Cvičení 8.

V jazyce $L = \{f, 0, <, =\}$, kde $f(x)$ je unární funkce, 0 je konstanta, $=$, $<$ mají obvyklý význam v interpretaci reálných čísel $\mathbb{R}$. Napište formalizaci tohoto tvrzení.

$$\textit{Je-li } f \textit{ rostoucí funkce, pak } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

(1) Které z následujících formulí jsou logicky platné? Dokažte nebo uveďte protipříklad, tj. interpretaci, která není modelem. Použijte úpravu pomocí logicky ekvivalentních formulí nebo sémantický strom. Nechť $p(x, y)$ je binární a $s(x), r(x)$ jsou unární predikáty.

a) $(\forall x)(s(x) \wedge r(x)) \Rightarrow ((\forall x)s(x) \wedge (\forall x)r(x))$
b) $((\forall x)s(x) \wedge (\forall x)r(x)) \Rightarrow (\forall x)(s(x) \wedge r(x))$
c) $(\exists x)(s(x) \wedge r(x)) \Rightarrow ((\exists x)s(x) \wedge (\exists x)r(x))$
d) $((\exists x)s(x) \wedge (\exists x)r(x)) \Rightarrow (\exists x)(s(x) \wedge r(x))$
e) $(\exists x)(s(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow ((\exists x)s(x) \Rightarrow (\exists x)r(x))$
f) $((\exists x)s(x) \Rightarrow (\exists x)r(x)) \Rightarrow (\exists x)(s(x) \Rightarrow r(x))$
g) $(\exists x)(\exists y)p(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)p(x, y)$
h) $(\forall y)(\exists x)p(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)p(x, y)$

Řešení.
Chceme dokázat, že například a) je logicky platná formule. To znamená, že pro každou interpretaci $\mathcal{M}$ platí $\mathcal{M} \models (\forall x)(s(x) \wedge r(x)) \Rightarrow ((\forall x)s(x) \wedge (\forall x)r(x))$.

Předpokládejme, že tomu tak není a že existuje $\mathcal{M}$, pro něž tato formule není pravdivá. Platí tedy její negace $\mathcal{M} \models \neg((\forall x)(s(x)\wedge r(x)) \Rightarrow ((\forall x)s(x)\wedge(\forall x)r(x)))$ neboli platí $\mathcal{M} \models (\forall x)(s(x)\wedge r(x))\wedge\neg((\forall x)s(x)\wedge(\forall x)r(x))$. Postupným rozebráním podle Tarského definice dojdeme ke sporu (k tomu můžeme použít sémantický strom). Tedy náš předpoklad nenastal, formule a) je logicky platná.

Logicky platné jsou a), b), c), f), g).

(2) Nechť $A(x), B(x)$ jsou formule s jednou volnou proměnnou a c je konstanta. Dokažte, že následující tvrzení platí.

a) $(\exists x)A(x) \Rightarrow B(c) \;⫤\models\; (\forall x)(A(x) \Rightarrow B(c))$
b) $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(c) \;⫤\models\; (\exists x)(A(x) \Rightarrow B(c))$
c) $(\forall x)(\exists y)(A(x) \Rightarrow B(y)) \;⫤\models\; (\exists y)(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(y))$

(3) Rozhodněte a zdůvodněte, zda se jedna o logický důsledek, p, q, s jsou unární a r, v jsou binární predikáty.

a) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow \neg s(x)) \wedge (\exists x)(q(x) \wedge \neg s(x)) \models (\exists x)(q(x) \wedge \neg p(x))$ Ne.
b) $(\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x) \models (\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x))$ Ano.
c) $(\forall y)(\exists x)r(x, y) \models (\exists x)(\forall y)r(x, y)$ Ne.
d) $(\exists x)(\forall y)r(x, y) \models (\forall y)(\exists x)r(x, y)$ Ano.
e) $(\forall x)(\forall y)(v(x, y) \Rightarrow r(x, y)) \models (\exists x)(\forall y)v(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)r(x, y)$ Ano.
f) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, y)\wedge p(y, z)) \Rightarrow p(x, z))\wedge(\forall x)\neg p(x, x) \models (\forall x)(\forall y)(p(x, y) \Rightarrow p(y, x)$ Ano.
g) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \models (\forall x)((\exists y)(p(y) \wedge s(x, y)) \Rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge s(x, y)))$ Ano.
h) $(\forall x)p(x) \models (\forall y)(q(y) \Rightarrow p(y))$ Ano.
i) $(\forall x)(m(x) \Rightarrow t(x)), (\forall x)(t(x) \Rightarrow \neg p(x)), (\exists x)(p(x) \wedge o(x)) \models (\exists x)(o(x) \wedge \neg m(x))$ Ano.
j) $(\exists x)(\forall y)P(x, y), (\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y) \vee Q(x, y)) \models (\forall x)(\exists y)\neg Q(x, y)$ Ano.
k) $P \Rightarrow V(a), (\forall x)V(x) \vee (\forall x)\neg V(x), P \models (\forall x)V(x)$ Ano.

l) $(\exists x)(\forall y)P(x,y), (\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \models (\exists x)(\forall y)Q(x,y)$ Ano.

m) $(\forall x)(J(x) \Rightarrow R(x)) \models (\forall x)((\exists y)(J(y) \wedge F(x,y)) \Rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge F(x,y)))$ Ano.

n) $(\forall x)J(x) \Rightarrow (\forall y)(R(y) \Rightarrow J(y))$ Ano.