Cvičení 7.

(1) Následující tvzení zformalizujte v jazyce $L = \{z(x), s(x), u(x), p(x)\}$, kde predikáty $z(x), s(x), p(x), u(x)$ po řadě znamenají *x je zde, x je student, x píše, x je učitel.* Napište negaci a vyjádřete v přirozeném jazyce.

a) *Všichni studenti jsou zde.*
b) *Někteří studenti zde nejsou.*
c) *Jsou zde jen studenti.*
d) *Nejsou zde studenti.*
e) *Všichni studenti a učitelé jsou zde.*
f) *Všichni studenti jsou zde a píší.*
g) *Někteří studenti jsou zde a píší.*
h) *Zde jsou pouze studenti, kteří píší.*

Řešení.
a) $(\forall x)(s(x) \Rightarrow z(x))$. Negace b)
b) $(\exists x)(s(x) \wedge \neg z(x))$. Negace a)
c) $(\forall x)(z(x) \Rightarrow s(x))$. Negace $(\exists x)(z(x) \wedge \neg s(x))$. *Je zde někdo, kdo není student.*
d) $(\forall x)(z(x) \Rightarrow \neg s(x))$. Negace $(\exists x)(s(x) \wedge z(x))$. *Je zde student.*
e) $(\forall x)((s(x) \vee u(x)) \Rightarrow z(x))$. Negace $(\exists x)((s(x) \vee u(x)) \wedge \neg z(x))$. *Některý učitel nebo student zde není.*
f) $(\forall x)(s(x) \Rightarrow (z(x) \wedge p(x)))$. Negace $(\exists x)(s(x) \wedge (\neg z(x) \vee \neg p(x)))$.
g) $(\exists x)(s(x) \wedge z(x) \wedge p(x))$. Negace $(\forall x)((s(x) \wedge z(x)) \Rightarrow \neg p(x))$ *Žádní studenti, kteří jsou zde, nepíší.*
h) $(\forall x)(z(x) \Rightarrow (s(x) \wedge p(x)))$. Negace $(\exists x)(z(x) \wedge (\neg s(x) \vee \neg p(x)))$

(2) Následující tvrzení zformalizujte, vytvořte negaci a vyjádřete v přirozeném jazyku.
a) *Na stole leží alespoň jedna kniha.*
b) *Na stole leží právě jedna kniha.*
c) *Na stole leží alespoň dvě knihy.*
d) *Na stole leží nejvýše jedna kniha.*
e) *Na stole leží právě dvě knihy.*
f) *Na stole leží nejvýše dvě knihy.*
g) *Jediná kniha, která leží na stole, je Pán prstenů.*

Řešení.
Užijeme unární predikát $s(x)$ – *x je kniha ležící na stole.*
a) $(\exists x)s(x)$,
negace: $(\forall x)\neg s(x)$ – *Na stole neleží žádná kniha.*
b) $(\exists x)(s(x) \wedge (\forall y)((y \neq x) \Rightarrow \neg s(y)))$,
negace: $(\forall x)(\neg s(x) \vee (\exists y)((y \neq x) \wedge s(y)))$ – *Buď neleží na stole žádná kniha nebo jich tam leží více.*
c) $(\exists x)(\exists y)(s(x) \wedge s(y) \wedge \neg(x = y))$,
negace: $(\forall x)(\forall y)(\neg s(x) \vee \neg s(y) \vee (x = y))$.
Upravíme: $(\forall x)(\forall y)((s(x) \wedge s(y)) \Rightarrow (x = y))$ – *Na stole leží nejvýše jedna kniha.*
d) $(\forall x)(\forall y)((s(x) \wedge s(y)) \Rightarrow (x = y))$, negace: viz předchozí bod.
e) $(\exists x)(\exists y)(s(x) \wedge s(y) \wedge \neg(x = y) \wedge (\forall z)(s(z) \Rightarrow ((z = x) \vee (z = y))))$,
negace: $(\forall x)(\forall y)(\neg s(x) \vee \neg s(y) \vee (x = y) \vee (\exists z)(s(z) \wedge \neg(z = x) \wedge \neg(z = y)))$.
Upravíme: $(\forall x)(\forall y)((s(x) \wedge s(y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow (\exists z)(s(z) \wedge \neg(z = x) \wedge \neg(z = y)))$.
Jestliže na stole leží dvě knihy, pak tam leží ještě třetí.

f) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((s(x) \wedge s(y) \wedge s(z)) \Rightarrow ((x = y) \vee (x = z) \vee (z = y)))$,
negace: $(\exists x)(\exists y)(\exists z)((s(x) \wedge s(y) \wedge s(z)) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(z = y))$.
Na stole leží alespoň tři knihy.

g) $s(P) \wedge (\forall y)((y \neq P) \Rightarrow \neg s(y))$,
negace: $\neg s(P) \vee (\exists y)((y \neq P) \wedge s(y))$ – *Na stole neleží Pán prstenů nebo tam leží ještě další kniha.*

(3) Uvažme následující formule v jazyce $\{<\}$ a jejich obvyklou interpretaci v přirozených číslech $\mathcal{N}$.

- Zkuste nalézt ohodnocení, pro něž v této interpretaci platí, a ohodnocení, pro něž neplatí.
- Vytvořte z nich uzavřené formule (doplňte je kvantifikátory) tak, aby byly v této interpretaci pravdivé. Je-li více možností, vyberte tu nejobecnější.

a) $x < y$
b) $x < y \vee y < x$
c) $x < y \Rightarrow \neg(y < x)$
d) $x < y \Rightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y)$
e) $(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$

Totéž cvičení proveďte v jazyce $\{\leq\}$ v ovbyklé interpretaci v $\mathcal{N}$.

(4) Jsou následující formule v jazyce $L = \{r(x, y), p(x), K\}$, kde K je konstanta a r, p jsou predikátové symboly, logicky platné, splnitelné, nebo kontradikce? Zdůvodněte.

a) $(\forall x)(\forall y)(r(x, y) \vee r(y, x))$
b) $r(x, y) \wedge \neg r(x, y)$
c) $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall y)p(y)$
d) $(\forall x)p(x) \vee (\exists x)\neg p(x)$
e) $(\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$
f) $(\forall x)(\exists y)r(y, x)$
g) $p(K) \Rightarrow (\exists x)p(x)$
h) $p(x) \Rightarrow (\forall x)p(x)$
i) $((\forall x)p(x)) \Rightarrow p(x)$
j) $(\exists x)(\forall y)r(x, y) \wedge (\exists y)(\forall x)\neg r(x, y)$
k) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \vee \neg p(x, y))$
l) $((\exists x)p(x)) \Rightarrow p(x)$
m) $p(x) \Rightarrow (\exists x)p(x)$
n) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \Rightarrow p(y, x))$
o) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \Rightarrow p(x, y))$

Řešení.
Logicky platné jsou c), d), g), i), k), m), o). Kontradikce jsou b), e), j). Ostatní jsou splnitelné.

(5) Dokažte, že pro množiny platí

a) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$
b) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
c) $a - (b \cup c) = (a - b) \cap (a - c)$
d) $a - (b \cap c) = (a - b) \cup (a - c)$
e) $a \subseteq b \models c - b \subseteq c - a$

Řešení.
a) $x \in a \cup (b \cap c) \Dashv\vDash x \in a \vee x \in (b \cap c) \Dashv\vDash x \in a \vee (x \in b \wedge x \in c) \Dashv\vDash (x \in a \wedge x \in b) \vee (x \in a \wedge x \in c) \Dashv\vDash x \in a \cup b \vee x \in a \cup c \Dashv\vDash x \in (a \cup b) \cap (a \cup c)$

e) Nechť $a \subseteq b$. To znamená, že $(\forall x)(x \in a \Rightarrow x \in b)$, tedy platí i $(\forall x)(x \notin b \Rightarrow x \notin a)$ (*zákon kontrapozice*). Platí tedy též $(\forall x)((x \in c \wedge x \notin b) \Rightarrow (x \in c \wedge x \notin a))$, tedy $(\forall x)(x \in c - b \Rightarrow x \in c - a)$. Tedy $c - b \subseteq c - a$.
Neformálněji. Jestliže $x \in c - b$, pak $x \in c$ a $x \notin b$. Tedy $x \in c$ a $x \notin a$.