Matematická logika
Přednáška č. 7

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

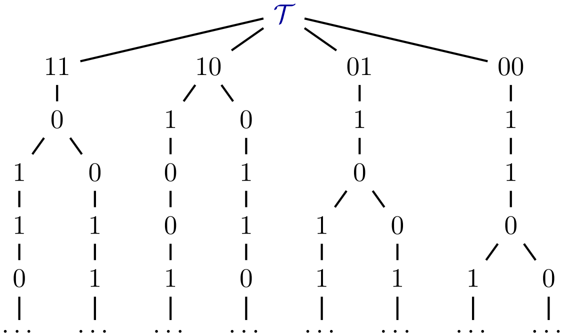
Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Domácí úkol

Pro která ohodnocení je splněna teorie
$\mathcal{T} = \{A_n \Rightarrow \neg(A_{n+1} \wedge A_{n+2}), \neg A_n \Rightarrow (A_{n+1} \vee A_{n+2}), \neg A_{n+2} \Rightarrow A_n\}$

- $(A_n \Rightarrow \neg(A_{n+1} \wedge A_{n+2})) \wedge (\neg A_n \Rightarrow (A_{n+1} \vee A_{n+2})) \wedge (\neg A_{n+2} \Rightarrow A_n)$
- $(\neg A_n \vee \neg A_{n+1} \vee \neg A_{n+2}) \wedge (A_n \vee A_{n+1} \vee A_{n+2}) \wedge (A_{n+2} \vee A_n)$
- $\neg(A_n \wedge A_{n+1} \wedge A_{n+2}) \wedge (A_n \vee A_{n+2})$
- *Nejsou tři 1 za sebou. Ob dvě místa nejsou 0.*



Obsah šesté přednášky

- Tarského definice pravdy
- Trojí typ pravdivosti formulí predikátové logiky
- Formule logicky platné, splnitelné a kontradikce
- Logická ekvivalence a logický důsledek

Tarského sémantická definice pravdy

- *Correspondentia rei et intellectus*
- Korespondenční teorie pravdy
- Alfred Tarski: T-schéma (1933)
- „A“je pravdivé, právě když A.
- $\mathcal{M} \models A(x)[e]$, právě když $A_{\mathcal{M}}(e(x))$ platí.

Ohodnocení proměnných v interpretaci

Definice

Nechť L je jazyk a $\mathcal{M}$ je jeho interpretace

- **Ohodnocení proměnných** je funkce e z množiny proměnných, která každé volné proměnné přiřazuje nějaký prvek universa M, $e(x) \in M$.
- Výrazem $t[e]$ označujeme **hodnotu termu** t při ohodnocení e, tj. $t[e] \in M$.
  - Je-li term t proměnná x, pak $t[e] = e(x)$.
  - Je-li f n-ární funkční symbol a term t je $f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $t[e] = f(t_1[e], \ldots, t_n[e])$.
- Výrazem $e(x/m)$ označujeme nové ohodnocení, které všem proměnným přiřadí stejnou hodnotu jako e, jenom $e(x) = m$, kde $m \in \mathcal{M}$.

Příklad

Jazyk $L = \{0, =, +\}$, v interpretaci $\mathcal{N}$, $e(x) = 5, e(y) = 12$.

- $(x + y)[e] = 17$.
- $(x + (x + (y + y)))[e] = 34$.
- $(x + y)[e(x/8)] = 8 + 12 = 20$.

I. Pravdivost v interpretaci při ohodnocení

Definice (Tarského definice pravdy)

Pravdivost formule v interpretaci $\mathcal{M}$ při ohodnocení e definujeme indukcí podle složitosti formule

i) $\mathcal{M} \models p(t_1, ..., t_n)[e]$, právě když $\langle t_1[e], ..., t_n[e]\rangle \in p_{\mathcal{M}}$

ii) $\mathcal{M} \models \neg A[e]$, právě když $\mathcal{M} \not\models A[e]$,

iii) $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \models A[e]$ a $\mathcal{M} \models B[e]$,

iv) $\mathcal{M} \models (A \vee B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \models A[e]$ nebo $\mathcal{M} \models B[e]$,

v) $\mathcal{M} \models (A \Rightarrow B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \not\models A[e]$ nebo $\mathcal{M} \models B[e]$,

vi) $\mathcal{M} \models (A \Leftrightarrow B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \models A[e]$ právě tehdy, když $\mathcal{M} \models B[e]$,

vii) $\mathcal{M} \models (\forall x)A[e]$, právě když pro každý prvek m z M je $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

viii) $\mathcal{M} \models (\exists x)A[e]$, právě když pro nějaký prvek m z M je $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$.

Pravdivost formule v interpretaci při ohodnocení

Příklad

Jazyk $L = \{=, <, +\}$, v interpretaci $\mathcal{N}$, $\quad e(x) = 5, e(y) = 12$

1. $\mathcal{N} \models (x < y)[e]$
2. $\mathcal{N} \not\models (y = x + x)[e]$.
3. $\mathcal{N} \models \neg(y = x + x)[e]$.
4. $\mathcal{N} \models (\exists z)(y = z + z)[e]$.
5. $\mathcal{N} \models (\exists z)(z < x)[e]$.
6. $\mathcal{N} \models (\forall z)(z < x \Rightarrow z < y)[e]$.

Poznámka

Pro každou formuli A, interpretaci $\mathcal{M}$ a ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models A[e] \quad \text{nebo} \quad \mathcal{M} \models \neg A[e]$$

.

II. Pravdivost v interpretaci

Definice

Formule A je **pravdivá (platná) v interpretaci** $\mathcal{M}$, právě když pro každé ohodnocení e je pravdivá, tj. $\mathcal{M} \models A[e]$. Píšeme

$$\mathcal{M} \models A$$

Příklad

Jazyk $L = \{=, <, +\}$, v interpretaci $\mathcal{N}$

1. $\mathcal{N} \models (x < y \vee x = y \vee y < x)$? Ano.
2. $\mathcal{N} \models (x < y)$? Ne.
3. $\mathcal{N} \models \neg(x < y)$? Ne.
4. $\mathcal{N} \models (\forall x)(\exists y)(y < x)$? Ne.
5. $\mathcal{N} \models \neg(\forall x)(\exists y)(y < x)$? Ano.

Poznámka

- Je-li A uzavřená, pak vždy $\mathcal{M} \models A$ nebo $\mathcal{M} \models \neg A$.
- Není-li A uzavřená, pak může nastat $\mathcal{M} \not\models A$ a $\mathcal{M} \not\models \neg A$.

III. Logicky platné formule

Definice

Formule A je **logicky platná, pravdivá**, právě když pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ platí $\mathcal{M} \models A$. Značíme

$$\models A$$

Příklad

$L = \{p(x), v(x, y)\}$, kde p, v jsou predikáty

1. $\models p(x) \vee \neg p(x)$? Ano.
2. $\models v(x, y) \Rightarrow v(y, x)$? Ne.
3. $\models (\forall x)(\exists y)v(x, y)$? Ne.
4. $\models (\exists y)(\forall x)v(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)v(x, y)$? Ano.

Logicky platné formule vzniklé z tautologií

Věta

Každá tautologie výrokové logiky, kde prvotní formule jsou nahrazeny formulemi predikátové logiky, je logicky platná formule.

Důkaz

V každé interpretaci $\mathcal{M}$ při každém ohodnocení e je $\mathcal{M} \models A[e]$, neboť to je tautologie VL. $\square$

Příklad

$L = \{p(x), v(x, y)\}$, kde p, v jsou predikáty.
Následující formule jsou logicky platné.

1. $v(x, y) \vee \neg v(x, y)$
2. $(p(x) \Rightarrow v(x, y)) \Leftrightarrow (\neg p(x) \vee v(x, y))$
3. $\neg(p(x) \wedge v(x, y)) \Leftrightarrow (\neg p(x) \vee \neg v(x, y))$
4. $(\exists x)p(x) \vee \neg(\exists x)p(x))$

Logicky platné formule vzniklé negací kvantifikátorů

Věta

Následující formule jsou logicky platné:

i) $(\forall x)\neg A \Leftrightarrow \neg(\exists x)A$

ii) $(\exists x)\neg A \Leftrightarrow \neg(\forall x)A$

iii) $(\forall x)A \Rightarrow (\exists x)A$

Důkaz

Dokážeme $(\forall x)\neg A \Leftrightarrow \neg(\exists x)A$ je logicky platná formule.
Máme dokázat, že pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ a pro každé ohodnocení e platí
$\mathcal{M} \models (\forall x)\neg A \Leftrightarrow \neg(\exists x)A[e]$ neboli podle Tarského definice
$\mathcal{M} \models (\forall x)\neg A[e]$, právě tehdy, když $\mathcal{M} \models \neg(\exists x)A[e]$.
Tedy: $\mathcal{M} \models (\forall x)\neg A[e]$, právě když
pro každé $m \in M$ platí $\neg A[e(x/m)]$, právě když
pro žádné $m \in M$ neplatí $A[e(x/m)]$, právě když
neexistuje $m \in M$ tak, že platí $A[e(x/m)]$, právě když
$\mathcal{M} \not\models (\exists x)A[e]$, právě když
$\mathcal{M} \models \neg(\exists x)A[e]$.

$\square$

Logicky platné formule vzniklé negací kvantifikátorů

Příklad

$L = \{v(x,y), k(x), l(x)\}$, kde p, v jsou predikáty. Logicky platné formule:

1. $\neg(\forall x)(\exists y)v(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\neg v(x,y)$
2. $\neg(\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(k(x) \wedge \neg l(x))$
3. $(\forall x)l(x) \Rightarrow (\exists x)l(x)$

Poznámka

Nechť $\mathcal{M} = \langle M = \{a_1, a_2, \dots\}$ je konečné universum, $s(x)$ je unární predikát.

- $\neg(\forall x)s(x) \Leftrightarrow \neg(s(a_1) \wedge s(a_2) \wedge \dots) \Leftrightarrow \neg s(a_1) \vee \neg s(a_2) \vee \dots \Leftrightarrow (\exists x)\neg s(x)$
- $\neg(\exists x)s(x) \Leftrightarrow \neg(s(a_1) \vee s(a_2) \vee \dots) \Leftrightarrow \neg s(a_1) \wedge \neg s(a_2) \wedge \dots \Leftrightarrow (\forall x)\neg s(x)$

Splnitelné formule a kontradikce

Definice

- Formule A je **splnitelná**, právě když v nějaké interpretaci $\mathcal{M}$ pro nějaké ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models A[e]$.
- A je **kontradikce**, právě když není splnitelná.

Příklad

Nechť $L = \{p(x), q(x)\}$. Pak platí

1. $p(x) \wedge \neg p(x)$ - kontradikce
2. $(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow q(x)$ - logicky platná
3. $p(x) \Rightarrow q(x)$ - splnitelná
4. $(\forall x)p(x) \Rightarrow p(x)$ - log. platná
5. $p(x) \Rightarrow (\forall x)p(x)$ - splnitelná

Splnitelné formule

Příklad

Nechť $p(x, y)$ je binární predikátový symbol. Rozhodněte a zdůvodněte, zda tyto formule jsou kontradikce, splnitelné nebo logicky platné.

- $(p(x, y) \wedge p(y, z)) \Rightarrow p(x, z)$
- $(\forall y)p(x, y)$

Nalezneme interpretaci, pro něž tyto formule 1. platí a 2. neplatí

- Interpretace $\mathcal{M}$: Universum M je množina všech přímek v rovině.
  1. $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ - x je rovnoběžná s y.
  2. $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ - x je kolmá na y.
- Interpretace $\mathcal{M}$: $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ - $x \leq y$ Interpretace $\mathcal{N}$. Universum $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$, $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ - $x \leq y$
  1. $e(x) = 0$
  2. $e(x) = 5$

Logicky platné a splnitelné formule, kontradikce

Tvrzení

- *Jestliže A je logicky platná, pak je splnitelná.*
- *A je kontradikce, právě když $\neg A$ je logicky platná.*
- *A je logicky platná, právě když $(\forall x)A$ je logicky platná.*

Příklad

$L = \{p(x), v(x,y), c\}$, kde p, v jsou predikáty, c je konstanta. Jsou následující formule logicky platné, splnitelné nebo kontradikce?

1. $v(x,y) \vee \neg v(x,y)$ logicky platná
2. $(\forall x)(\forall y)(v(x,y) \vee \neg v(x,y))$ logicky platná
3. $v(x,y) \vee v(y,x)$ splnitelná
4. $(\forall x)(\exists y)v(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)\neg v(x,y)$ kontradikce
5. $p(c) \Rightarrow (\exists x)p(x)$ logicky platná
6. $(\forall x)p(x) \Rightarrow p(c)$ logicky platná
7. $p(x) \Leftrightarrow (\forall x)p(x)$ splnitelná

Logická ekvivalence, logický důsledek

Definice

- A a B jsou **logicky ekvivalentní**, $A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} B$, právě když pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ a pro každé ohodnocení e platí: $\mathcal{M} \models A[e]$, právě když $\mathcal{M} \models B[e]$.
- B je **logickým důsledkem** A, $A \models B$, právě když pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ a pro každé ohodnocení e platí: jestliže $\mathcal{M} \models A[e]$, pak i $\mathcal{M} \models B[e]$.

Příklad

1. $(\forall x)\neg A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(\exists x)A$
2. $(\forall x)A \models (\exists x)A$
3. $(p(x) \wedge q(x)) \models p(x)$

Logická ekvivalence a logický důsledek

Tvrzení

- $A \models B$, *právě když* $A \Rightarrow B$ *je logicky platná.*
- $A \models B$, *právě když* $A \wedge \neg B$ *je kontradikce.*
- $A \models\!\!\!\!\dashv B$, *právě když* $A \models B$ *a zároveň* $B \models A$.
- $A \models\!\!\!\!\dashv B$, *právě když* $A \Leftrightarrow B$ *je logicky platná.*

Negace formulí s kvantifikátory

	Kladné	Záporné
Obecné	**A** $(\forall x)(p(x) \Rightarrow s(x))$ *Všechna prvočísla jsou sudá.*	**E** $(\forall x)(p(x) \Rightarrow \neg s(x))$ *Žádná prvočísla nejsou sudá.*
Částečné	**I** $(\exists x)(p(x) \wedge s(x))$ *Některá prvočísla jsou sudá.*	**O** $(\exists x)(p(x) \wedge \neg s(x))$ *Některá prvočísla nejsou sudá.*

- $\neg(\forall x)(p(x) \Rightarrow s(x)) \dashv\vDash (\exists x)\neg(p(x) \Rightarrow s(x)) \dashv\vDash (\exists x)(p(x) \wedge \neg s(x))$
- $\neg(\exists x)(p(x) \wedge s(x)) \dashv\vDash (\forall x)(\neg p(x) \vee \neg s(x)) \dashv\vDash (\forall x)(p(x) \Rightarrow \neg s(x))$

Epimenidův paradox

Příklad

Kréťan Epimenidés řekl, že všichni Kréťané jsou lháři.

Jazyk $L = \{k(x), l(x), E\}$, kde p, k jsou unární predikáty, E je konstanta.
Interpretace $\mathcal{M}$: M - množina lidí, $k(x)$ - x je Kréťan, $l(x)$ - x lže, E - Epimenidés.

- $k(E)$ - Epimenidés je Kréťan.
- $l(E)$ - Epimenidés lže.
- $\neg l(E)$ - Epimenidés mluví pravdu.
- $(\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x))$ - Všichni Kréťané jsou lháři.
- $\neg l(E) \Leftrightarrow (\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x))$ - Epimenidés řekl, že všichni Kréťané jsou lháři.

$$k(E) \wedge (\neg l(E) \Leftrightarrow (\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x)))$$

- $k(E) \wedge \neg l(E) \wedge (\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x)) \models k(E) \wedge \neg l(E) \wedge (k(E) \Rightarrow l(E)) \models k(E) \wedge \neg l(E) \wedge l(E)$, kontradikce
- $k(E) \wedge l(E) \wedge \neg(\forall x)(k(x) \Rightarrow l(x)) \models\!\dashv k(E) \wedge l(E) \wedge (\exists x)(k(x) \wedge \neg l(x))$, splnitelná

Negace formule

Příklad

Napište formalizaci: *Funkce* f *není spojitá v bodě* a.

- $\neg(\forall\epsilon)(\epsilon > 0 \Rightarrow (\exists\delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon))) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}$
- $(\exists\epsilon)\neg(\epsilon > 0 \Rightarrow (\exists\delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon))) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}$
- $(\exists\epsilon)(\epsilon > 0 \wedge \neg(\exists\delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}$
- $(\exists\epsilon)(\epsilon > 0 \wedge (\forall\delta)\neg(\delta > 0 \wedge (\forall x)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}$
- $(\exists\epsilon)(\epsilon > 0 \wedge (\forall\delta)(\neg(\delta > 0) \vee \neg(\forall x)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}$
- $(\exists\epsilon)(\epsilon > 0 \wedge (\forall\delta)((\delta > 0) \Rightarrow (\exists x)\neg(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}$
- $(\exists\epsilon)(\epsilon > 0 \wedge (\forall\delta)((\delta > 0) \Rightarrow (\exists x)(|x-a| < \delta \wedge \neg|f(x) - f(a)| < \epsilon)) \mathrel{|}\!\!=\!\!\mathrel{|}$
- $(\exists\epsilon)(\epsilon > 0 \wedge (\forall\delta)(\delta > 0 \Rightarrow (\exists x)(|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \epsilon)))$

Formalizace „právě jedno, nejvýše, alespoň jedno...“

Příklad

Jazyk $L = \{m(x), =\}$, interpretace $\mathcal{R}$: universum $\mathbb{R}$, $m_{\mathcal{R}}(x)$ - funkce nabývá maxima v bodě x.

- *Funkce nabývá nějakého maxima.* $(\exists x)m(x)$
  Negace: $(\forall x)\neg m(x)$ *Funkce nenabývá žádného maxima.*
- *Funkce nabývá právě jednoho maxima.*
  $(\exists x)(m(x) \wedge (\forall y)(\neg(y = x) \Rightarrow \neg m(y)))$
  Negace: $(\forall x)(\neg m(x) \vee (\exists y)(\neg(y = x) \wedge m(y)))$
  $(\forall x)(m(x) \Rightarrow (\exists y)(\neg(y = x) \wedge m(y)))$
  Jestliže funkce nabývá maxima, pak jej nabývá nejméně ve dvou bodech.
- *Funkce nabývá maxima alespoň ve dvou bodech.*
  $(\exists x)(\exists y)(m(x) \wedge m(y) \wedge \neg(x = y))$
  Negace: $(\forall x)(\forall y)(\neg m(x) \vee \neg m(y) \vee (x = y)) \mathrel{\dashv\models}$
  $\mathrel{\dashv\models} (\forall x)(\forall y)((m(x) \wedge m(y)) \Rightarrow (x = y))$ *Funkce má nejvýše jedno maximum.*
- *Funkce nabývá právě jednoho maxima v bodě 0.* $m(0) \wedge (\forall x)(m(x) \Rightarrow x = 0)$
  Negace: $\neg m(0) \vee (\exists x)(m(x) \wedge \neg(x = 0))$

Varianta formule

Definice

Formule A' je **variantou** formule A právě, když vznikne z formule A postupným nahrazením podformulí tvaru $(\forall x)B(x)$ formulemi $(\forall y)B(y)$ a podformulí tvaru $(\exists x)B(x)$ formulemi $(\exists y)B(y)$.

Věta

Je-li formule A varianta formule A', pak $A \models\!\!\!\!\dashv A'$.

Důkaz

Dokážeme, že $(\forall x)B(x) \models\!\!\!\!\dashv (\forall y)B(y)$ a $(\exists x)B(x) \models\!\!\!\!\dashv (\exists y)B(y)$. □

Příklad

- $(\exists k)(n = k + k) \models\!\!\!\!\dashv (\exists m)(n = m + m)$
- $(\exists x)(\exists y)((z = x \cdot y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z)) \models\!\!\!\!\dashv$
  $(\exists u)(\exists v)((z = u \cdot v) \wedge \neg(u = z) \wedge \neg(v = z))$

Domácí úkol pro 3. paralelku

V jazyce $L = \{f, 0, <, =\}$, kde $f(x)$ je unární funkce, 0 je konstanta, $=$, $<$ mají obvyklý význam v interpretaci reálných čísel $\mathbb{R}$. Napište formalizaci tohoto tvrzení.

Je-li f rostoucí funkce, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Domácí úkol pro 2. paralelku

V jazyce $L = \{f, 0, <, =\}$, kde $f(x)$ je unární funkce, 0 je konstanta, $=$, $<$ mají obvyklý význam. Napište formalizaci tohoto tvrzení a pak nalezněte jeho negaci a převeďte ji do běžného jazyka.

Spojitá funkce definovaná na uzavřeném intervalu nabývá (lokálního) maxima.

Nápověda:

- Funkce nabývá maxima v bodě c.
- Funkce nabývá maxima v nějakém bodě.
- Funkce definována na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nabývá maxima.
- Funkce definována na každém uzavřeném intervalu nabývá maxima.