Cvičení 9.

(1) Nechť je dán jazyk $L = \{r(x,y)\}$, kde $r(x,y)$ je binární predikát v prediktové logice 1. řádu s rovností. Pro následující formule nalezněte interpretaci, v níž platí, a interpretaci, v níž neplatí.

(i) $(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow r(y,x))$ – symetrie
(ii) $(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,x))$ – antisymetrie
(iii) $(\forall x)(\forall y)((r(x,y) \wedge r(y,x)) \Rightarrow x = y)$ – slabá antisymetrie
(iv) $(\forall x) r(x,x)$ – reflexivita
(v) $(\forall x)\neg r(x,x)$ – ireflexivita
(vi) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((r(x,y) \wedge r(y,z)) \Rightarrow r(x,z))$ – transitivita
(vii) $(\forall x)(\exists y) r(x,y)$
(viii) $(\exists x)(\forall y) r(x,y)$

(2) Pro inspiraci je zde několik možných interpretací. Určete, které z předchozích vlastností v následujících interpretacích jsou pravdivé a které nikoli.

a) $\langle \mathbb{N}, < \rangle$
b) $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$
c) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$
d) $\langle \mathbb{N}, = \rangle$
e) $\langle \mathbb{N}, r(x,y) \rangle$, kde $r(x,y) : x = y \mod 3$, tj. $(\exists z)(|x-y| = 3 \cdot z)$
f) M – Množina lidí, $r(x,y)$ – x *je vlastní sourozenec* y.
g) M – Množina lidí, $r(x,y)$ – x *je předek* y.
h) M – Množina přímek v rovině, $r(x,y)$ – x *je kolmá na* y.
i) M – Množina přímek v rovině, $r(x,y)$ – x *je rovnoběžná na* y.

(3) Rozhodněte, zda se jedná o logicky platné formule:

a) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow ((\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x))$ Ano.
b) $((\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)) \Rightarrow (\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ Ne.
c) $(\exists x)(\forall y)r(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)r(x,y)$ Ano.
d) $(\exists x)(p(x) \Rightarrow (\forall x)p(x))$ *Existuje piják takový, že jestliže on pije, pak pijou všichni.* Ano.

Zda se jedná o logické důsledky:

e) $(\exists x)(\forall y)r(x,y), (\forall x)(\forall y)(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \models (\exists x)(\forall y)s(x,y)$ Ano.
f) $(\forall x)(v(x) \Rightarrow \neg s(x)), (\forall x)(h(x) \Rightarrow s(x)) \models (\forall x)(v(x) \Rightarrow \neg h(x))$ Ano.
g) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow v(x)), (\exists x)(a(x) \wedge f(x)), (\forall x)(v(x) \Rightarrow n(x)) \models (\exists x)(f(x) \wedge n(x))$. Ano.
h) $(\forall x)(v(x) \Rightarrow o(x)), \neg(\forall x)(r(x) \Rightarrow o(x)) \models (\exists x)(v(x) \wedge \neg r(x))$ Ne.
i) $(\forall x)(\exists y)(p(x) \Rightarrow r(y)) \models (\exists y)(\forall x)(p(x) \Rightarrow r(y))$ Ano.
j) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow s(x)) \models (\exists x)p(x) \Rightarrow (\forall x)s(x)$ Ne.

(4) Zformalizujte a rozhodněte, zda se jedná o logický důsledek. Dokažte.

a) *Žádní vychovatelé nejsou šílení. Všichni hráči jsou šílení. Tudíž žádní vychovatelé nejsou hráči.*
b) *Pouze občané jsou voliči. Ne všichni residenti jsou občané. Tudíž někteří voliči nejsou residenti. Nebo snad někteří residenti nejsou voliči.*
c) *Všechna auta jsou vozidla. Některá auta jsou Fordy. Všechna vozidla jsou náklaďáky. Tudíž některé Fordy jsou náklaďáky.*
d) *Žádná koťata nejsou velká. Někteří savci jsou velcí. Tudíž žádná koťata nejsou savci.*
e) *Všichni tenoři jsou buď obézní nebo zženštilí. Žádný otylý tenor není zženštilý. Někteří tenoři jsou zženštilí. Tudíž někteří tenoři nejsou obézní.*

f) *Žádní akrobati nejsou nemotorní. Tudíž jestliže Al je číšník a všichni číšníci jsou nemotorní, pak Al není akrobat.*

g) *Každý obchodník, který je básník, musí být bohatý člověk. Bohatí lidé jsou všichni konzervativní. Jestliže někdo konzervativní nemá rád poezii, pak žádní básníci nejsou konzervativní. Tudíž jestliže je nějaký bohatý člověk, který nemá rád poezii, pak žádní obchodníci nejsou básníci.*

Řešení

a) $(\forall x)(v(x) \Rightarrow \neg s(x)), (\forall x)(h(x) \Rightarrow s(x)) \models (\forall x)(v(x) \Rightarrow \neg h(x))$?

$$((\forall x)(v(x) \Rightarrow \neg s(x)) \wedge (\forall x)(h(x) \Rightarrow s(x))) \Dashv\!\!\vDash$$
$$\Dashv\!\!\vDash (\forall x)((v(x) \Rightarrow \neg s(x)) \wedge (h(x) \Rightarrow s(x)) \Dashv\!\!\vDash$$
$$\Dashv\!\!\vDash (\forall x)((s(x) \Rightarrow \neg v(x)) \wedge (h(x) \Rightarrow s(x))) \models (\forall x)(h(x) \Rightarrow \neg v(x)).$$

Ano, logický důsledek platí.

b) $(\forall x)((v(x) \Rightarrow o(x)), \neg(\forall x)(r(x) \Rightarrow o(x)) \models (\exists x)(v(x) \wedge \neg r(x))$?

$$(\forall x)(v(x) \Rightarrow o(x)), (\exists x)(r(x) \wedge \neg o(x)) \Dashv\!\!\vDash$$
$$\Dashv\!\!\vDash (\forall x)(\neg o(x) \Rightarrow \neg v(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge \neg o(x)) \not\models (\exists x)(v(x) \wedge \neg r(x)).$$

Ne, neplatí.

$(\forall x)(\neg o(x) \Rightarrow \neg v(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge \neg o(x)) \models (\exists x)(r(x) \wedge \neg v(x))$.

Ano, platí.

c) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow v(x)), (\exists x)(a(x) \wedge f(x)), (\forall x)(v(x) \Rightarrow n(x)) \models (\exists x)(f(x) \wedge n(x))$. Ano.

d) Nikoliv.

e) Ano.

f) Ano.

g) Ano.

(5) Zformalizujte a zdůvodněte, proč platí:

a) *Všichni profesoři jsou vzdělaní. Všichni vzdělaní profesoři jsou učenci. Tudíž všichni profesoři jsou vzdělaní učenci.*

b) *Všechny tanečnice jsou půvabné. Marie je studentka. Marie je tanečnice. Tudíž některé studentky jsou půvabné.*

c) *Nikdo z Davidových přátel nepije levné víno. Albert pije Melodii a Melodie je levné víno. Tudíž Albert není Davidův přítel.*

Řešení

a) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow v(x)), (\forall x)((p(x) \wedge v(x)) \Rightarrow u(x)) \models (\forall x)(p(x) \Rightarrow (v(x) \wedge u(x)))$? Sporem. Kdyby existovala interpretace $\mathfrak{M}$ taková, že by v ní formule

$$(\neg p[m] \vee v[m]) \wedge (\neg p[m] \vee \neg v[m] \vee u[m]) \wedge p[m] \wedge (\neg v[m] \vee \neg u[m]) \text{ byla pravdivá.}$$

To ale není možné a máme spor. Logický důsledek tedy platí.

b) $(\forall x)\Big((v(x) \vee w(x)) \Rightarrow ((r(x) \vee u(x)) \Rightarrow b(x))\Big) \models (\forall x)\Big(v(x) \Rightarrow (r(x) \Rightarrow b(x))\Big)$? Sporem:

$$(\forall x)\Big(\neg(v(x) \vee w(x)) \vee (\neg(r(x) \vee u(x)) \vee b(x))\Big) \wedge (\exists x)\Big(v(x) \wedge r(x) \wedge \neg b(x)\Big)$$
$$(\neg v[m] \wedge \neg w[m]) \vee \Big((\neg r[m] \wedge \neg u[m]) \vee b[m]\Big) \wedge v[m] \wedge r[m] \wedge \neg b[m].$$

Spor. Tedy platí.

c) $(\forall x)(t(x) \Rightarrow p(x)), s(M), t(M) \models (\exists x)(s(x) \wedge p(x))$? Platí. Ukážeme, že následující množina formulí není splnitelná. $\{(\forall x)(\neg t(x) \vee p(x)), s(M), t(M), (\forall x)(\neg s(x) \vee \neg p(x))\}$.

d) Dvě formalizace:

(i) $(\forall x)\Big(f(x,D) \Rightarrow \neg(\exists y)(l(y) \wedge p(x,y))\Big), p(A,M) \wedge l(M) \models \neg f(A,D)$,

(ii) $(\forall x)(\forall y)\Big(f(x,D) \Rightarrow (l(y) \Rightarrow \neg p(x,y))\Big), p(A,M) \wedge l(M) \models \neg f(A,D)$.

Oboje však vedou k témuž – dokázat, že následující množina formulí není splnitelná: $(\forall x)(\forall y)\Big(\neg f(x,D)$ $\neg l(y) \vee \neg p(x,y)\Big), p(A,M) \wedge l(M), f(A,D)$. To je snadné, vezmeme-li (x/A), (y/M) a použijeme základní rezoluční metodu.