Matematická logika
Přednáška č. 6

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Obsah šesté přednášky

- Typy matematických důkazů
- Predikátová logika
- Jazyk, term, formule
- Otevřené a uzavřené formule
- Interpretace jazyka
- Příklady jazyků a jejich interpretací

Důkaz implikace

Chceme dokázat, že $A \Rightarrow B$ je tautologie neboli $A \models B$

- Přímý důkaz: dokážeme $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, ...A_n \Rightarrow B$
  $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B \models A \Rightarrow B$
- Nepřímý důkaz: dokážeme $\neg B \Rightarrow \neg A$
  $\neg B \Rightarrow \neg A \mathrel{=\!\!\mid\!\models} A \Rightarrow B$
- Důkaz sporem: dokážeme $A \wedge \neg B$ je kontradikce
  Tedy $\neg(A \wedge \neg B)$ je tautologie a $\neg(A \wedge \neg B) \mathrel{=\!\!\mid\!\models} A \Rightarrow B$.
- Důkaz rozborem případů: dokážeme $A \Rightarrow (D \vee E), D \Rightarrow B, E \Rightarrow B$
  $A \Rightarrow (D \vee E), D \Rightarrow B, E \Rightarrow B \models A \Rightarrow B$

Důkaz ekvivalence

- Máme dokázat ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ je tautologie neboli $A \models\!\!\!\!\models B$
  Dokážeme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \models\!\!\!\!\models A \Leftrightarrow B$

- Máme dokázat několik ekvivalencí, např. $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D$
  Dokážeme $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D, D \Rightarrow A$
  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow A) \models\!\!\!\!\models A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D$

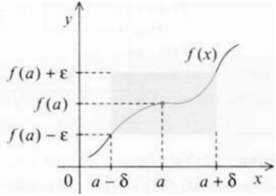
Příklady důkazů

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$

- Přímý důkaz. *Součin dvou lichých čísel je lichý.*
  Jestliže m, n jsou lichá čísla, pak $m \cdot n$ je liché číslo.
  Jestliže $m = 2k + 1, n = 2l + 1$, pak
  $m \cdot n = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1$, což jest liché číslo.
- Nepřímý důkaz. *Jestliže $m \cdot n$ je liché číslo, pak m i n jsou lichá čísla.*
  Nechť $m = 2k$. Pak $m \cdot n = 2k \cdot n$, což jest sudé.
- Ekvivalence. *Součin dvou čísel je lichý, právě tehdy a jen tehdy, když jsou obě tato čísla lichá.*
  Viz předchozí dvě tvrzení.
- Důkaz sporem. *$\sqrt{2}$ není racionální číslo.*
  Kdyby $\sqrt{2}$ bylo racionální, pak ex. m, n, celá nesoudělná kladná čísla tak, že $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Tedy $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2.n^2$. Tedy m je sudé. Ex. k, že $m = 2k$.
  Tedy i $m^2 = 4k^2 = 2.n^2$ neboli $2k^2 = n^2$. Je tedy n sudé. Spor s předpokladem, že m, n jsou nesoudělná. Tedy ani $\sqrt{2}$ není racionální.

Predikátová logika

Jazyk matematiky.



Funkce f je spojitá v bodě a, právě když pro každé ϵ platí, jestliže je větší než 0, pak existuje δ větší než 0 takové, že pro každé x platí, že jestliže $|x-a|$ je menší než δ, potom $|f(x)-f(a)|$ je menší než ϵ.

- proměnné: x, ϵ, δ
- konstanty: $0, a$
- unární funkce f: $f(x), f(a)$, binární funkce rozdílu $x-a, f(x)-f(a)$, unární funkce absolutní hodnoty $|x-a|, |f(x)-f(a)|$,
- binární predikát $>$: $\epsilon > 0, \delta > 0, |x-a| < \delta, |f(x)-f(a)| < \epsilon$ vyjadřuje vztahy mezi konstantami, proměnnými a funkčními hodnotami,
- logické spojky: $\Leftrightarrow$ „funkce je spojitá, právě když“, $\Rightarrow$ „jestliže ... , potom... “,
- kvantifikátory: „pro každé“ $(\forall\epsilon)$, $(\forall x)$, „existuje“ $(\exists\delta)$

$$(\forall\epsilon)(\epsilon > 0 \Rightarrow (\exists\delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon))).$$

Jazyk predikátové logiky

Definice

Jazyk predikátové logiky obsahuje: logické symboly a mimologické symboly

- symboly pro proměnné $(x, y, z, \ldots)$,
- symboly pro logické spojky $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$,
- symboly pro kvantifikátory
  - obecný – (velký) „pro všechny", „všichni", $(\forall)$
  - existenční – (malý) „některé", „existuje", $(\exists)$
- pomocné symboly (závorky),
- symboly pro konstanty $(K, L, \ldots)$,
- symboly pro predikáty $(p, q, r, \ldots)$ - dána četnost,
- symboly pro funkce $(f, g, \ldots)$ - dána četnost

Určením jazyka L myslíme určení nějaké množiny mimologických symbolů (tj. konstant, funkcí a predikátů).

Term

Definice

Řetězec symbolů v jazyce predikátové logiky nazýváme **term** jestliže vznikne použitím následujících pravidel v konečně mnoha krocích:

I. Každá proměnná a konstanta je term.

II. Jsou-li $t_1, ..., t_n$ termy a f je n-ární funkční symbol, potom $f(t_1, ..., t_n)$ je term.

Příklad: Nechť $L = \{f(x), +, a\}$, kde f je unární funkce, $+$ je binární funkce, a je konstanta.

- a, x
- $f(a), f(x), x + y,$
- $f(x) + (f(a) + y)$

Formule

Definice

Formule v jazyce predikátové logiky je posloupnost symbolů, která vznikne aplikací následujících pravidel v konečně mnoha krocích:

I. Je-li p n-ární predikátový symbol a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $p(t_1, ..., t_n)$ je formule. Takto vzniklou formuli nazýváme **atomická formule**.

II. Jsou-li A a B formule, pak $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ jsou formule .

III. Je-li x proměnná a A formule, pak $(\forall x)A$ a $(\exists x)A$ jsou formule.

Příklad: $L = \{f(x), +, p(x), a\}$, kde f je unární funkce, $+$ je binární funkce, p je unární predikát, a je konstanta.

- $p(a), p(x), p(f(x))$ - atomické formule
- $\neg(p(x) \wedge p(f(a)))$
- $(\exists x)p(x + y)$
- $(\forall x)(\exists y)(\neg p(a) \Rightarrow p(f(y) + x))$

Formační strom

Formační strom formule zachycuje její strukturu. Ve svých koncových uzlech má atomické formule, do vyšších pater se postupně dostáváme užitím pravidel (ii) a (iii) z definice formule.

$L = \{l(x), k(x), E\}$, kde l, k jsou unární predikáty, E je konstanta.

$$k(E) \wedge (\neg l(E) \Leftrightarrow (\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg l(x)))$$

$$K(E) \qquad \neg l(E) \Leftrightarrow (\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg l(x))$$

$$\neg l(E) \qquad (\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg l(x))$$

$$l(E) \qquad k(x) \Rightarrow \neg l(x)$$

$$k(x) \qquad \neg l(x)$$

$$l(x)$$

Volné a vázané proměnné

Definice

- **Podformule** B je část formule A, která je sama formulí.
- Proměnná x má **vázaný výskyt** v A právě, když se vyskytuje v její podformuli ve tvaru $(\forall x)B(x)$ nebo $(\exists x)B(x)$
- Výskyt proměnné v A, který není vázaný, je **volný výskyt**.

Příklad: $L = \{p(x), k(x), r(x, y)\}$, kde p, k jsou unární predikáty, r je binární predikát.

- $(\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg l(x))$
  Podformule: $k(x)$, $l(x)$ (atomické formule), $\neg l(x)$,$k(x) \Rightarrow \neg l(x)$
- $p(x) \Rightarrow r(y, x)$ - x, y volný výskyt
- $(\exists x)r(y, x)$ - x vázaný, y volný výskyt
- $(\forall y)(\exists x)r(y, x)$ - x, y vázaný výskyt

Otevřené a uzavřené formule

Definice

- **Uzavřená** formule obsahuje pouze vázané proměnné, **sentence.**
- **Otevřená** formule obsahuje pouze volné proměnné.

Příklad

- $p(x) \Rightarrow r(y, x)$ - otevřená formule
- $x + y = y + x$ - otevřená formule
- $(\exists x) r(x, y)$ - ani otevřená a ani uzavřená formule,
- $(\forall y)(\exists x) r(x, y)$ - uzavřená formule,
- $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$ - uzavřená formule, sentence
- $2 + 3 = 5$ - otevřená i uzavřená

Proměnné, které mají vázaný výskyt jsou „pomocné.“

Interpretace jazyka

Jazyk $L = \{K, \dots, p \dots, f, \dots\}$: konstanty, predikáty, funkce

Definice

Interpretace (realizace) $\mathcal{M} = \langle M, \dots, K_{\mathcal{M}}, \dots, p_{\mathcal{M}}, \dots, f_{\mathcal{M}}, \dots \rangle$ jazyka L obsahuje

i) neprázdnou množinu M, kterou nazýváme **universum** interpretace,

ii) je-li K konstanta, pak její interpretaci $K_{\mathcal{M}} \in M$,

iii) je-li p n-ární predikát, pak n-ární relaci $p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ jako jeho interpretaci,

iv) je-li f funkce mající n argumentů, pak funkci $f_{\mathcal{M}} : M^n \to M$ jako její interpretaci.

Interpretace jazyka

Příklad

$L = \{D, J, p(x), v(x,y)\}$, D, J – konstanty, $p(x)$ – unární predikát, $v(x,y)$ – binární predikát

$\mathcal{N}$ je interpretace jazyka L

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,
- $J_{\mathcal{N}} = 1$
- $D_{\mathcal{N}} = 10$
- $v_{\mathcal{N}}(x,y)$ – $x > y$
- $p_{\mathcal{N}}(x)$ - x je prvočíslo,

Formule a jejich význam v interpretaci

- $v(D, J)$
- $(\forall x)(\exists y)v(y,x)$
- $(\forall x)(\forall y)(v(x,y) \Rightarrow v(y,x))$
- $(v(x,y) \wedge v(y,z)) \Rightarrow v(x,z)$
- $(\exists x)(p(x) \wedge v(x,D))$

Interpretace jazyka

Příklad

$L = \{D, J, p(x), v(x,y)\}$, D, J – konstanty, $p(x)$ – unární predikát, $v(x,y)$ – binární predikát

$\mathcal{M}$ je jiná interpretace jazyka L

- $M =$ studenti FIT
- $p_{\mathcal{M}}(x)$ – x je z Prahy,
- $v_{\mathcal{M}}(x,y)$ – x zná y,
- $D_{\mathcal{M}}$ – Daniel Škvor
- $J_{\mathcal{M}}$ – Jan Havránek

Formule a jejich význam v interpretaci

- $v(J,D)$
- $(\forall x)(\exists y)v(y,x)$
- $(\forall x)(\forall y)(v(x,y) \Rightarrow v(y,x))$
- $(v(x,y) \wedge v(y,z)) \Rightarrow v(x,z)$
- $(\exists x)(p(x) \wedge v(J,x))$

Jazyk aritmetiky

Příklad

$L = \{+, \cdot, 0, =\}$,
$+, \cdot$ - binární funkční symboly, 0 - konstanta, $=$ - binární predikátový symbol

Interpretace: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $+_{\mathcal{N}}, \cdot_{\mathcal{N}}, 0_{\mathcal{N}}$ v obvyklém významu
Termy: $0, x, (x \cdot y) + z, \dots$
Formule:

- $(\exists y)(x = y + y)$ x je sudé.
- $\neg(\exists y)(x = y + y)$ x je liché.
- x dělí y $(\exists z)(x = y \cdot z)$
- x je číslo složené $(\exists y)(\exists z)((x = y \cdot z) \wedge \neg(y = x) \wedge \neg(z = x))$.
- Sčítání je komutativní $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$

Jazyk uspořádání

Příklad

$L = \{<, =\}$,
$<, =$ - binární predikátové symboly

Interpretace: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $<_{\mathcal{N}}, =_{\mathcal{N}}$ v obvyklém významu.
Termy: $x, y, \dots$
Formule:

- $x \leq y \quad x < y \vee x = y$.
- Existuje nejmenší číslo. $(\exists x)(\forall y)(x < y \vee x = y)$.
- Neexistuje největší číslo. $(\forall y)(\exists x)(y < x)$.
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x < y) \wedge (y < z)) \Rightarrow (x < z)$ Uspořádání $<$ je transitivní.
- $(\forall x)(\forall y)(x < y) \Rightarrow (\exists z)((x < z) \wedge (z < y))$ Uspořádání $<$ je husté.

Jazyk teorie množin

Příklad

$L = \{\in\}$

$\in$ binární predikátový symbol, $x \in y$

Termy: $x, y, z, \dots$

Postupně zavádíme nové symboly (zkratky) - konzervativní rozšíření jazyka

- $u \subseteq v$ - $(\forall x)((x \in u) \Rightarrow (x \in v))$
- $u = v$ - $(\forall x)(x \in u \Leftrightarrow x \in v)$
- $u = v \cap w$ - $(\forall x)(x \in u) \Leftrightarrow ((x \in v) \wedge (x \in w))$
- $u = v \cup w$ - $(\forall x)(x \in u) \Leftrightarrow ((x \in v) \vee (x \in w))$
- $u = \emptyset$ - $(\forall x)\neg(x \in u)$
- $u = \{x\}$ - $(\forall v)(v \in u \Leftrightarrow v = x)$
- $u = \{x, y\}$ - $(\forall v)(v \in u \Leftrightarrow (v = x \vee v = y))$

Jazyk přirozený

Příklad

$L = \{J, D, p(x), z(x, y)\}$
Interpretace M - množina všech lidí, konstanty: J – Johanka, D – Daniel, predikáty: $p(x)$ – x je z Prahy, $z(x, y)$ – x zná y.

- $p(J) \wedge \neg p(D)$ – Johanka je z Prahy a Daniel není z Prahy.
- $(\exists x)p(x)$ – Někdo je z Prahy.
- $(\forall x)p(x)$ – Všichni jsou z Prahy.
- $(\forall x)\neg p(x)$ – Nikdo není z Prahy.
- $z(D, J)$ – Daniel zná Johanku.
- $(\exists x)z(D, x)$ – Dan někoho zná.
- Někdo zná Dana. – $(\exists x)z(x, D)$
- Johanka zná každého. – $(\forall x)z(J, x)$
- Všichni znají Johanku. – $(\forall x)z(x, J)$
- Každý někoho zná. – $(\forall x)(\exists y)z(x, y)$
- Nikdo nikoho nezná. – $(\forall x)(\forall y)\neg z(x, y)$

Kvantifikátory u tvrzení se dvěma predikáty

- Všechny kočky jsou šelmy. – $(\forall x)(k(x) \Rightarrow s(x))$
- Některé kočky jsou šelmy. – $(\exists x)(k(x) \wedge s(x))$
- Žádné kočky nejsou šelmy. - $(\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg s(x))$
- Některé kočky nejsou šelmy. - $(\exists x)(k(x) \wedge \neg sl(x))$

	Kladné	**Záporné**
Obecné	**A** $(\forall x)(k(x) \Rightarrow s(x))$ *Všechny kočky jsou šelmy.*	**E** $(\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg s(x))$ *Žádné kočky nejsou šelmy.*
Částečné	**I** $(\exists x)(k(x) \wedge s(x))$ *Některé kočky jsou šelmy.*	**O** $(\exists x)(k(x) \wedge \neg s(x))$ *Některé kočky nejsou šelmy.*

Epimenidův paradox

Příklad

Kréťan Epimenidés řekl, že všichni Kréťané jsou lháři.

Jazyk $L = \{k(x), l(x), E\}$, kde p, k jsou unární predikáty, E je konstanta.
Interpretace $\mathcal{M}$: M - množina lidí, $k(x)$ - x je Kréťan, $l(x)$ - x lže, E - Epimenidés.

- $k(E)$ - Epimenidés je Kréťan.
- $l(E)$ - Epimenidés lže.
- $\neg l(E)$ - Epimenidés mluví pravdu.
- $(\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x))$ - Všichni Kréťané jsou lháři.
- $\neg(E) \Leftrightarrow (\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x))$ - Epimenidés řekl, že všichni Kréťané jsou lháři.

$$k(E) \wedge (\neg l(E) \Leftrightarrow (\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg l(x)))$$

Dvojí zápor v češtině

Obecná záporná tvrzení (Aristotelský typ **E**):

- Žádná kočka není černá. – $(\forall x)(k(x) \Rightarrow \neg c(x))$
- Dvojí zápor: Žádná kočka není černá.
- Doslova by bylo: Všechny kočky nejsou černé.
- To se však nepoužívá, neboť by to mohlo mít dvojí smysl:
    - Všechny kočky nejsou černé. = Ne všechny k. jsou č. = Některé k. nejsou č.
    - Všechny kočky nejsou černé. = Žádná kočka není černá.

- Podobně: Nikdo není dokonalý. – $(\forall x)\neg d(x)$
- Nelze říci:
    - Všichni nejsou dokonalí.
    - Všichni nejsou dokonalí.

- Nebo: Nikdo zde není. – $(\forall x)\neg z(x)$
- Význam jako: *Nobody is here* – nepřeložitelná slovní hříčka.

Domácí úkol

Zformalizujte toto tvrzení, nalezněte jeho negaci a rozhodněte, zda je některé z těchto tvrzení pravdivé:

Každý má někoho nerad nebo každého má někdo rád.