Cvičení 6.

(1) Rozeberte podrobně, proč

$$(\forall x)(\exists y)((x < y) \wedge (\forall z)((\exists u)(y = z \cdot u) \Rightarrow ((z = 1) \vee (z = y))))$$

je formule jazyka aritmetiky a vypište všechny její termy, atomické fromule a podformule a nakreslete formační strom.

Řešení.
Termy: x, y, z, 1, $z \cdot u$.
Atomické formule: $x < y$, $y = z \cdot u$, $z = 1$, $z = y$.
Podformule:
$(\exists u)(y = z \cdot u)$,
$(z = 1) \vee (z = y)$,
$(\exists u)(y = z \cdot u) \Rightarrow ((z = 1) \vee (z = y))$,
$(\forall z)(\exists u)(y = z \cdot u) \Rightarrow ((z = 1) \vee (z = y))$,
$((x < y) \wedge (\forall z)((\exists u)(y = z \cdot u) \Rightarrow ((z = 1) \vee (z = y))))$,
$(\exists y)((x < y) \wedge (\forall z)((\exists u)(y = z \cdot u) \Rightarrow ((z = 1) \vee (z = y))))$
$(\forall x)(\exists y)((x < y) \wedge (\forall z)((\exists u)(y = z \cdot u) \Rightarrow ((z = 1) \vee (z = y))))$
Všechny proměnné mají pouze vázaný výskyt, jedná se o uzavřenou formuli.

(2) Nechť $L = \{p, <, q, f, +, \cdot, 1, 2\}$ je jazyk, kde p je unární predikát, $<$ a q jsou binární predikáty, f je unární funkční symbol, $+$ a $\cdot$ jsou binární funkční symboly, 1 a 2 jsou konstanty.

Vypište z následujících formulí všechny termy a všechny atomické podformule (a nakreslete jejich formační stromy). U každého výskytu proměnné určete, zda je volný či vázaný. Které z formulí jsou uzavřené a které otevřené?

a) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow \neg q(x, y))$
b) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(f(f(x + y)) < z \cdot z + 1)$
c) $(\exists u)(p(u) \wedge (\forall x)(q(u, x) \Rightarrow q(1, x)))$
d) $x \cdot f(f(1)) < (x + x) + x$
e) $1 + 1 = 2$

Řesení:

a) Termy: x, y, atomické podformule: $p(x), q(x, y)$, oba výskyty x jsou vázané, výskyt y je volný, ani otevřená, ani uzavřená formule.
b) Termy: $x, y, x+y, f(x+y), f(f(x+y)), 1, z, z \cdot z, z \cdot z + 1$, atomické podformule: $f(f(x+y)) < z \cdot z + 1$, výskyty x, y, z jsou vázané, uzavřená formule.
c) Termy: $x, u, 1$, atomické podformule: $p(u), q(u, x), q(1, x)$, oba výskyty x, u jsou vázané, uzavřená formule.
d) Termy: $x, 1, f(1), f(f(1)), x \cdot f(f(1)), x + x, (x + x) + x$, atomické podformule: $x \cdot f(f(1)) < (x + x) + x$, výskyt x je volný, otevřená formule.
e) Termy: $1, 1 + 1, 2$, atomické podformule: $1 + 1 = 2$, otevřená i uzavřená formule.

(3) Vyjádřete v jazyce $L = \{+, \cdot, =\}$ formule, které v interpretaci v přirozených číslech $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ znamenají tato tvrzení.

a) $x \leq y$ $\quad (\exists z)(y = x + z)$
b) $x < y$ $\quad (\exists z)(y = x + z) \wedge \neg(x = y)$
c) x je sudé $\quad (\exists y)(x = y + y)$
d) x je liché $\quad (\forall y)\neg(x = y + y)$
e) $x = 0$ $\quad (\forall y)(x + y = y)$.
f) $x = 1$ $\quad (\forall y)(x \cdot y = y)$.
g) $x = 2$ $\quad (\forall y)(x \cdot y = y + y)$.
h) x je číslo složené $\quad (\exists y)(\exists z)((x = y \cdot z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(z = x))$.

i) x je prvočíslo $\quad (\forall y)(\forall z)((x = y \cdot z) \Rightarrow ((y = x) \vee (z = x)))$.
j) x dělí $y \quad (\exists z)(y = x \cdot z)$.

Přibereme do jazyka dva nové binární predikáty $<, \leq$.

k) Existuje nejmenší číslo $\quad (\exists y)(\forall x)(y \leq x)$.
l) Existuje právě jedno nejmenší číslo $\quad (\exists y)((\forall x)(y \leq x) \wedge (\forall z)((\forall x)(z \leq x) \Rightarrow z = y))$.
m) Neexistuje největší číslo $\quad (\forall y)(\exists x)(x > y)$.
n) Každý dělitel musí být menší nebo roven číslu, které dělí $\quad (\forall x)(\forall y)((\exists z)((y = x \cdot z) \Rightarrow x \leq y))$.

Přibereme nový binární predikát $d(x, y)$ - x dělí y
o) x je nejmenší společný násobek y a $z \quad d(y, x) \wedge d(z, x) \wedge (\forall u)((d(y, u) \wedge d(z, u)) \Rightarrow (x \leq u))$
p) x je největší společný dělitel y a $z \quad d(x, y) \wedge d(x, z) \wedge (\forall u)((d(u, y) \wedge d(u, z)) \Rightarrow (u \leq x))$

Přibereme nový unární predikát $p(x)$ *-* x *je prvočíslo, a také konstantu 2.*

q) Existuje nějaké prvočíslo. $\quad (\exists x)p(x)$.
r) Existuje nekonečně mnoho prvočísel. $\quad (\forall y)(\exists x)(p(x) \wedge x > y)$.
s) Každé prvočíslo, které je větší než 2, je liché. $\quad (\forall x)((p(x) \wedge x > 2) \Rightarrow \neg(\exists z)(x = z + z))$.
t) Existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojic. $\quad (\forall y)(\exists x)(x > y \wedge p(x) \wedge p(x + 2))$.
u) Každé sudé číslo větší než 2 lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel. (Goldbachova hypotéza) $(\forall x)(((\exists u)(x = u + u) \wedge x > 2) \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(x = y + z \wedge p(y) \wedge p(z)))$

(4) Jazyk teorie množin $L = \{\in\}$ obsahuje pouze jeden binární symbol $\in$, kde $x \in y$ má význam x *je prvkem* y. Vyjádřete, že
a) $a \subseteq b$
b) $a = b$
c) $c = a \cap b$,
d) $c = a \cup b$,
e) $c = a - b$,
f) $a = \emptyset$.