Matematická logika
Přednáška č. 3

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2013/2014

Obsah třetí přednášky

- Universální systém logických spojek.
- Disjunktivní a konjunktivní normální tvar formulí.
- Úplný disjunktivní a konjunktivní tvar formulí

Výroková formule

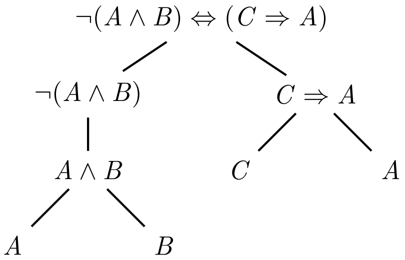
Definice

(i) Prvotní formule je výroková formule.

(ii) Jsou-li A a B výrokové formule, pak jsou i $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ a $(A \Leftrightarrow B)$ výrokové formule.

(iii) Výroková formule je řetězec symbolů sestavný podle pravidel (i) a (ii) v konečně mnoha krocích.

Formační strom



Důkaz indukcí podle složitosti formule

Princip indukce

(i) Dokážeme pro prvotní formule.

(ii) Předpokládáme, že platí pro A, B, dokážeme pro $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$.

Tvrzení

Každá formule obsahuje sudý počet závorek.

Důkaz

Indukcí podle složitosti formule.

(i) Prvotní formule neobsahují žádné závorky.

(ii) Jestliže A, B obsahují sudý počet závorek, pak $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$ obsahují sudý počet závorek.

□

Universální systém logických spojek

Definice

Množina logických spojek tvoří **universální systém**, právě když ke každé formuli existuje logicky ekvivalentní formule, která obsahuje pouze tyto spojky.

Příklady:

1. $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$;
2. $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$;
3. $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Universální systémy spojek

Věta

Tyto množiny spojek tvoří universální systémy.

i) $\{\neg, \vee\}$

ii) $\{\neg, \wedge\}$

iii) $\{\neg, \Rightarrow\}$

Důkaz

i) Dokážeme pro $\{\neg, \vee\}$ Nechť A, B lze vyjádřit jen pomocí $\neg, \vee$. Potom

(a) $(A \Rightarrow B) \models\!\!\!= (\neg A \vee B)$
(b) $(A \wedge B) \models\!\!\!= \neg(\neg A \vee \neg B)$
(c) $(A \Leftrightarrow B) \models\!\!\!= \big(\neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee B)\big)$

ii) Dokážeme pro $\{\neg, \Rightarrow\}$ Nechť A, B lze vyjádřit jen pomocí $\neg, \Rightarrow$. Potom

(a) $(A \vee B) \models\!\!\!= (\neg A \Rightarrow B)$
(b) $(A \wedge B) \models\!\!\!= \neg(A \Rightarrow \neg B)$
(c) $(A \Leftrightarrow B) \models\!\!\!= \neg\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A)\big)$

iii) Dokažte pro $\{\neg, \wedge\}$ jako cvičení.

Shefferův symbol a Peirceova šipka

Definice

Shefferův symbol neboli NAND, který značíme $\uparrow$, definujeme vztahem

$$A \uparrow B \boxminus \neg(A \wedge B).$$

Peirceovu šipku neboli NOR, kterou značíme $\downarrow$, definujeme vztahem

$$A \downarrow B \boxminus \neg(A \vee B).$$

Pravdivostní tabulka pro $\uparrow$ a $\downarrow$:

A	B	$A \uparrow B$	$A \downarrow B$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Shefferův symbol a Peirceova šipka

Věta

Shefferův symbol i Peirceova šipka tvoří universální systém spojek (jednoprvkový).

Důkaz

Nechť A, B lze vyjádřit jen pomocí Shefferova symbolu. Potom

(a) $\neg A \;\models\!\!\!\dashv\; \neg(A \wedge A) \;\models\!\!\!\dashv\; A \uparrow A$

(b) $A \vee B \;\models\!\!\!\dashv\; \neg(\neg A \wedge \neg B) \;\models\!\!\!\dashv\; \neg A \uparrow \neg B \;\models\!\!\!\dashv\; (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$

(c) $A \wedge B \;\models\!\!\!\dashv\; \neg\neg(A \wedge B) \;\models\!\!\!\dashv\; \neg(A \uparrow B) \;\models\!\!\!\dashv\; (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$

(d) $A \Rightarrow B \;\models\!\!\!\dashv\; \neg(A \wedge \neg B) \;\models\!\!\!\dashv\; A \uparrow \neg B \;\models\!\!\!\dashv\; A \uparrow (B \uparrow B)$

(e) $\Leftrightarrow$ vyjádříme analogicky s pomocí vztahu $A \Leftrightarrow B \;\models\!\!\!\dashv\; (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Pro $\{\downarrow\}$ dokažte na cvičení. $\square$

Disjunktivní normální tvar formule

Definice

- **Literál** je prvotní formule nebo negace prvotní formule.
- **Minterm** je literál nebo konjunkce několika literálů.
- Formule je v **disjunktivním normálním tvaru**, DNT, jestliže je mintermem nebo disjunkcí několika mintermů.

Příklady

- $A; \quad \neg A; \quad B$ - literály
- $A \wedge \neg B; \quad \neg A \wedge C \wedge B; \quad \neg C$ - mintermy
- $(A \wedge \neg B) \vee C$ - DNT (2 mintermy)
- $A; \quad \neg A; \quad A \vee B; \quad A \wedge \neg B$ - DNT

Konjunktivní normální tvar formule

Definice

- **Klausule** je literál nebo disjunkce několika literálů.
- Formule je v **konjunktivním normálním tvaru**, KNT, jestliže je klausulí nebo konjunkcí několika klausulí.

Příklady

- $A \vee \neg B$; $\neg A \vee C \vee B$; $\neg C$ - klausule
- $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge \neg C$ - KNT (3 klausule)
- $(A \vee \neg B) \wedge C$ - KNT (2 klausule)
- A; $\neg A$; $A \wedge \neg B$; $A \vee B$ - DNT i KNT!

Disjunktivní a konjunktivní normální tvar - příklad

Příklad

Nalezněte KNT a DNT formule

$$A \Rightarrow (\neg B \wedge C).$$

- $$\models\!\!\!\dashv \neg A \vee (\neg B \wedge C) \text{ - DNT}$$
- $$\models\!\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \text{ - KNT.}$$

Příklad

Kdo co učí? *Každý kdo neučí matematiku nebo fyziku, učí češtinu nebo historii.*
$(\neg M \vee \neg F) \Rightarrow (C \vee D) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg M \vee \neg F) \vee (C \vee D) \models\!\!\!\dashv (M \wedge F) \vee C \vee D$ – DNT

Disjunktivní a konjunktivní normální tvar

Příklady

Nalezněte DNT a KNT.

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \models\!\!\!\!\models \neg A \vee (B \Rightarrow C) \models\!\!\!\!\models \neg A \vee \neg B \vee C$ – DNT, KNT
- $\neg\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \models\!\!\!\!\models A \wedge \neg(B \Rightarrow C) \models\!\!\!\!\models A \wedge B \wedge \neg C$ – DNT, KNT
- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \models\!\!\!\!\models \neg(A \Rightarrow B) \vee C \models\!\!\!\!\models (A \wedge \neg B) \vee C$ – DNT
  $\models\!\!\!\!\models (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ – KNT
- $A \Leftrightarrow B \models\!\!\!\!\models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \models\!\!\!\!\models (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ – KNT
  $\models\!\!\!\!\models (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$
  $\models\!\!\!\!\models (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ – DNT
- $(A \Rightarrow B) \wedge B \models\!\!\!\!\models (\neg A \vee B) \wedge B \models\!\!\!\!\models B$ – DNT, KNT

Existence DNT a KNT

Věta

Ke každé formuli existuje formule logicky ekvivalentní, která je v DNT, a formule logicky ekvivalentní, která je v KNT.

Značení: $A \rightleftharpoons B \vee C$, A je ve tvaru $B \vee C$

Důkaz

Indukcí podle složitosti formule

(i) Je-li C prvotní formule, pak je v DNT i v KNT.

(ii) Indukční krok: C vznikne z formulí A, B podle definice formule (bod ii)).

Indukční předpoklad: Pro A existují formule A_d v DNT a A_k v KNT tak, že $A \models\!\!\!= A_d \models\!\!\!= A_k$.Pro B existují formule B_d v DNT a B_k v KNT tak, že $B \models\!\!\!= B_d \models\!\!\!= B_k$.

Chceme dokázat, že existují formule C_d v DNT a C_k v KNT tak, že $C \models\!\!\!= C_d \models\!\!\!= C_k$.

Dokážeme existenci C_d:

a) $C \rightleftharpoons \neg A \models\!\!\!= \neg A_k \rightleftharpoons C_d$, je v DNT.
b) $C \rightleftharpoons (A \vee B) \models\!\!\!= (A_d \vee B_d) \rightleftharpoons C_d$ je v DNT.
c) $C \rightleftharpoons (A \wedge B) \models\!\!\!= (A_d \wedge B_d)$. Z distributivního zák. získáme DNT C_d.
d) $C \rightleftharpoons (A \Rightarrow B) \models\!\!\!= (\neg A \vee B) \models\!\!\!= (\neg A_k \vee B_d) \rightleftharpoons C_d$ je v DNT.
e) $C \rightleftharpoons (A \Leftrightarrow B) \models\!\!\!= \big((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\big) \models\!\!\!= \big((A_d \wedge B_d) \vee (\neg A_k \wedge \neg B_k)\big)$. Z distributivních zákonů dostaneme disjunkci dvou DNT.

Úplný disjunktivní a konjunktivní normální tvar

Definice

- Formule je v **úplném disjunktivním normálním tvaru**, jestliže je v DNT, ve všech mintermech se vyskytují stejné prvotní formule a zároveň se v rámci jednoho mintermu žádná prvotní formule nevyskytuje dvakrát.
- Formule je v **úplném konjunktivním normálním tvaru**, jestliže je v KNT, ve všech klausulích se vyskytují stejné prvotní formule a v rámci jedné klausule se žádná prvotní formule nevyskytuje dvakrát.

Příklady

- $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$ - úplný DNT
- $(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$ - úplný KNT
- $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Hledání úplného DNT a KNT

- úplný DNT z DNT dostaneme doplněním chybějících prvotních formulí do mintermů na základě vztahu

$$A \mathrel{|}\!\!\models A \wedge \top \mathrel{|}\!\!\models A \wedge (B \vee \neg B) \mathrel{|}\!\!\models (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).$$

- úplný KNT z KNT dostaneme doplněním chybějících prvotních formulí do klausulí na základě vztahu

$$A \mathrel{|}\!\!\models A \vee \bot \mathrel{|}\!\!\models A \vee (B \wedge \neg B) \mathrel{|}\!\!\models (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B).$$

Věta

Ke každé formuli existuje formule logicky ekvivalentní, která je v úplném DNT, a formule logicky ekvivalentní, která je v úplném KNT.

Úplný DNT - příklad

Příklad

Nalezněte úplný DNT formule

$$(A \vee B) \Rightarrow (\neg B \wedge C).$$

Řešení:

DNT je $\mathrel{|\!\!=\!\!|} (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge C)$.

$$\mathrel{|\!\!=\!\!|} (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \mathrel{|\!\!=\!\!|}$$

$$\mathrel{|\!\!=\!\!|} (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee$$
$$\vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \mathrel{|\!\!=\!\!|}$$
$$\mathrel{|\!\!=\!\!|} (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$$

Úplný DNT a pravdivostní tabulka

Z předchozího příkladu víme, že

$$(A \vee B) \Rightarrow (\neg B \wedge C) \models\!\!\!\!\dashv$$

$$\boxed{(\neg A \wedge \neg B \wedge C)} \vee \boxed{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)} \vee \boxed{(A \wedge \neg B \wedge C)}$$

Pravdivostní tabulka:

A	B	C	$(A \vee B) \Rightarrow (\neg B \wedge C)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0

Pravdivostní tabulka:

A	B	C	$(A \vee B) \Rightarrow (\neg B \wedge C)$
1	1	1	0

Hledání úplného KNT - příklad

Příklad

Nalezněte úplný KNT formule

$$A \Rightarrow (\neg B \wedge C).$$

Řešení: $\models\!\!\!\!\dashv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$. DNT
$\models\!\!\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C)$. KNT

$$\models\!\!\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C) \models\!\!\!\!\dashv$$

$$\models\!\!\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge$$
$$\wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \models\!\!\!\!\dashv$$
$$\models\!\!\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

Což je hledaný úplný KNT.

Úplný KNT a pravdivostní tabulka

Z předchozího příkladu víme, že

$$A \Rightarrow (\neg B \wedge C) \models\!\mid$$

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \ \wedge \ (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \ \wedge \ (\neg A \vee B \vee C)$$

Pravdivostní tabulka:

	A	B	C	1.	2.	3.	$A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$
$(A \wedge B \wedge C) \ \rightarrow$	1	1	1	1	0	1	0
$(A \wedge B \wedge \neg C) \ \rightarrow$	1	1	0	0	1	1	0
	1	0	1	1	1	1	1
$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \ \rightarrow$	1	0	0	1	1	0	0
	0	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	1	1	1
	0	0	0	1	1	1	1

Negace klausulí úplného KNT ukazují řádky pravdivostní tabulky ve kterých je formule nepravdivá.

$$\neg(A \Rightarrow (\neg B \wedge C)) \models\!\mid (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

Ohodnocení, pro něž je formule pravdivá

Příklady

Určete, pro kolik a pro která ohodnocení jsou následující formule pravdivé:

- $(A \Rightarrow B) \wedge B \models\!\!\!= (\neg A \vee B) \wedge B \models\!\!\!= B \models\!\!\!= (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$ (2 ohodnocení)
- $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \models\!\!\!= \neg A \vee (B \Rightarrow C) \models\!\!\!= \neg A \vee \neg B \vee C$ (7 ohodnocení.)
- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \models\!\!\!= \neg(A \Rightarrow B) \vee C \models\!\!\!= (A \wedge \neg B) \vee C$
  $\models\!\!\!= (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
  $\models\!\!\!= (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
  (5 ohodnocení)
- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \models\!\!\!= \neg(A \Rightarrow B) \vee C \models\!\!\!= (A \wedge \neg B) \vee C \models\!\!\!= (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$
  $\models\!\!\!= (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$ (5 ohodnocení)
- $(A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow D)) \vee E \models\!\!\!= \neg A \vee ((B \wedge C) \Rightarrow D) \vee E$
  $\models\!\!\!= \neg A \vee (\neg(B \wedge C) \vee D) \vee E \models\!\!\!= \neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D \vee E$ (31 ohodnocení)

Poznámky k DNT a KNT

- Při přechodu od KNT k DNT a naopak užíváme distributivní zákony!

$$(G \wedge \neg H) \vee (\neg I \wedge J \wedge K) \models\!\!\!\!\dashv$$
$$\models\!\!\!\!\dashv (G \vee \neg I) \wedge (G \vee J) \wedge (G \vee K) \wedge (\neg H \vee \neg I) \wedge (\neg H \vee J) \wedge (\neg H \vee K).$$

- Kontradicke a tautologie vynecháváme.

$$(A \vee B) \wedge \neg B \models\!\!\!\!\dashv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \models\!\!\!\!\dashv A \wedge \neg B$$
$$A \wedge (B \vee \neg B) \models\!\!\!\!\dashv A.$$

- Negace DNT je KNT **negace formule** (nikoli KNT původní formule!) a naopak.

$$\neg\big((G \wedge \neg H) \vee (\neg I \wedge J \wedge K)\big) \models\!\!\!\!\dashv \neg(G \wedge \neg H) \wedge \neg(\neg I \wedge J \wedge K) \models\!\!\!\!\dashv$$
$$\models\!\!\!\!\dashv (\neg G \vee H) \wedge (I \vee \neg J \vee \neg K)$$

Úplný DNT a KNT $\times$ logická ekvivalence

Tvrzení

- *Výrokové formule A a B jsou logicky ekvivalentní právě tehdy, když jejich úplné disjunktivní tvary obsahují stejné mintermy.*
- *Výrokové formule A a B jsou logicky ekvivalentní právě tehdy, když jejich úplné konjunktivní tvary obsahují stejné mintermy*

Příklad

- $(A \wedge B) \Rightarrow C \models\!\dashv \neg(A \wedge B) \vee C \models\!\dashv \neg A \vee \neg B \vee C$
- $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \models\!\dashv \neg A \vee C \vee \neg B \vee C \models\!\dashv \neg A \vee \neg B \vee C$

Tedy

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \models\!\dashv (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$$

Úplný DNT a KNT $\times$ logický důsledek

Pamatujme, že $A \wedge B \models A \models A \vee B$

Věta

Mějme výrokové formule A a B.

- *Nechť A_d je úplný DNT formule A a B_d je úplný DNT formule B a navíc A_d a B_d obsahují stejné prvotní formule.*
  Potom $A \models B$ právě tehdy, když jsou všechny mintermy A_d obsaženy v B_d.
- *Nechť A_k je úplný KNT formule A a B_k je úplný KNT formule B a navíc A_k a B_k obsahují stejné prvotní formule. Potom $A \models B$ právě tehdy, když jsou všechny klausule B_k obsaženy v A_k.*

Příklad

- $(A \wedge B) \Rightarrow C \models\!\!\!= \neg A \vee \neg B \vee C$
- $(A \vee B) \Rightarrow C \models\!\!\!= \neg(A \vee B) \vee C \models\!\!\!= (\neg A \wedge \neg B) \vee C \models\!\!\!= (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \models\!\!\!= (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$

Tedy

$$(A \vee B) \Rightarrow C \models (A \wedge B) \Rightarrow C$$

Domácí úkol

Uvažujme formuli

$$\Big(\cdots\big((((A_1 \downarrow A_2) \Rightarrow A_3) \downarrow A_4) \Rightarrow A_5\big)\cdots \downarrow A_{2k}\Big) \Rightarrow A_{2k+1},$$

kde k je přirozené číslo.

Pro kolik ohodnocení a pro která je tato formule pravdivá?
(Nestačí pouze číslo! Musíte vysvělit a naznačit postup, jak jste k němu dospěli.
Každý sám za sebe!)