Matematická logika
Přednáška č. 8

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Obsah přednášky

- Logicky platné, splnitelné formule, kontradikce. Logický důsledek.
- Sémantické stromy
- Kvantifikátory a spojky
- Výměna kvantifikátorů

Pravdivost, splnitelnost a logický důsledek

Připomeňme: Nechť formule A, B jsou v jazyce L, $\mathcal{M}$ je interpretace jazyka L, e je ohodnocení proměnných.

- $\mathcal{M} \models A[e]$, právě když .... *Tarského definice.*
- $\mathcal{M} \models A$, právě když, pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models A[e]$.
- A je logicky platná, právě když pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ platí $\mathcal{M} \models A$.

- A je logicky platná, právě když platí v každé interpretaci a ohodnocení.
- A je splnitelná, právě když platí v nějaké interpretaci a ohodnocení.
- A je kontradikce, právě když neplatí v žádné interpretaci a žádné ohodnocení.

- $A \models B$, právě když pro každé $\mathcal{M}$, e platí, jestliže $\mathcal{M} \models A[e]$, pak $\mathcal{M} \models B[e]$.

- $A \models B$, právě když $A \Rightarrow B$ je logicky platná formule.
- $A \models B$, právě když $A \wedge \neg B$ je kontradikce.
- $A \models\!\!\!\!\dashv B$, právě když $A \models B$ a $B \models A$.

Formule logicky platné, splnitelné a kontradikce

Příklad

$L = \{p(x,y), r(x), q(x)\}$, $p(x,y)$ - binární, $r(x)$, $q(x)$ - unární predikátové symboly

1. $(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow p(y,x)$ (symetrie) - splnitelná formule
2. $(\forall x)(r(x) \wedge q(x)) \Rightarrow ((\forall x) r(x) \wedge (\forall x) q(x))$ - logicky platná formule
3. $(\forall x)(r(x) \vee q(x)) \Rightarrow ((\forall x) r(x) \vee (\forall x) q(x))$ - splnitelná formule
4. $(\forall x)(\exists y) p(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x) p(x,y)$ - splnitelná formule
5. $(\forall x)(q(x) \Leftrightarrow (\exists y)(x = y \wedge q(y)))$ - logicky platná formule

Sémantické stromy

Sémantický strom pro $\mathcal{M} \models (\forall x)A(x)[e]$

$$\begin{array}{c} \mathcal{M} \models (\forall x)A(x) \\ | \\ \mathcal{M} \models A[e(x/m)] \\ \text{pro každé } m \in M \end{array}$$

Sémantický strom pro $\mathcal{M} \models (\exists x)A(x)[e]$

$$\begin{array}{c} \mathcal{M} \models (\exists x)A(x) \quad * \qquad \dots m \\ | \\ \mathcal{M} \models A[a(x/m)] \\ \text{pro některé (nové) } m \in M \end{array}$$

Sémantický strom pro $\mathcal{M} \models A(x)[e]$

$$\begin{array}{c} \mathcal{M} \models A(x)[e] \quad * \qquad \dots e(x) = m \\ | \\ \mathcal{M} \models A[e(x/m)] \end{array}$$

- Princip sémantických stromů pro $\wedge, \vee, \Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ zůstává stejný.
- $*$ znamená, že formule je „vyčerpaná“.

Zjednodušení značení

Dokažte, že formule $(\forall x)\neg A \Rightarrow \neg(\exists x)A$ je logicky platná, tj. pro každou interpretace $\mathcal{M}$ a ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models ((\forall x)\neg A \Rightarrow \neg(\exists x)A)[e]$.

Sporem. Předpokládejme, že nikoli. Tedy existuje $\mathcal{M}$, e, pro něž tato formule není pravdivá. Platí tedy její negace $\mathcal{M} \models ((\forall x)\neg A \wedge (\exists x))A[e]$.

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{M} \models ((\forall x)\neg A \wedge (\exists x)A)[e] \\
| \\
\mathcal{M} \models (\forall x)\neg A[e] \\
| \\
\mathcal{M} \models (\exists x)A[e] \cdots m \in M \\
| \\
\mathcal{M} \models A[e(x/m)] \\
| \\
\mathcal{M} \models \neg A[e(x/m)] \\
| \\
\mathcal{M} \models \bot
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
(\forall x)\neg A \wedge (\exists x)A) \\
| \\
(\forall x)\neg A \\
| \\
(\exists x)A \\
| \\
A[m] \\
| \\
\neg A[m] \\
| \\
\bot
\end{array}
$$

(i) Pracujeme v konkrétní interpretaci $\mathcal{M}$ s ohodnocením e.

(ii) Místo $A[e(x/m)]$ píšeme $A[m]$.

(iii) Pro $(\exists x)A$ je třeba vzít nový nepoužitý symbol.

(iv) Pro $(\forall x)A$ je třeba nejprve vzít již použité symboly, pak můžeme další.

Příklad 1

Je formule $((\forall x)A \vee (\forall x)B) \Rightarrow (\forall x)(A \vee B)$ logicky platná?
Kdyby tomu tak nebylo, existovala by $\mathfrak{M}, e$ pro něž by

(I)	$\neg(((\forall x)A \vee (\forall x)B) \Rightarrow (\forall x)(A \vee B))$	
(II)	$(\forall x)A \vee (\forall x)B$	z (I)
(III)	$\neg(\forall x)(A \vee B)$	z (I)
(IV)	$(\exists x)(\neg A \wedge \neg B) \quad \ldots m \in M$	z (III)
(V)	$\neg A[m] \wedge \neg B[m]$	z (IV)
(VI)	$\neg A[m]$	z (V)
(VII)	$\neg B[m]$	z (V)
	$A[m] \qquad B[m]$	z (II)
	$\perp \qquad \perp$	

Předpoklad vede ke sporu. Tedy se jedná o logicky platnou formuli.

Myšlenkový postup

Je formule A logicky platná?

(a)

- Právě když pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ a ohodnocení e je $\mathcal{M} \models A[e]$.
- Předpokládejme, že existuje $\mathcal{M}$, e tak, že $\mathcal{M} \not\models A[e]$.
- Tedy $\mathcal{M} \models \neg A[e]$.
- Potom $\mathcal{M} \models \bot$.
- Předpoklad vede ke sporu.
- A je logicky platná.

(b)

- Právě když $\neg A$ je kontradikce, resp. není splnitelná.
- Právě když neexistuje $\mathcal{M}$, e tak, že $\mathcal{M} \models \neg A[e]$.
- Předpokládejme, že existuje $\mathcal{M}$, e tak, že $\mathcal{M} \models \neg A[e]$,
- potom $\mathcal{M} \models \bot$
- Předpoklad vede ke sporu.
- Tedy $\neg A$ je kontradikce.
- A je logicky platná.

Příklad 2

Ověřte zda se jedná o logicky platné formule.

- $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$ Ano.
- $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$ Ne.

Předpokládejme, že existují interpretace $\mathfrak{M}$ a ohodnocení e, pro které platí negace.

$$\mathfrak{M} \models \big((\forall x)A(x) \wedge \neg A(y)\big)[e]$$
$$(\forall x)A(x)[e]$$
$$\neg A(y)[e], e(y) = m$$
$$\neg A[m]$$
$$A[m]$$
$$\perp$$

$$\mathfrak{M} \models \big(A(y) \wedge (\exists x)\neg A(x)\big)[e]$$
$$A(y)[e], e(y) = m$$
$$A[m]$$
$$(\exists x)\neg A(x)[e] \ldots n \in M$$
$$\neg A[n]$$

není uzavřený

Příklad 3a

Je formule $(\forall x)(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow ((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x))$ logicky platná?

Předpokládejme, že tomu tak není a že existují $\mathcal{M}$, e takové, že
$\mathcal{M} \not\models \neg((\forall x)(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow ((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x)))[e]$

- Tedy $\mathcal{M} \models \neg((\forall x)(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow ((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x)))[e]$.
- Tedy $\mathcal{M} \models (\forall x)(B(x) \Rightarrow C(x)) \wedge \neg((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x))[e]$.
- Tedy $\mathcal{M} \models (\forall x)(\neg B(x) \vee C(x)) \wedge (\exists x)(B(x) \wedge \neg C(x))[e]$.
- Tedy $\mathcal{M} \models (\forall x)(\neg B(x) \vee C(x)) \wedge (\exists x)(B(x) \wedge \neg C(x))[e]$.
- Tedy $\mathcal{M} \models (\exists x)(B(x) \wedge \neg C(x))$ a $\mathcal{M} \models (\forall x)(\neg B(x) \vee C(x))[e]$.
- Tedy existuje $m \in M$ takové, že $B[m] \wedge \neg C[m]$.
- Avšak pro každé $m \in M$ platí $\neg B[m] \vee C[m]$.
- A tedy $B[m] \wedge \neg C[m] \wedge (\neg B[m] \vee C[m]) \models\!\dashv \perp$
- Předpoklad vede ke sporu.
- Tedy je logicky platná.

Příklad 3b

Je formule $(\forall x)(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow ((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x))$ logicky platná?

Předpokládejme, že tomu tak není a že existují $\mathcal{M}$, e taková, že
$\mathcal{M} \models \neg((\forall x)(B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow ((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x)))[e]$

(I)	$\big((\forall x)(B(x) \Rightarrow C(x)\big) \wedge \neg\big((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x)\big)$	
(II)	$(\forall x)\big(B(x) \Rightarrow C(x)\big)$	z (I)
(III)	$\neg\big((\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)C(x)\big)$	z (I)
(IV)	$(\forall x)B(x)$	z (III)
(V)	$(\exists x)\neg C(x)$	z (III)
(VI)	$\neg C[m]$	z (V)
(VII)	$B[m]$	z (IV)
(VIII)	$B[m] \Rightarrow C[m]$	z (II)
	$\neg B[m]$ ⟶ $\perp$ $C[m]$ ⟶ $\perp$	

Předpoklad vede ke sporu. Tedy je logicky platná.

Příklad 4

Je formule $((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B) \Rightarrow (\forall x)(A \Rightarrow B)$ logicky platná?

Předpokládejme, že existuje interpretace $\mathcal{M}$ a ohodnocení e, pro něž je pravdivá negace, tj.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg\Big(\big((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B\big) \Rightarrow (\forall x)(A \Rightarrow B)\Big) & \\
 & | & \\
 & (\exists x)\neg A \vee (\forall x)B & \\
 & | & \\
 & (\exists x)(A \wedge \neg B) & \\
 & | & \\
 & A[m] & \\
 & | & \\
 & \neg B[m] & \\
 \swarrow & & \searrow \\
(\exists x)\neg A & & (\forall x)B \\
| & & | \\
\neg A[n] & & B[m] \\
 & & | \\
 & & \perp
\end{array}
$$

Jedna větev zůstala otevřená. Původní formule tedy není logicky platná.
Protipříklad: $M = \{m, n\}$, $A[m]$, $\neg B[m], \neg A[n]$.

Příklad 5

Je splnitelné tvrzení: *V Poličce žije holič, který holí právě všechny muže, kteří se neholí sami.*

- $h(x, y)$ - x holí y.
- $h(x, y) \Leftrightarrow \neg h(y, y)$ - x holí y, práve když y se neholí sám.
- $(\forall y)(h(x, y) \Leftrightarrow \neg h(y, y))$ - x holí všechny muže, kteří se neholí sami.
- $(\exists x)(\forall y)(h(x, y) \Leftrightarrow \neg h(y, y))$

$$(\exists x)(\forall y)\Big(h(x, y) \Leftrightarrow \neg h(y, y)\Big)$$

$$(\forall y)(h([m], y) \Leftrightarrow \neg h(y, y))$$

$$h[m, m] \Leftrightarrow \neg h[m, m]$$

$$h[m, m] \qquad\qquad \neg h[m, m]$$

$$\neg h[m, m] \qquad\qquad h[m, m]$$

$$\perp \qquad\qquad \perp$$

Nikoli, jedná se o kontradikci.

Logicky platné formule - kvantifikátory a spojky

Věta

Následující formule jsou logicky platné:

i) $(\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow \big((\forall x)A \wedge (\forall x)B\big)$

ii) $(\exists x)(A \vee B) \Leftrightarrow \big((\exists x)A \vee (\exists x)B\big)$

iii) $\big((\forall x)A \vee (\forall x)B\big) \Rightarrow (\forall x)(A \vee B)$

iv) $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow \big((\exists x)A \wedge (\exists x)B\big)$

v) $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B\big)$

Příklad:

$M =$ jablka v košíku. $A(x)$ – x je červené, $B(x)$ – x je žluté.

i) Všechna jablka jsou červená a žlutá.

ii) Některá jablka jsou červená nebo žlutá.

v) Všechna červená jablka jsou žlutá.

Logicky platné formule - kvantifikátory a spojky

Důkaz

i) $(\forall x)(A \wedge B) \models\!\!\!\!= \big((\forall x)A \wedge (\forall x)B\big)$

Pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ pro každé ohodnocení e platí:
$\mathcal{M} \models (\forall x)(A \wedge B)[e]$, práve když pro každé $m \in M$ platí $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[e(x/m)]$, tj. $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[m]$. To je právě tehdy, když $\mathcal{M} \models (A[m] \wedge B[m])$, což je práve když $\mathcal{M} \models A[m]$ a $\mathcal{M} \models B[m])$, a to je právě když $\mathcal{M} \models (\forall x)A$ a $\mathcal{M} \models (\forall x)B$, tedy $\mathcal{M} \models (\forall x)A \wedge (\forall x)B$ platí pro každou interpretaci.

ii) $(\exists x)(A \vee B) \models\!\!\!\!= \neg(\forall x)\neg(A \vee B) \models\!\!\!\!= \neg(\forall x)(\neg A \wedge \neg B) \models\!\!\!\!= \neg((\forall x)\neg A \wedge (\forall x)\neg B)) \models\!\!\!\!= (\neg(\forall x)\neg A \vee \neg(\forall x)\neg B)) \models\!\!\!\!= ((\exists x)A \vee (\exists x)B)$

iii) $((\forall x)A \vee (\forall x)B) \models (\forall x)(A \vee B)$, viz příklad 1.

iv) $(\exists x)(A \wedge B) \models \big((\exists x)A \wedge (\exists x)B\big)$

Podle iii) je $((\forall x)\neg A \vee (\forall x)\neg B) \models (\forall x)(\neg A \vee \neg B)$. Podle zákona kontrapozice je $\neg(\forall x)(\neg A \vee \neg B) \models \neg((\forall x)\neg A \vee (\forall x)\neg B)$, tedy $(\exists x)\neg(\neg A \vee \neg B) \models \neg(\neg(\exists x)A \vee \neg(\exists x)B)$, užijeme de Morganovy zákony a máme $(\exists x)(A \wedge B) \models ((\exists x)A \wedge (\exists x)B)$

v) $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B\big)$, viz příklad 3.

Můžeme též dokázat jako logické důsledky pomocí sémantického stromu.

$\square$

Logicky neplatné formule

Příklad

Následující formule jsou splnitelné, ale nejsou logicky platná:

i) $\big((\exists x)A \wedge (\exists x)B\big) \Rightarrow (\exists x)(A \wedge B)$

ii) $(\forall x)(A \vee B) \Rightarrow \big((\forall x)A \vee (\forall x)B\big)$

iii) $\big((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B\big) \Rightarrow (\forall x)(A \Rightarrow B)$

iv) $(\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B\big)$

Stačí nalézt protipříklad, tj. interpretaci, v nichž formule nejsou splněny. Vezměme $\mathbb{N}$.

i) Není pravda, že: *Jestliže existuje prvočíslo a existuje číslo dělitelné 10, pak existuje prvočíslo dělitelné 10.*

ii) Není pravda, že: *Jestliže jsou všechna přirozená čísla sudá nebo lichá, pak všechna čísla jsou sudá nebo všechna čísla jsou lichá.*

iii) Viz přiklad 4.

iv) Pomocí sémantického stromu. Zkuste sami!

Logicky platné formule - výměna kvantifikátorů

Věta

i) $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \models\!\!\dashv (\forall y)(\forall x)A(x,y)$

ii) $(\exists x)(\exists y)A(x,y) \models\!\!\dashv (\exists y)(\exists x)A(x,y)$

iii) $(\exists x)(\forall y)A(x,y) \models (\forall y)(\exists x)A(x,y)$

Příklad:

i) Každý zná každého, právě tehdy když každého zná každý.

ii) Někdo zná někoho, právě tehdy když někoho někdo zná.

iii) Jesliže někdo zná každého, pak každého někdo zná.

Sémantický důkaz

Dokážeme $(\exists x)(\forall y)A(x,y) \models (\forall y)(\exists x)A(x,y)$. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by interpretace $\mathcal{M}$ a ohodnocení e takové, že by v ní platilo

$$(\exists x)(\forall y)A(x,y) \wedge \neg(\forall y)(\exists x)A(x,y)$$

$$(\exists x)(\forall y)A(x,y) \quad \ldots m \in M$$

$$(\forall y)A([m],y)$$

$$\neg(\forall y)(\exists x)A(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)\neg A(x,y) \quad \ldots n \in M$$

$$(\forall x)\neg A(x,[n])$$

$$A[m,n]$$

$$\neg A[m,n]$$

$$\perp$$

Výměna kvantifikátorů - nekonečná větev

Rozhodněte, zda platí $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \models (\exists y)(\forall x)A(x,y)$.

Předpokládejme, že existuje interpretace $\mathcal{M}$, v níž

$$\mathcal{M} \models (\forall x)(\exists y)A(x,y) \wedge \neg(\exists y)(\forall x)A(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \qquad \ldots m \in M$$

$$(\forall y)(\exists x)\neg A(x,y)$$

$$(\exists y)A([m],y) \qquad \ldots n \in M$$

$$A[m,n]$$

$$(\exists x)\neg A(x,[n]) \qquad \ldots o \in M$$

$$\neg A[o,n]$$

$$\ldots$$

Protipříklad: $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, > \rangle \quad (\forall y)(\exists x)(x > y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)(x > y)$

Protipříklad

Protipříklad: Předpokládejme, že universum $M = \{m, n\}$ je dvouprvkové.

$$\neg((\forall x)(\exists y)A(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x,y))$$

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y)$$

$$(\forall y)(\exists x)\neg A(x,y)$$

$$(\exists y)A([m],y)$$

$$(\exists y)A([n],y)$$

$$(\exists x)\neg A(x,[m])$$

$$(\exists x)\neg A(x,[n])$$

- $A[m,m]$
  - $\neg A[n,m]$
    - $A[n,m]$
      - $\perp$
    - $A[n,n]$
      - $\neg A[m,n]$
      - $\neg A[n,n]$
        - $\perp$
  - $\neg A[m,m]$
    - $\perp$
- $A[m,n]$
  - $\neg A[m,n]$
    - $\perp$
  - $\neg A[n,n]$
    - $A[n,m]$
      - $\neg A[n,m]$
        - $\perp$
      - $\neg A[m,m]$
    - $A[n,n]$
      - $\perp$

Sémantické stromy - pojmy

Definice

- **Větev stromu** je cesta od kořene ke koncovému uzlu.
- **Uzavřená větev** je větev stromu, která obsahuje atomickou formuli i její negaci. Na její konec přidáme symbol $\perp$.
- **Otevřená větev** je větev, která není uzavřená.
- **Úplná větev** znamená, že pro každou formuli vyskytující se v jejích uzlech platí jedna z následujících možností:
  - je to atomická formule nebo její negace,
  - je vyčerpaná,
  - jestliže se jedná o formuli typu $(\forall x)A(x)$, pak se dále vyskytuje $A[m]$ na téže větvi, a to buď pro všechna $m \in M$ vyskytující se na téže větvi, nebo pro alespoň jedno libovolné $m \in M$.
- **Nekonečná větev** obsahuje potenciálně nekonečně mnoho formulí, nelze ji uzavřít přidáním dalších prvků M.
- **Uzavřený strom** znamená, že všechny větve jsou uzavřené.
- **Otevřený strom** znamená, že některé větve jsou úplné otevřené nebo nekonečné.
- **Úplný strom** znamená, že všechny větve jsou buď uzavřené, nebo otevřené úplné, nebo nekonečné.

Pravidla užití sémantických stromů

Definice

Sémantický strom formule A je uspořádaný strom, jenž vznikne takto: Kořenem je A. Strom postupně rozšiřujeme podle předchozí definice a používáme následující pravidla. Jsou seřazena podle priority a postupně se k nim vracíme, vždy provedeme první použitelné pravidlo.

1. Použijeme pravidla pro binární logické spojky a jejich negace.
2. Odstraníme negace před kvantifikátory.
3. Uzavřeme větve obsahující atomickou formuli a její negaci.
4. Volnou proměnnou x nahradíme její hodnotou $e(x)$.
5. Proměnnou vázanou existenčním kvantifikátorem nahardíme nově označeným prvkem universa.
6. Proměnnou vázanou obecným kvantifikátorem nahradíme již zvoleným prvkem universa z příslušné větve. Pokud takový nemáme, nahradíme jej novým prvkem universa.

Úplnost

Věta

Úplný sémanický strom formule A obsahuje otevřenou nebo nekonečnou větev, právě když je tato formule splnitelná.

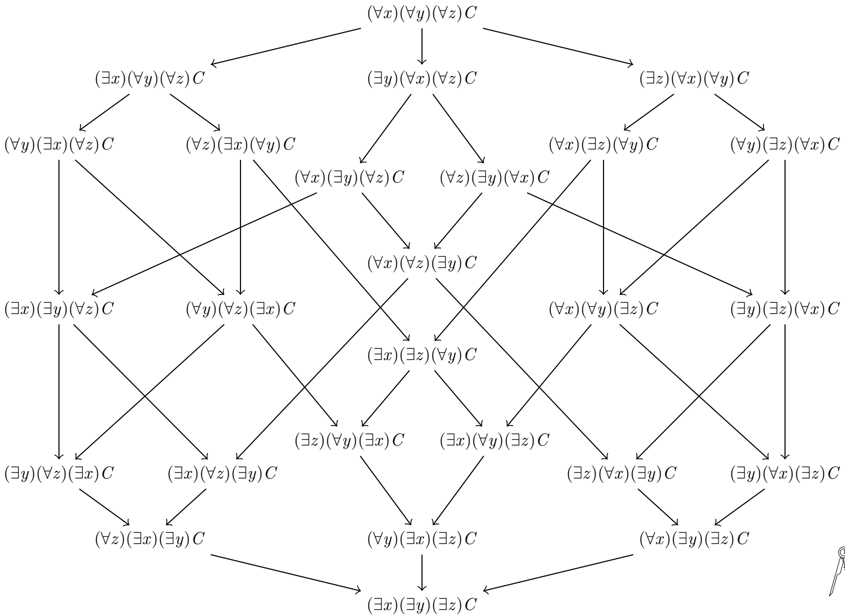
- Jestliže jsou všechny větve uzavřeny, pak v každé interpretaci a ohodnocení dojdeme ke sporu, A je kontradikce.
- Jestliže některá větev je úplná otevřená, pak jsme nalezli interpretaci, kde je A pravdivá, tedy je splnitelná.
- Jestliže některá větev je nekonečná, pak je splnitelná. V některých případech omezením universa lze najít interpretaci, v níž je pravdivá, ale ne vždy.

Výměna dvou kvantifikátorů

$(\forall x)A \models (\exists x)A$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\forall x)(\forall y)A \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & (\forall y)(\forall x)A \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\exists x)(\forall y)A \arrow[d, Rightarrow] & & & (\exists y)(\forall x)A \arrow[d, Rightarrow] \\
(\forall y)(\exists x)A \arrow[dr, Rightarrow] & & & (\forall x)(\exists y)A \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & (\exists y)(\exists x)A \arrow[r, Leftrightarrow] & (\exists x)(\exists y)A &
\end{tikzcd}
$$

Výměna tří kvantifikátorů



Domácí úkol

Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí tento logický důsledek, kde p, q jsou dva unární predikáty.

$$(\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x) \models (\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x))$$