Cvičení 11.

(1) V Booleově algebře $(S, +, \cdot, ', 0, 1)$ zjednodušte následující výrazy:

a) $(x + (y \cdot (x' + y')))'$,
b) $x' + (y \cdot (x + y)')$,
c) $(x + y)' + (x \cdot y)'$,
d) $xyz + (z' \cdot (x' + y'))'$
e) $((x' + 1)' + (x + 0))'$

Řešení. a) $x' \cdot y'$, b) x', c) $x' + y'$, d) $z + x \cdot y$, e) x'.

(2) Vyjděme z definice

$$a \leq b, \text{ právě když } a \cdot b = a$$

Dokažte, že pro každé tři prvky x, y a z Booleovy algebry platí

a) $x \cdot y \leq x$
b) $x \leq x + y$.
c) $0 \leq x, x \leq 1$.
d) $x \leq y$, právě když $x + y = y$
e) $x \leq x$ – reflexivita
f) $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ – transitivita
g) $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ – slabá antisymetrie
h) $\inf\{x, y\} = x \cdot y$
i) $\sup\{x, y\} = x + y$.
j) Jestliže $x \leq y \wedge x \leq z$, pak $x \leq y \cdot z$.
k) Jestliže $y \leq x \wedge z \ \leq x$, pak $y + z \ \leq x$.

Řešení.
a) $x \cdot y \leq x$, právě když $(x \cdot y) \cdot x = x \cdot y$, což platí.
b) $x \leq x + y$, právě když $x \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x + x \cdot y = x$.
c) $0 \leq x$, právě když $0 \cdot x = O$, což platí. $x \leq 1$, právě když $x \cdot 1 = x$, což platí.
d) $x \leq y$, právě když $x + y = y$
$\Rightarrow$: Jestliže $x \leq y$, pak dle definice $x \cdot y = x$, tedy $x + y = x \cdot y + y = y$.
$\Leftarrow$: Jestliže platí $x + y = y$, potom $x \cdot y = x \cdot (x + y) = x$, tedy $x \leq y$.
e) Dle definice $x \leq x$, právě když $x \cdot x = x$, a to platí.
f) Jestliže $x \leq y$ a zároveň $y \leq z$, pak podle definice $x + y = y$ a zároveň $y + z \ = z$, a tedy $x + z \ = x + (y + z) = (x + y) + z \ = y + z \ = z$. To znamená $x \leq z$.
g) Jestliže $x \leq y$ a zároveň $y \leq x$, pak podle definice $x + y = y$ a zároveň $y + x = x$. Máme tedy $x = y + x = x + y = y$.
h) V přednášce.
i) Obdobně.
j) Jestliže $x \leq y \wedge x \leq z$, pak $x \cdot y = x \wedge x \cdot z = x$, tedy $x \cdot y \cdot z = x \cdot z = x$ neboli $x \leq y \cdot z$.
k) Jestliže $y \leq x \wedge z \ \leq x$, pak $y \cdot x = y \wedge z \ \cdot x = z$, tedy $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z = y + z$ neboli $y + z \ \leq x$.

(3) Ověřte, že inkluze $\subseteq$ odpovídá uspořádání Booleovy algebry množiny všech podmnožin.

Řešení.
Uspořádání je definováno takto: $x \leq y$, právě když $x \cdot y = x$. V interpretaci množin máme ověřit, že pro každé dvě množiny a, b platí, že

$$a \subseteq b, \text{ právě když } a \cap b = a.$$

Vždy platí $a \subseteq a$ a jestliže též $a \subseteq b$, pak $a \subseteq a \cap b$. Vždy platí $a \cap b \subseteq a$. Tedy $a \cap b = a$.
Vždy platí $a \cap b \subseteq b$ a jestliže $a = a \cap b$, pak $a = a \cap b \subseteq b$, tedy $a \subseteq b$.

(4) Nechť $M = \{a, b, c\}$. Nakreslete graf uspořádání Booleovy algebry potenční množiny $\mathcal{P}(M)$. Kolik má prvků? Kolik má atomů?

(5) Ověřte, že operace logického důsledku odpovídá uspořádání Booleovy algebry.

Řešení.

Uspořádání je definováno takto: $x \leq y$, právě když $x \cdot y = x$. V interpretaci výrokové logiky máme ověřit, že

$$A \models B, \text{ právě když } A \wedge B \models\!\!\!\dashv A.$$

Jestliže $A \models B$, pak $A \models A \wedge B$, ale $A \wedge B \models A$ platí vždy. Tedy $A \wedge B \models\!\!\!\dashv A$.

Jestliže $A \wedge B \models\!\!\!\dashv A$, pak $A \models A \wedge B$ a vždy platí $A \wedge B \models B$, tedy $A \models B$.

(6) Zjednodušte booleovské funkce:

a) $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$,
b) $\neg(A \vee \neg(B \wedge (A \vee B)))$,
c) $\neg(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge \neg B)$.

Řešení. a) B, b) $\neg A \wedge B$, c) $\top$.

(7) Srovnejte následující formule podle platnosti logického důsledku.

a) $\bot, \top, A, A \wedge B, A \vee B$,
b) $\bot, \top, \neg A \Rightarrow B, \neg A \wedge B, \neg(A \Leftrightarrow B)$,
c) $\bot, \top, A \uparrow B, A \downarrow B, \neg B$.

Řešení.

Booleova algebra čtveřic 0 a 1 je isomorfní s Booleovou algebrou výroků nad dvěma prvotními formulemi. Platí $\top \cong \langle 1,1,1,1 \rangle$, $\bot \cong \langle 0,0,0,0 \rangle$, $A \cong \langle 1,1,0,0 \rangle$, $A \wedge B \cong \langle 1,0,0,0 \rangle$, $A \vee B \cong \langle 1,1,1,0 \rangle$, atd. Jejich uspořádání odpovídá logickému důsledku.

a) $\bot \models A \wedge B \models A \models\!\!\!\dashv A \vee B \models \top$,
b) $\bot \models \neg A \wedge B \models \neg(A \Leftrightarrow B) \models \neg A \Rightarrow B \models \top$,
c) $\bot \models A \downarrow B \models \neg B \models A \uparrow B \models \top$.

(8) Nechť a je libovolný atom a x, y, z jsou libovolné prvky Booleovy algebry. Potom
(i) $z \leq x \cdot y$ právě tehdy, když $z \leq x$ a $z \leq y$,
(ii) buď $a \cdot x = a$, nebo $a \cdot x = 0$,
(iii) $a \leq x + y$ právě tehdy, když $a \leq x$ nebo $a \leq y$,
(iv) buď $a \leq x$, nebo $a \leq x'$.

Řešení. Viz přednáška 11.