!\!\!=$$
  $$\models\!\!\!\!\!\!= (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$$
- V obecném případě
  $$(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \wedge (B_1 \vee \ldots B_m) \models\!\!\!\!\!\!= (A_1 \wedge B_1) \vee (A_1 \wedge B_2) \vee \ldots \vee (A_n \wedge B_m)$$

Vlastnosti ekvivalenci

Tvrzení

i) $A \Leftrightarrow B \models\!\!\!\dashv B \Leftrightarrow A$ - *komutativní zákon*

ii) $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \models\!\!\!\dashv (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ - *asociativní zákon*

iii) $\neg(A \Leftrightarrow B) \models\!\!\!\dashv \neg A \Leftrightarrow B$

iv) $A \Leftrightarrow A \models\!\!\!\dashv \top$

v) $A \Leftrightarrow \neg A \models\!\!\!\dashv \bot$

vi) $A \Leftrightarrow \top \models\!\!\!\dashv A$

vii) $A \Leftrightarrow \bot \models\!\!\!\dashv \neg A$

Příklad. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (C \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow \neg A)) \models\!\!\!\dashv$
$(A \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C) \models\!\!\!\dashv$
$(\bot \Leftrightarrow \top \Leftrightarrow C) \models\!\!\!\dashv$
$(\bot \Leftrightarrow C) \models\!\!\!\dashv \neg C$

Ostrov poctivců a padouchů

- Navštívíme jednu manželskou dvojici. Manžel řekne: *Já i má manželka máme stejnou povahu, oba jsem poctivci, nebo jsme oba padouši.* Co jsou?

$$A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (A \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow B \mathrel{|\!\!=\!\!|} T \Leftrightarrow B \mathrel{|\!\!=\!\!|} B.$$

Manžel nevíme a manželka je poctivec.

- Jeskyně, dva východy a domorodec.

  Potřebujeme, aby $(A \Leftrightarrow V) \Leftrightarrow C$ a $(A \Leftrightarrow \neg V) \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg C$ byly tautologie.
  Neboli $A \Leftrightarrow V \mathrel{|\!\!=\!\!|} C$ a $A \Leftrightarrow \neg V \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg C$. Je to $A \Leftrightarrow C$?

$$A \Leftrightarrow V \mathrel{|\!\!=\!\!|} A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow C) \mathrel{|\!\!=\!\!|} T \Leftrightarrow C \mathrel{|\!\!=\!\!|} C$$

$$A \Leftrightarrow \neg V \mathrel{|\!\!=\!\!|} A \Leftrightarrow \neg (A \Leftrightarrow C) \mathrel{|\!\!=\!\!|} A \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow C) \mathrel{|\!\!=\!\!|} A \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow C \mathrel{|\!\!=\!\!|} \bot \Leftrightarrow C \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg$$

Logické zákony III.

Věta

Následující dvojice formulí jsou logicky ekvivalentní

i) $\neg(A \wedge B) \models\!\!\!\dashv \neg A \vee \neg B$ - *de Morganovy zákony*

ii) $\neg(A \vee B) \models\!\!\!\dashv \neg A \wedge \neg B$

iii) $A \Rightarrow B \models\!\!\!\dashv \neg B \Rightarrow \neg A$ - *zákon kontrapozice*

iv) $A \Rightarrow B \models\!\!\!\dashv \neg A \vee B$ - *„zlaté pravidlo"*

v) $\neg(A \Rightarrow B) \models\!\!\!\dashv A \wedge \neg B$ - *„stříbrné pravidlo"*

vi) $A \Leftrightarrow B \models\!\!\!\dashv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ - *význam ekvivalence*

vii) $(A \Rightarrow B) \wedge A \models B$ - *Modus ponens.*

Příklad logicky ekvivalentních formulí

T: *Jezdím tramvají.* M: *Jezdím metrem.* H: *Mám horečku.* N: *Jsem nemocný.*

Následující dvojice výroků jsou logicky ekvivalentní:

- *Není pravda, že jezdím tramvají nebo metrem. Nejezdím tramvají a nejezdím metrem.*

$$\neg(T \vee M) \models\!\!\!\!\!= \neg T \wedge \neg M$$

- *Není pravda, že jezdím tramvají a metrem. Nejezdím tramvají nebo nejezdím metrem.*

$$\neg(T \wedge M) \models\!\!\!\!\!= \neg T \vee \neg M$$

- *Jestliže mám horečku, pak jsem nemocný. Jestliže nejsem nemocný, pak nemám horečku.*

$$H \Rightarrow N \models\!\!\!\!\!= \neg N \Rightarrow \neg H$$

- *Jestliže mám horečku, pak jsem nemocný. Nemám horečku nebo jsem nemocný.*

$$H \Rightarrow N \models\!\!\!\!\!= \neg H \vee N$$

- Jedná se o logický důsledek: *Jestliže mám horečku, pak jsem nemocný. Mám horečku. Tudíž jsem nemocný.*

$$(H \Rightarrow N) \wedge H \models N$$

Logicky ekvivalentní vyjádření implikace

Tvrzení

Následující formule jsou logicky ekvivalentní.

i) $A \Rightarrow B$

ii) $\neg A \vee B$

iii) $\neg(A \wedge \neg B)$

iv) $\neg B \Rightarrow \neg A$

Příklad

Jestliže se stala vražda, pak je zahradník vrahem. $V \Rightarrow Z$.

Který z následujících výroků je logicky ekvivalentní a který je negací?

a) *Jestliže zahradník není vrahem, pak se vražda nestala.*
b) *Nestala se vražda nebo je vrahem zahradník.*
c) *Jestliže zahradník je vrahem, pak se stala vražda.*
d) *Není pravda, že se stala vražda a vrahem není zahradník.*
e) *Vražda se nestala, tudíž zahradník není vrahem.*
f) *Stala se vražda a vrahem není zahradník.*

a) $\neg Z \Rightarrow \neg V$ Logicky ekvivalentní.
b) $\neg V \vee Z$ Logicky ekvivalentní.
c) $Z \Rightarrow V$
d) $\neg(V \wedge \neg Z)$ Logicky ekvivalentní.
e) $\neg V \Rightarrow \neg Z$
f) $V \wedge \neg Z$ Negace.

Logicky ekvivalentní vyjádření ekvivalence

Tvrzení

Následující formule jsou logicky ekvivalentní.

i) $A \Leftrightarrow B$

ii) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

iii) $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)$

iv) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

v) $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$

vi) $\neg A \Leftrightarrow \neg B$

$$A \Leftrightarrow B \models\!\!\!\dashv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \models\!\!\!\dashv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$
$$\models\!\!\!\dashv (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$$
$$\models\!\!\!\dashv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \models\!\!\!\dashv \neg A \Leftrightarrow \neg B$$

Příklad

Slunce svítí právě tehdy, když neprší. $S \Leftrightarrow \neg P$

$$S \Leftrightarrow \neg P \;\models\!\!\!\!\!\;= (S \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg S \Rightarrow P) \;\models\!\!\!\!\!\;= (\neg S \vee \neg P) \wedge (S \vee P) \;\models\!\!\!\!\!\;= (S \wedge \neg P) \vee (\neg S \wedge P)$$

Který výrok je logicky ekvivalentní, negací či logickým důsledkem?

a) *Jestliže svítí slunce, pak neprší.* $S \Rightarrow \neg P$ Logický důsledek.
b) *Jestliže prší, pak nesvítí slunce.* $P \Rightarrow \neg S$ Logický důsledek.
c) *Nesvítí slunce nebo neprší.* $\neg S \vee \neg P$ Logický důsledek
d) *Prší právě tehdy, když nesvítí slunce.* $P \Leftrightarrow \neg S$ Logicky ekvivalentní.
e) *Svítí slunce a neprší.* $S \wedge \neg P$
f) *Prší a svítí slunce nebo neprší a nesvítí sl.* $(P \wedge S) \vee (\neg P \wedge \neg S)$ Negace.
g) *Slunce svítí nebo nesvítí.* $S \vee \neg S$ Logický důsledek.

Substituce logicky ekvivalentní formule

Tvrzení

Jestliže v dané formuli A nahradíme její podformuli formulí s ní logicky ekvivalentní, dostaneme formuli logicky ekvivalentní s A.

Příklad:

$$(A \Rightarrow B) \models\!\!\!\!\models (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Tudíž

$$(A \Rightarrow B) \wedge C \models\!\!\!\!\models (\neg B \Rightarrow \neg A) \wedge C$$

Domácí úkol

Commedia dell'Arte

Buď Kolombína netančí nebo se Harlekýn směje. Jestliže Pulcinella není smutná, pak Pierot nepláče. Není pravda, že se Harlekýn směje a Pierot nepláče. Jestliže je Dottore přítomen, pak Pulcinella není smutná. Není pravda, že Kolombína netančí. *Co se děje?*