Cvičení 10.

(1) Teorie ekvivalence v jazyce $L = \{p(x, y)\}$, kde $p(x, y)$ je binární predikátový symbol, je dána těmito axiomy

(i) $(\forall x)p(x, x)$ – *reflexivita*
(ii) $(\forall x)(\forall y)((p(x, y) \Rightarrow p(y, x))$ – *symetrie*
(iii) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, y) \wedge p(y, z)) \Rightarrow p(x, z))$ – *transitivita*

Která z následujících interpretací je modelem teorii ekvivalence? Určete její faktorové třídy. Pokud není modelem, uveďte, který axiom neplatí.

a) M – množina všech přímek, $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ – *x je rovnoběžná s y.* Ano. Množina všech vzájemně rovnoběžných přímek.
b) M – množina všech přímek, $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ – *x je kolmá na y.* Ne, neplatí transitivita.
c) M – množina všech přímek, $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ – *x protíná y.* Ne, neplatí transitivita.
d) $M = \mathbb{Z}$, $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ – 5 *dělí* $|x - y|$, tj. $x = y(\mod 5)$. Ano. Množina všech čísel rovných modulo 5.
e) M – množina všech formulí výrokové logiky, $p(A, B)$ – $A \models\!\!\!\!\dashv B$. Ano. Množina logicky ekvivalentních formulí.
f) $M = \mathbb{N}$, $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ – $|x - y| = 10$. Ne, neplatí transitivita.
g) $M = \mathbb{N}$, $p_{\mathcal{M}}(x, y)$ – $(\exists k)(x = k \cdot y)$, tj. x/y (x dělí y). Ne, neplatí symetrie.

(2) Teorie lineárního uspřádání v jazyce $L = \{p(x, y)\}$ je dána těmito formulemi

(i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, y) \wedge p(y, z)) \Rightarrow p(x, z))$ – *transitivita*
(ii) $(\forall x)\neg p(x, x)$ – *ireflexivita*
(iii) $(\forall x)(\forall y)((p(x, y) \vee x = y \vee p(y, x))$ – *linearita*

Které z těchto interpretací jsou jejími modely? Které modely nejsou vzájemně elementárně ekvivalentní? Nalezněte formuli, která v jednom z nich platí a ve druhém neplatí?

a) $\langle \mathbb{N}, < \rangle$
b) $\langle \mathbb{N}, > \rangle$
c) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$
d) $\langle \mathbb{N}, p(x, y) \rangle$, kde $p(x, y)$ znamená, že *x dělí y.*
e) $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$
f) $\langle \mathbb{R}_0^+, < \rangle$, kde $\mathbb{R}_0^+$ jsou nezáporná reálná čísla,
g) $\langle \mathbb{R}, < \rangle$

Řešení. Modely jsou a), b), e), f), g). Žádné z nich nejsou elementárně ekvivalentní.
a) $\langle \mathbb{N}, < \rangle \models (\exists x)(\forall y)(x < y \vee x = y)$ - *existence nejmenšího prvku*
b) $\langle \mathbb{N}, > \rangle \models (\exists x)(\forall y)(y > x \vee x = y)$ - *existence nejmenšího prvku* (je to jiná formule).
c) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, není model, neplatí *ireflexivita*
d) $\langle \mathbb{N}, p(x, y) \rangle$, kde $p(x, y)$ – *x dělí y*, není model, neplatí *ireflexivita*, ani *lineraita.*
e) $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \models (\forall x)(\exists y)(\exists z)(y < x \wedge x < z)$ - *neexistuje ani nejmenší ani největší prvek.*
f) $\langle \mathbb{R}_0^+, < \rangle$, kde $\mathbb{R}_0^+$ jsou nezáporná reálná čísla - *existuje nejmenší prvek, hustota.*
g) $\langle \mathbb{R}, < \rangle \models (\forall x)(\forall y)(x < y \Rightarrow (\exists z)(x < y \wedge y < z))$ - *hustota.*

Více viz přednáška 9.

(3) Které z uvedených interpretací jsou modelem teorie grup? Srovnejte zvlášť modely aditivních a zvlášť multiplikativních grup. Pro každé dva, které nejsou elementárně ekvivalentní, napište uzavřenou formuli (sentenci) jazyka grup, která je rozliší.

a) $\langle \{0\}, +, 0 \rangle$,
b) $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$, přirozená čísla,
c) $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, celá čísla,

d) $\langle \mathbb{Q}, +, 0\rangle$, racionální čísla,
e) $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$, reálná čísla,
f) $\langle \{1\}, \cdot, 1\rangle$,
g) $\langle \{1, -1\}, \cdot, 1\rangle$,
h) $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1\rangle$ – přirozená čísla,
i) $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ – racionální čísla,
j) $\langle \mathbb{Q}^+, \cdot, 1\rangle$ – kladná racionální čísla,
k) $\langle \mathbb{R}^+, \cdot, 1\rangle$ – kladná reálná čísla,
l) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1\rangle$ – nenulová racionální čísla,
m) $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1\rangle$ – nenulová reálná čísla.

Řešení. Viz přednáška 9.