Matematická logika
Přednáška č. 4

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Domácí úkol (Commedia dell'Arte) – řešení

Buď Kolombína netančí nebo se Harlekýn směje. Jestliže Pulcinella není smutná, pak Pierot nepláče. Není pravda, že se Harlekýn směje a Pierot nepláče. Jestliže je Dottore přítomen, pak Pulcinella není smutná. Není pravda, že Kolombína netančí. *Co se děje?*

Řešení:

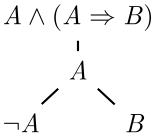
$$
\begin{aligned}
&(\neg K \vee H) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg I) \wedge \neg(H \wedge \neg I) \wedge (D \Rightarrow \neg P) \wedge \neg\neg K \\
&\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}\; K \wedge (\neg K \vee H) \wedge (\neg H \vee I) \wedge (\neg I \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg D) \\
&\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}\; K \wedge H \wedge (\neg H \vee I) \wedge (\neg I \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg D) \\
&\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}\; K \wedge H \wedge I \wedge (\neg I \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg D) \\
&\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}\; K \wedge H \wedge I \wedge P \wedge (\neg P \vee \neg D) \\
&\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}\; K \wedge H \wedge I \wedge P \wedge \neg D
\end{aligned}
$$

Obsah čtvrté přednášky

- Sémantické stromy.
- Splnitelná a sporná teorie.
- Logický důsledek teorie.

Sémantické stromy

Představují grafickou reprezentaci formulí výrokové logiky pomocí stromů.



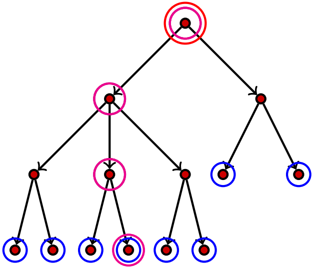
Umožňují:

- Nalézt DNT, případně úplný DNT formule.
- Rozhodnout o splnitelnosti formule.
- Ověřovat logické důsledky.

Poznámka - Co to je strom?

Uspořádaný **strom** je množina uzlů a hran tak, že platí:

- **Hrany** spojují **uzly**.
- Hrana vede od **předchůdce** k **potomkovi**.
- Právě jeden uzel nemá předchůdce, nazývá se **kořen**.
- Všechny ostatní uzly mají předchůdce.
- Uzly, které nemají potomka, se nazývají **koncové**.
- **Cesta** je posloupnost uzlů spojených hranami.
- Mezi dvěma uzly existuje právě jedna cesta.
- **Větev** je cesta od kořene ke koncovému uzlu.



Konstrukce sémantických stromů I.

Konjunkce

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

Disjunkce

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array}$$

Negace konjunkce

$$\neg(A \wedge B) \models\!\!\!\!= \neg A \vee \neg B$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B) & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

Negace disjunkce

$$\neg(A \vee B) \models\!\!\!\!= \neg A \wedge \neg B$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Konstrukce sémantických stromů II.

Implikace

$$A \Rightarrow B \models\!\dashv \neg A \vee B$$

$$\begin{array}{ccc} & A \Rightarrow B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & B \end{array}$$

Ekvivalence

$$A \Leftrightarrow B \models\!\dashv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\begin{array}{ccc} & A \Leftrightarrow B & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ B & & \neg B \end{array}$$

Negace implikace

$$\neg(A \Rightarrow B) \models\!\dashv A \wedge \neg B$$

$$\begin{array}{c} \neg(A \Rightarrow B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Negace ekvivalence

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \models\!\dashv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \Leftrightarrow B) & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ | & & | \\ \neg B & & B \end{array}$$

Příklad

Příklad

Vytvoříme sémantický strom pro formuli $A \wedge (A \Rightarrow B)$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & A \wedge (A \Rightarrow B) & \\
 & | & \\
 & A & \\
 & | & \\
 & A \Rightarrow B & \\
/ & & \backslash \\
\neg A & & B
\end{array}
$$

Což můžeme zkráceně zapsat jako:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \color{red}{A} & \\
/ & & \backslash \\
\neg A & & \color{red}{B} \\
| & & \\
\perp & &
\end{array}
$$

Sémantický strom - definice

Definice

Sémantický strom formule A je uspořádaný strom, jehož kořenem je formule A, v uzlech jsou její podformule, a je sestrojen v souladu s dříve uvedenými pravidly.

- **Uzavřená větev** je větev stromu, která obsahuje některou prvotní formuli i její negaci. Na její konec doplníme $\perp$.
- **Otevřená větev** je větev, která není uzavřená.
- **Uzavřený strom** má všechny větve uzavřené.
- **Úplná větev** znamená, že všechny formule vyskytující se v jejích uzlech jsou použity a rozebrány na literály.
- **Úplný strom** znamená, že všechny větve jsou buď uzavřené nebo otevřené úplné.

Úplné sémantické stromy

Věta

Ke každé formuli existuje její úplný sémantický strom.

Důkaz

Indukcí dle počtu binárních spojek.

(i) Prvotní formule i její negace tvoří úplný strom.

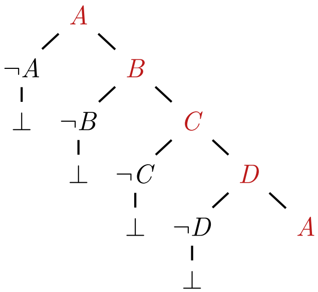
(ii) Předpokládáme, že platí pro A, B. Pro $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B$ a $A \Leftrightarrow B$ také pro $\neg(A \wedge B), \neg(A \vee B), \neg(A \Rightarrow B)$ a $\neg(A \Leftrightarrow B)$ strom sestrojíme aplikací pravidel konstrukce stromů pro příslušné spojky.

□

Příklad

Příklad

Vytvořte sémantický strom formule
$A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow A)$.



$\mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}\ A \wedge B \wedge C \wedge D$

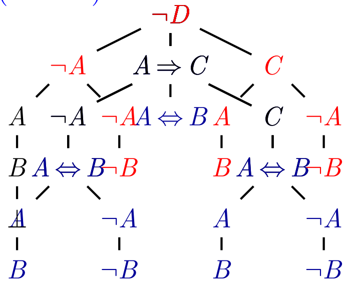
Příklad

Příklad

Nalezněte sémantický strom a DNT následující formule:

$$\neg\Big(\big((A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)\big) \Rightarrow D\Big)$$

Upravíme na $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge \neg D$.



$$\models\!\!\!\!\!\!\dashv \; (\neg D \wedge \neg A \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge C \wedge A \wedge B) \vee (\neg D \wedge C \wedge \neg A \wedge \neg B)$$

Úplné DNT:

$$(\neg D \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg D \wedge C \wedge A \wedge B) \vee (\neg D \wedge C \wedge \neg A \wedge \neg B)$$

Sémantické stromy a DNT

Nechť $A_{\mathcal{S}}$ je formule, která vznikne disjunkcí mintermů, které získáme konjunkcí literálů nacházejících se na jedné větvi.

Věta

Formule $A_{\mathcal{S}}$ je disjunktivní normální tvar formule A.

Důkaz

Formule $A_{\mathcal{S}}$ je jistě v DNT. Zbývá dokázat, že $A \models\!\!\!= A_{\mathcal{S}}$.

- Indukcí podle počtu binárních spojek.
- V každém kroku užíváme logicky ekvivalentních úprav.
- Indukční krok pro $\vee$ je snadný.
- Indukční krok pro $\wedge$ pomocí distributivních zákonů.

$\square$

Důsledek

Formule je splnitelná, právě tehdy když její sémantický strom má alespoň jednu otevřenou větev.

Commedia dell'Arte

$$(\neg K \vee H) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg I) \wedge \neg(H \wedge \neg I) \wedge (D \Rightarrow \neg P) \wedge \neg\neg K$$

- K
  - $\neg K$
    - $\perp$
  - H
    - $\neg H$
      - $\perp$
    - I
      - P
        - $\neg D$
        - $\neg P$
          - $\perp$
      - $\neg I$
        - $\perp$

$$K \wedge H \wedge I \wedge P \wedge \neg D$$

Teorie

Definice

Množina formulí se nazývá **teorie**.

Příklad:
$T_1 = \{A, B, A \wedge B\}$; $T_2 = \{C \vee B, D \Rightarrow A, A\}$; $T_3 = \{A, \neg A\}$.

Definice

- Teorie je **splnitelná**, právě když existuje takové ohodnocení prvotních formulí, pro které jsou všechny formule teorie pravdivé.
- Teorie je **sporná**, právě když není splnitelná.

Příklad:
$T_1 = \{A, B, A \wedge B\}$ je splnitelná.
$T_3 = \{A, \neg A\}$ je sporná.

Splnitelná a sporná teorie

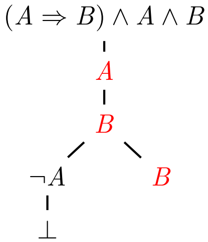
Tvrzení

Nechť $T = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *je konečná teorie*

i) *Teorie* T *je splnitelná, právě když je formule* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ *splnitelná.*

ii) *Teorie* T *je sporná, právě když je* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ *kontradikce.*

Příklad. $T = \{A \Rightarrow B, A, B\}$

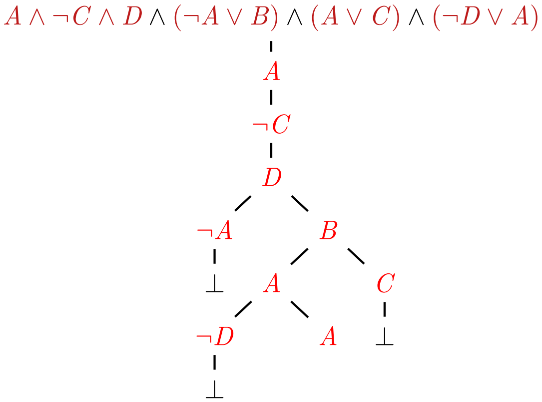


$\models A \wedge B$. T je splněna (pro $\langle 1, 1\rangle$).

Splnitelnost teorie

Příklad

Je teorie $\{A \Rightarrow B, A \vee C, \neg C \wedge D, D \Rightarrow A, A\}$ splnitelná?



$\models A \wedge B \wedge \neg C \wedge D$. Splnitelná pro $\langle 1, 1, 0, 1 \rangle$.

Logický důsledek teorie

Definice

Formule B je **logickým důsledkem** teorie T, značíme $T \models B$, právě když pro každé ohodnocení, v němž jsou všechny formule teorie T pravdivé, je i B pravdivá.

Tvrzení

Nechť $T = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ je konečná teorie B je formule. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:

i) *Formule B je logickým důsledkem teorie T, $T \models B$,*

ii) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$.

iii) $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ *je tautologie,*

iv) $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \neg B$ *je kontradikce.*

Příklad.

i) $A \Rightarrow B, A \models B$, právě když

ii) $(A \Rightarrow B) \wedge A \models B$, právě když

iii) $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ je tautologie , právě když

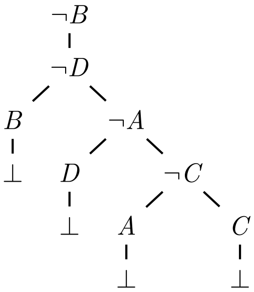
iv) $(A \Rightarrow B) \wedge A \wedge \neg B$ je kontradikce.

Logický důsledek

Příklad

Platí *konstruktivní dilema*, tj. platí $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, A \vee C \models B \vee D$?

Ekvivalentně: Je formule $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \vee C) \wedge \neg(B \vee D)$ splnitelná?
Upravíme: $(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (A \vee C) \wedge \neg B \wedge \neg D$



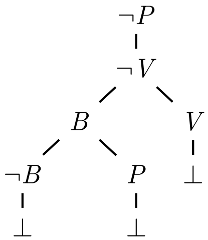
Není splnitelná. Jedná se tedy o logický důsledek.

Logický důsledek

Příklad

Štěpán jel buď autobusem (B) nebo vlakem (V). Jestliže jel autobusem nebo vlastním autem (A), přijel pozdě (P). Nepřijel pozdě. Tudíž jel vlakem.

Chceme: $B \vee V, (B \vee A) \Rightarrow P, \neg P \models V$
Zkoumáme: $(B \vee V) \wedge \big(\neg(B \vee A) \vee P\big) \wedge \neg P \wedge \neg V$
Upravíme: $(B \vee V) \wedge (\neg B \vee P) \wedge (\neg A \vee P) \wedge \neg P \wedge \neg V$



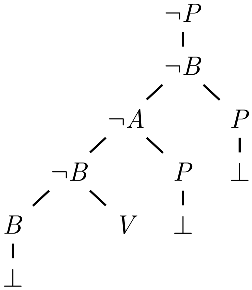
Formule je kontradikce. Tudíž logický důsledek platí.

Logický důsledek

Příklad

Štěpán jel buď autobusem (B) nebo vlakem (V). Jestliže jel autobusem nebo vlastním autem (A), přijel pozdě (P). Nepřijel pozdě. Tudíž jel autobusem.

Chceme: $B \vee V, (B \vee A) \Rightarrow P, \neg P \models B$
Zkoumáme: $(B \vee V) \wedge \big(\neg(B \vee A) \vee P\big) \wedge \neg P \wedge \neg B$
Upravíme: $(B \vee V) \wedge (\neg B \vee P) \wedge (\neg A \vee P) \wedge \neg P \wedge \neg B$



Nejedná se o logický důsledek. Protipříklad: $\neg B \wedge \neg A \wedge \neg P \wedge V$.

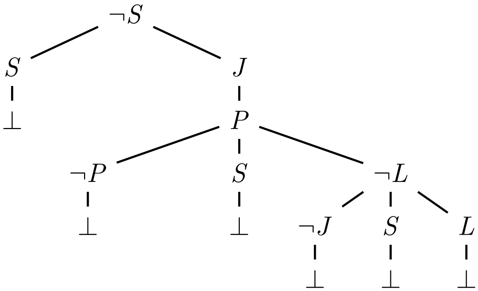
Logický důsledek

Příklad

Jestliže Jones nepotkal Smithe (J), pak Smith je vrahem (S) nebo Jones lže (L). Jestli Smith není vrahem, pak ho Jones nepotkal a vražda se stala po půlnoci (P). Jestli se vražda stala po půlnoci, pak byl Smith vrahem nebo Jones mluví pravdu. Tudíž je Smith vrahem.

Chceme: $J \Rightarrow (S \vee L),\ \neg S \Rightarrow (J \wedge P),\ P \Rightarrow (S \vee \neg L) \models S$

Zkoumáme: $(\neg J \vee S \vee L) \wedge \big(S \vee (J \wedge P)\big) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg L) \wedge \neg S$



Formule je kontradikce. Ano, Smith je vrahem.

Věta o kompaktnosti

Věta

Teorie T je splnitelná, právě když každá její konečná podmnožina je splnitelná.

Příklad:

- Graf je k-obarvitelný právě tehdy, když je k-obarvitelný každý jeho konečný podgraf.
- Existence nestandardního modelu přirozených čísel.

Důsledek

Nechť T je teorie, A je formule. Pak platí $T \models A$, právě když existuje konečná podmnožina $S \subseteq T$ taková, že $S \models A$.

Důkaz

- Nechť $T \models A$. Potom $T \cup \{\neg A\}$ není splnitelná.
- Tedy existuje konečná $S' \subseteq T \cup \{\neg A\}$, která není splnitelná.
- Jestliže $S' \subseteq T$ není splnitelná, pak $S' \models A$ a navíc T není splnitelná.
- Pokud však T je splnitelná, pak musí být $\neg A \in S'$. Označme $S = S' \setminus \{\neg A\}$. Tedy $S' = S \cup \{\neg A\}$ není splnitelná a $S \models A$.

Domácí úkol

Nalezněte příklad logické dedukce, v níž minimálně ze tří vět je odvozena věta čtvrtá. Nalezněte jej v učebnici matematiky, ve sbírce zákonů, v knize, ve filmu nebo si jej vymyslete. Zapište jej formálně ve výrokové logice a zdůvodněte, že se skutečně jedná o logický důsledek.