Matematická logika
Přednáška č. 9

RNDr. Kateřina Trlifajová PhD.

katerina.trlifajova@fit.cvut.cz

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

BI-MLO, ZS 2015/2016

Domácí úkol

Zformalizujte toto tvrzení, nalezněte jeho negaci a rozhodněte, zda je některé z těchto tvrzení pravdivé:

Každý má někoho nerad nebo každého má někdo rád.

- $(\forall x)(\exists y)\neg r(x,y) \vee (\forall y)(\exists x) r(x,y)$
- $(\exists x)(\forall y) r(x,y) \wedge (\exists y)(\forall x)\neg r(x,y)$
- *Někdo má všechny rád a někoho nemá nikdo rád.*
- $(\forall x)(\exists y)\neg r(x,y) \vee (\forall x)(\exists y) r(y,x)$
- $(\forall x)(\exists y)(\neg r(x,y) \vee r(y,x)) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\forall x)(\exists y)(r(x,y) \Rightarrow r(y,x))$
- $(\forall x)(\exists y)\neg r(x,y) \vee (\forall y)(\exists x) r(y,x) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\forall x)(\exists y)\neg r(x,y) \vee (\forall x)(\exists y) r(x,y)$
- $(\forall x)(\exists y)\neg r(x,y) \vee (\exists x)(\forall y) r(x,y)$
- $(\forall x)(\exists y)\neg r(x,y) \vee (\forall x)(\exists y) r(x,y)$

Domácí úkol pro 2. paralelku

V jazyce $L = \{f, 0, <, =\}$, kde $f(x)$ je unární funkce, 0 je konstanta, $=$, $<$ mají obvyklý význam. Napište formalizaci tohoto tvrzení a pak nalezněte jeho negaci a převeďte ji do běžného jazyka.

Spojitá funkce definovaná na uzavřeném intervalu nabývá maxima.

Nápověda:

- Funkce nabývá maxima v bodě c.
  $(\forall x)(f(x) < f(c))$
- Funkce nabývá maxima v nějakém bodě.
  $(\exists u)(\forall x)(f(x) < f(u))$
- Funkce definována na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nabývá maxima.
  $(\exists u)(\forall x)\big(((a < x \wedge x < b) \vee x = a \vee x = b) \Rightarrow (f(x) < f(u)\big)$
- Funkce definována na každém uzavřeném intervalu nabývá maxima.
  $(\forall v)(\forall w)(\exists u)(\forall x)\big(((v < x \wedge x < w) \vee x = v \vee x = w) \Rightarrow (f(x) < f(u))\big)$

Obsah přednášky

- Teorie, model teorie, logický důsledek teorie.
- Axiomy rovnosti.
- Úplné teorie.
- Teorie uspořádání.
- Teorie grup.

Prooftools

- http://creativeandcritical.net/prooftools
- http://www.umsu.de/logik/trees/

- Sémantické stromy pro formule výrokové, predikátové i modální logiky
- Logická platnost, splnitelnost, logický důsledek.
- *Entscheidungsproblem* - existence rozhodovacího algoritmu pro formule PL.
- Alonzo Church - λ-kalkulus, Alan Turing - Turingův stroj (1936).

Teorie, model

Definice

- **Teorie** je množina uzavřených formulí $T = \{A_1, ..., A_n\}$ jazyka L.
- Interpetace $\mathcal{M}$ jazyka L je **modelem teorie** T, jestliže každá formule platí v $\mathcal{M}$. Píšeme $\mathcal{M} \models T$.
- Formule A je **logický důsledek** teorie T, (A logicky vyplývá z T), jestliže v každém modelu teorie T platí A. Píšeme $T \models A$.
- Teorie T je **splnitelná**, právě když má model.

Poznámka

- Teorie T je splnitelná, právě když $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ je splnitelná.
- Teorie T není splnitelná, právě když $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ je kontradikce.
- $T \models A$, právě když $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow A$ je logicky pravdivá formule.
- $T \models A$, právě když $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A$ je kontradikce.

Příklad 1

Příklad

Všichni Angličané jsou chladnokrevní. Někteří Angličané jsou bubeníci. Tudíž někteří bubeníci jsou chladnokrevní.

Dokážeme $(\forall x)(a(x) \Rightarrow c(x)), (\exists x)(a(x) \wedge b(x)) \models (\exists x)(b(x) \wedge c(x))$

$$\begin{tikzcd}
 & (\forall x)(a(x) \Rightarrow c(x)) \arrow[d, dash] & & \\
 & (\exists x)(a(x) \wedge b(x)) \arrow[d, dash] & & \\
 & \neg(\exists x)(b(x) \wedge c(x)) \arrow[d, dash] & & \\
 & (\forall x)(\neg b(x) \vee \neg c(x)) \arrow[d, dash] & & \\
 & a[m] \arrow[d, dash] & & \\
 & b[m] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\neg a[m] \arrow[d, dash] & & c[m] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\bot & \neg b[m] \arrow[d, dash] & & \neg c[m] \arrow[d, dash] \\
 & \bot & & \bot
\end{tikzcd}$$

Sylogismy – logické důsledky

Příklad

Některé zvíře je šelma. Žádný člověk není zvíře. Která z následujících tvrzení z toho vyplývají?

$$T = \{(\exists x)(z(x) \wedge s(x)), (\forall x)(c(x) \Rightarrow \neg z(x))\}$$

Logické důsledky:

(i) $(\exists x)(s(x) \wedge z(x))$, neboť $(z(x) \wedge s(x)) \models\!\!\!\!\models (s(x) \wedge z(x))$. *Některá šelma je zvíře.*

(ii) $(\forall x)(z(x) \Rightarrow \neg c(x))$, neboť $(z(x) \Rightarrow \neg c(x)) \models\!\!\!\!\models (c(x) \Rightarrow \neg z(x))$. *Žádné zvíře není člověk.*

(iii) $(\exists x)(s(x) \wedge \neg c(x))$, neboť $(\exists x)(z(x) \wedge s(x))$ a $(\forall x)(z(x) \Rightarrow \neg c(x))$.

(iv) $(\exists x)(c(x) \wedge \neg z(x))$ Ne, neboť to neplyne z $(\forall x)(c(x) \Rightarrow \neg z(x))$.

Příklad 2

Příklad

Každý, kdo navštívil budovu, byl zpozorován. Kdokoli zpozoroval Alexandra, si ho pamatoval. Nikdo si Alexandra nepamatoval. Tedy Alexandr nenavštívil budovu.

A – *Alexandr,* $v(x)$ – x *navštívil budovu,* $o(x,y)$ – x *zpozoroval* y, $r(x,y)$ – x *si pamatoval* y

$$(\forall x)(v(x) \Rightarrow (\exists y)o(y,x)), (\forall x)(o(x,A) \Rightarrow r(x,A)), (\forall x)\neg r(x,A) \models \neg v(A)$$

- $v(A)$
  - $v(A) \Rightarrow (\exists y)o(y,A)$
    - $\neg v(A)$
      - $\perp$
    - $o[m,A]$
      - $o[m,A] \Rightarrow r[m,A]$
        - $\neg o[m,A]$
          - $\perp$
        - $r[m,A]$
          - $\neg r[m,A]$
            - $\perp$

Teorie rovnosti

Dosud jsme rovnost uváděli jako jeden z predikátů.

Definice

Nechť $L = \{=\}$, kde $=$ je binární predikát rovnosti. Teorie rovnosti je dána těmito axiomy:

i) $(\forall x)(x = x)$ – reflexivita

ii) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z)\big)$ – transitivita

iii) $(\forall x)(\forall y)\big(x = y \Rightarrow y = x\big)$ – symetrie

iv) Je-li f je n-ární funkční symbol, pak
$(\forall x_1)\cdots(\forall y_1)\cdots\big((x_1 = y_1)\wedge\ldots\wedge(x_n = y_n)\big) \Rightarrow \big(f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n)\big)$

v) Je-li p n-ární predikátový symbol, pak
$(\forall x_1)\cdots(\forall y_1)\cdots\big((x_1 = y_1)\wedge\ldots\wedge(x_n = y_n)\big) \Rightarrow \big(p(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow p(y_1,\ldots,y_n)\big)$

Logika 1. řádu s rovností – kvantifikátory se užívají pouze pro proměnné.

Příklad

Příklad

Je formule $p(a) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \Leftrightarrow x = a)$ logicky platná?

- $\neg(p(a) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \Leftrightarrow x = a))$ $\quad *$
  - $p(a)$
    - $(\exists x)\neg(p(x) \Leftrightarrow x = a)$ $\quad *$
      - $\neg(p(b) \Leftrightarrow b = a)$ $\quad *$
        - $p(b)$
          - $\neg(b = a)$
        - $\neg p(b)$
          - $b = a$
            - $\perp$
  - $\neg p(a)$
    - $(\forall x)(p(x) \Leftrightarrow x = a)$
      - $p(a) \Leftrightarrow a = a$ $\quad *$
        - $p(a)$
          - $a = a$
            - $\perp$
        - $\neg p(a)$
          - $\neg(a = a)$
            - $\perp$

Protipříklad: $M = \{a, b\}, p(a), p(b), \neg(b = a)$.

Teorie ekvivalence

Definice

Nechť $L = \{r(x,y)\}$. Predikát $r(x,y)$ je **ekvivalence**, jestliže platí

- R: $(\forall x) r(x,x)$ – reflexivita
- T: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((r(x,y) \wedge r(y,z)) \Rightarrow r(x,z)\big)$ – transitivita
- S: $(\forall x)(\forall y)\big(r(x,y) \Rightarrow r(y,x)\big)$ – symetrie

Modely ekvivalence:

i) Množina všech přímek v $\mathbb{R}^2$, x *je rovnoběžná s* y,

ii) $\mathbb{N}$, $x = y \pmod n$, tj. n *dělí* $|x-y|$,

iii) Množina formulí VL nad n prvotními formulemi, $A \models\!\!\!\dashv B$,

iv) Množina všech trojúhelníků v rovině, x je podobný y,

v) Množina všech lidí, x *je sourozenec* y *(má oba stejné rodiče)*,

Teorie částečného uspořádání

Příklad

Teorie T částečného uspořádání (ostrého) má tyto axiomy:

(i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)\big)$ – transitivita

(ii) $(\forall x)\neg p(x,x)$ – ireflexivita

Modely:

- $\mathbb{N}$, $x < y$, tj. $\langle \mathbb{N}, < \rangle$.
- $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.
- $\langle \mathbb{N}, > \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, > \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $\langle \mathbb{R}, > \rangle$.
- $\mathbb{N}$, x je vlastní dělitel y.
- Množina všech lidí, $p(x,y)$ – x je předkem (resp. potomkem) y.

Teorie částečného uspořádání

Příklad

Logickým důsledkem teorie částečného uspořádání je antisymetrie, tj. $(\forall x)(\forall y)\big(p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)\big)$.

$$\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)\big), (\forall x)\neg p(x,x)\} \models (\forall x)(\forall y)\big(p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)\big)$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)\big) \wedge (\forall x)\neg p(x,x) \wedge (\exists x)(\exists y)(p(x,y) \wedge p(y,x))$$

$$(\exists x)(\exists y)\big(p(x,y) \wedge p(y,x)\big)$$

$$p[m,n] \wedge p[n,m]$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)\big)$$

$$\big(p[m,n] \wedge p[n,m]\big) \Rightarrow p[m,m]$$

$$\begin{array}{cc} \neg\big(p[m,n] \wedge p[n,m]\big) & p[m,m] \\ \perp & (\forall x)\neg p(x,x) \\ & \neg p[m,m] \\ & \perp \end{array}$$

Teorie částečného uspořádání (neostrého)

Definice

Nechť $L = \{q(x, y)\}$. Pro teorii částečného uspořádání (neostrého) platí následující axiomy:

- R: $(\forall x)q(x, x)$ – reflexivita
- T: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((q(x, y) \wedge q(y, z)) \Rightarrow q(x, z))$ – transitivita
- As: $(\forall x)(\forall y)((q(x, y) \wedge q(y, x)) \Rightarrow (x = y))$ – slabá antisymetrie

Modely:

i) $\mathbb{N}$, x *je dělitel* y.

ii) Množina formulí VL vytvořených nad n prvotními formulemi, $A \Rightarrow B$,

iii) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$

iv) $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \geq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \geq \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$

Poznámka: Ostré uspořádání $p(x, y)$ lze převést na neostré $q(x, y)$ a naopak.

- $p(x, y) \boxminus \big(q(x, y) \wedge \neg(x = y)\big)$
- $q(x, y) \boxminus \big(p(x, y) \vee (x = y)\big)$

Teorie lineárního uspořádání

Definice

Nechť $L = \{p(x, y)\}$. **Lineární uspořádání** je částečné uspořádání (ostré), pro které navíc platí

- L: $(\forall x)(\forall y)\big(p(x, y) \vee (x = y) \vee p(y, x)\big)$ – linearita

Modely lineárního uspořádání:

i) $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$

ii) $\langle \mathbb{N}, > \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, > \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $\langle \mathbb{R}, > \rangle$

iii) $\langle \mathbb{S}, < \rangle$, kde $\mathbb{S}$ je množina všech sudých čísel.

iv) Slova podle abecedy. Vojáci podle výšky.

v) $\mathbb{N}$, x je vlastní dělitel y. Není lineární uspořádání.

Isomorfní interpretace

Definice

Nechť $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou dvě interpretace jazyka L. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je **isomorfní** s $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : M \to N$ takové, že pro všechny atomické formule p jazyka L a pro každé ohodnocení e platí, že

$$\mathcal{M} \models p_{\mathcal{M}}[e] \quad \text{právě tehdy, když} \quad \mathcal{N} \models p_{\mathcal{N}}[f \circ e].$$

Příklad. Přirozená čísla a sudá čísla jsou isomorfní struktury vzhledem k $<$.

- Isomorfismus $f : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$ definujeme $f(n) = 2n$.
- f je vzájemně jednoznačné zobrazení.
- $\mathcal{N} \models (x < y)[e]$ právě tehdy, když
  $\mathcal{N} \models e(x) <_{\mathcal{N}} e(y)$ právě tehdy, když
  $\mathcal{S} \models 2 \cdot e(x) <_{\mathcal{S}} 2 \cdot e(y)$.
- Tedy $\langle \mathbb{S}, < \rangle \quad \cong \quad \langle \mathbb{N}, < \rangle$.

Elementárně ekvivalentní modely

Definice

Nechť L je jazyk, $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou dvě interpretace jazyka L.

- **Teorie interpretace** $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ je množina všech uzavřených formulí jazyka L, které platí v interpretaci $\mathcal{M}$.
- Jestliže $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, pak řekneme, že $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou **elementárně ekvivalentní**. Píšeme $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Poznámky:

- $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ je nekonečná množina formulí.
- $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$
- Jestliže $\mathcal{M} \models T$, pak $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.
- Je-li $\mathcal{M} \models T$ a $T \models A$, pak $\mathcal{M} \models A$.
- Každé dva isomorfní modely jsou elementárně ekvivalentní. Tj. jestliže $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, potom $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
- Tedy například $\langle \mathbb{S}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{N}, < \rangle$.

Úplná teorie

Definice

Nechť T je teorie v jazyce L.

- Formule A je **vyvratitelná** v T, právě když $T \models \neg A$.
- Teorie T je **úplná**, jestliže každá uzavřenou formuli jazyka L je buď logickým důsledkem T nebo je vyvratitelná, tj. buď platí $T \models A$, nebo $T \models \neg A$.

Poznámky.

i) $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ je úplná.

ii) Teorie je úplná, právě když jsou každé dva její modely elementárně ekvivalentní.

iii) Tedy nalezneme-li dva modely téže teorie, v nichž platí opačné sentence, pak teorie není úplná.

Je teorie částečného uspořádání úplná?

Ne, neboť v některých modelech linearita platí a v jiných nikoli.

$\langle \mathbb{N}, < \rangle \models (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \vee (x = y) \vee p(y,x))$

$\langle \mathbb{N}, x$ je vlastní dělitel $y \rangle \models \neg(\forall x)(\forall y)\big(p(x,y) \vee x = y \vee p(y,x)\big)$

Domácí úkol

1. Napište alespoň tři předpoklady, z nichž vyplývá nějaký důsledek. Zformalizujte v predikátové logice (musí obsahovat alespoň jeden obecný a jeden existenční kvantifikátor) a ukažte, že se skutečně jedná o logický důsledek.

2. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí, že existují alespoň dva uživatelé Facebooku, kteří mají stejný počet přátel? Podmínky:
   - Každý je přítelem sám sebe.
   - Jestliže je někdo je přítelem někoho jiného, pak on je zase jeho přítelem.