

# Základy matematické analýzy

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.

[tomas.kalvoda@fit.cvut.cz](mailto:tomas.kalvoda@fit.cvut.cz)

Ing. Daniel Vašata

[daniel.vasata@fit.cvut.cz](mailto:daniel.vasata@fit.cvut.cz)

Katedra aplikované matematiky

Fakulta informačních technologií

České vysoké učení technické v Praze

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

1. ledna 2014



# Obsah

Úvod	vi
1 Základní pojmy a úvod	1
Uspořádaná dvojice; kartézský součin; relace; ekvivalence; uspořádání; zobrazení; reálná funkce reálné proměnné; zúžení zobrazení; obraz a vzor množiny; složené zobrazení; vlastnosti zobrazení; identické zobrazení; inverzní zobrazení; vlastnosti množiny reálných čísel; absolutní hodnota; aritmetická posloupnost; geometrická posloupnost; faktoriál; kombinační číslo; binomická věta; polynom; mocniny; odmocniny; exponenciála; logaritmus; trigonometrické funkce.	
1.1 Relace	1
1.2 Ekvivalence, uspořádání a zobrazení	3
1.3 Množina reálných čísel	8
1.4 Reálná funkce reálné proměnné	12
1.5 Základní vztahy	17
1.6 Důležité funkce	21
2 Reálné posloupnosti	29
Reálná posloupnost; vlastnosti posloupností; vybraná posloupnost; rozšířená reálná osa; okolí bodů rozšířené reálné osy; limita číselné posloupnosti; jednoznačnost limity; konvergentní, divergentní posloupnosti; věta o limitě vybrané posloupnosti; kritéria konvergence; hromadný bod posloupnosti; Bolzano-Cauchyova věta; věta o existenci limity omezené monotónní posloupnosti; algebraické operace na množině $\mathbb{R}$ ; věty o nerovnostech v limitách; věta o sevřené posloupnosti. Výpočty limit důležitých posloupností; rekurentně zadané posloupnosti; číselné řady; Eulerovo číslo; exponenciální funkce a obecná mocnina.	
2.1 Definice pojmu posloupnosti	29
2.2 Limita číselné posloupnosti	30
2.3 Vybrané posloupnosti	35
2.4 Kritéria konvergence posloupností	36
2.5 Algebraické operace na rozšířené reálné ose	40
2.6 Věty o limitách	41
2.7 Nerovnosti a limity	45
2.8 Příklady	47
2.9 Rekurentně zadané posloupnosti	50
2.10 Číselné řady	52

2.11	Eulerovo číslo	57
2.12	Obecná mocnina a exponenciální funkce	64
<b>3</b>	<b>Limita a spojitost funkce</b>	<b>68</b>
	Limita funkce; jednostranná limita funkce; Heineho věta; výpočet limity; limita složené funkce; příklady; spojitost funkce v bodě; věty o spojitosti funkce; spojitost funkce na intervalu; metoda půlení intervalu.	
3.1	Limita funkce	68
3.2	Vlastnosti limit	71
3.3	Nerovnosti v limitách	80
3.4	Definice a kriteria spojitosti	83
3.5	Spojítost elementárních funkcí	89
<b>4</b>	<b>Derivace</b>	<b>92</b>
	Derivace funkce; geometrický význam derivace; tečna ke grafu funkce; derivace elementárních funkcí; vlastnosti derivace; lokální maximum a minimum funkce; nutná podmínka pro existenci extrému; Rolleova věta; Lagrangeova věta, věta o přírůstku funkce; monotonie funkce; konvexnost a konkávnost; asymptoty funkce; vyšetřování průběhu funkce; l'Hospitalovo pravidlo; kubická interpolace (splines); separace kořenů; Newtonova metoda; výpočet třetí odmocniny; diferenciální rovnice.	
4.1	Rychlost a hledání tečny	92
4.2	Derivace funkce	95
4.3	Vlastnosti derivace	98
4.4	Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady	105
4.5	Další poznámky	107
4.6	Extrémy funkce	108
4.7	Věta o přírůstku funkce	113
4.8	Důsledky pro vyšetřování průběhu funkce	115
4.9	l'Hospitalovo pravidlo	120
4.10	Příklady	124
4.11	Interpolace: Splines	128
4.12	Separace kořenů	130
4.13	Newtonova metoda: Příklad	131
4.14	Diferenciální rovnice	136
<b>5</b>	<b>Taylorovy polynomy</b>	<b>144</b>
	Polynom; Taylorův polynom; Taylorův vzorec; zbytek v Taylorově vzorci; Peanův tvar zbytku; Lagrangeův tvar zbytku; přibližné výpočty; mocninná řada; poloměr konvergence.	

5.1	Aproximace funkcí pomocí polynomů . . . . .	144
5.2	Aproximace funkcí pomocí polynomů . . . . .	145
5.3	Chyba aproximace . . . . .	149
5.4	Funkce jako limita Taylorových polynomů . . . . .	153
5.5	Další příklady . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Primitivní funkce</b>	<b>159</b>
	Primitivní funkce; vlastnosti primitivní funkce; neurčitý integrál; primitivní funkce elementárních funkcí; linearita neurčitého integrálu; integrace per partes; integrace substitucí; integrace racionálních lomených funkcí a rozklad na parciální zlomky; doplnění na čtverec.	
6.1	Neurčitý integrál . . . . .	159
6.2	Integrace per partes . . . . .	163
6.3	Věty o substituci v neurčitém integrálu . . . . .	164
6.4	Integrace racionálních funkcí . . . . .	168
6.5	Příklady . . . . .	173
<b>7</b>	<b>Riemannův integrál</b>	<b>176</b>
	Maximum a minimum; supremum a infimum; dělení intervalu; dolní součet a horní součet; horní a dolní integrál; Riemannův integrál; integrální součet; postačující podmínka existence Riemannova integrálu; Newtonova formule.	
7.1	Supremum a infimum . . . . .	176
7.2	Konstrukce Riemannova integrálu . . . . .	177
7.3	Vlastnosti Riemannova integrálu . . . . .	184
7.4	Per partes a substituce pro určitý integrál . . . . .	187
7.5	Poznámky . . . . .	188
7.6	Výpočet obsahů plošných útvarů . . . . .	192
7.7	Objem a obsah pláště rotačního tělesa . . . . .	195
7.8	Délka křivky . . . . .	199
7.9	Celková změna a okamžitá změna . . . . .	201
7.10	Gaussovský rozmazání, vyhlazování . . . . .	203
<b>8</b>	<b>Rychlost růstu posloupností</b>	<b>208</b>
	Sčítání členů posloupností; rychlost růstu posloupností; Landauova notace; odhady částečných součtů posloupností pomocí integrálů; integrální kritérium konvergence řad.	
8.1	Sčítání členů posloupností . . . . .	208
8.2	Úvod do Landauovy symboliky . . . . .	211
8.3	Odhadování rychlosti růstu různých součtů . . . . .	212

---

<b>9 Složitost algoritmů</b>	<b>217</b>
Složitost algoritmů; bublinkové třídění; Quick sort	
9.1 Uspořádání . . . . .	217
9.2 Složitost jednoduchých třídících algoritmů . . . . .	218
<b>Rejstřík</b>	<b>221</b>

# Úvod

Tento dokument doplňuje slidy k přednášce předmětu BI-ZMA. Slidy slouží primárně jako doplněk k prezentaci a nehodí se ke studiu či tisku. Slidy zejména neobsahují vysvětlující komentáře přednášejícího a mohou být proto bez těchto podpůrných informací nejasné až matoucí. V tomto textu je uvedeno vše co na slidech, navíc s dalšími dodatečnými informacemi. Na začátku tohoto dokumentu je uveden seznam symbolů. K zjednodušení hledání ve vytištěném dokumentu je konci dokumentu k dispozici rejstřík pojmů.

Tento úvod je dobrým místem na seznámení čtenáře s historií výuky Matematické analýzy na FIT. Předmět BI-ZMA byl po zrodu fakulty nejprve vyučován pod vedením prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. (KM FJFI). Poté předmět převzali Ing. Tomáš Kalvoda, PhD. a doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc. V aktuálním semestru je druhým přednášejícím Ing. Daniel Vašata. Tyto poznámky, a pojetí přednášky vůbec, jsou výsledkem tohoto postupného vývoje.

Pro větší přehlednost je předkládaný text členěn do definic, vět, důkazů a příkladů. Definice a věty jsou číslovány průběžně v celém dokumentu. Konec příkladu je označen symbolem  $\triangle$ . Konec důkazu označujeme symbolem  $\square$ .

# Seznam symbolů

$:=$	..... definice, symbol na levé straně je definován výrazem na straně pravé
$\approx$	..... přibližné vyjádření na konečný počet desetinných míst
$\wedge$	..... konjunkce
$\vee$	..... disjunkce
$\Rightarrow$	..... implikace
$\Leftrightarrow$	..... ekvivalence
$\forall$	..... velký (obecný) kvantifikátor
$\exists$	..... existenční kvantifikátor
$\exists!$	..... existuje právě jedno
$\{a, b, c\}$	..... množina obsahující prvky $a$ , $b$ a $c$
$\{x \in M \mid P(x)\}$	..... množina všech $x$ z $M$ splňující $P(x)$
$x \in M$ , $x \notin M$	..... prvek $x$ náleží/nenáleží množině $M$
$A \subset B$	..... $A$ je podmnožinou $B$
$\emptyset$	..... prázdná množina
$A \cup B$	..... sjednocení množin $A$ a $B$
$A \cap B$	..... průnik množin $A$ a $B$
$A \setminus B$	..... rozdíl množin $A$ a $B$
$A \times B$	..... kartézský součin množiny $A$ a $B$
$\mathcal{P}(A)$	..... množina všech podmnožin množiny $A$
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	..... množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$	..... množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{Z}$	..... množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	..... množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	..... množina reálných čísel
$\overline{\mathbb{R}}$	..... rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	..... nezáporná reálná čísla, tj. $\langle 0, +\infty \rangle$
$\mathbb{R}^+$	..... kladná reálná čísla, tj. $(0, +\infty)$
$\mathbb{C}$	..... množina komplexních čísel
$\lfloor x \rfloor$	..... dolní celá část reálného $x$
$\lceil x \rceil$	..... horní celá část reálného $x$
$(a, b)$	..... otevřený interval, nebo uspořádaná dvojice, podle kontextu
$\langle a, b \rangle$	..... uzavřený interval

$H_a(\varepsilon)$	$\varepsilon$ -okolí bodu $a$
$H_a^+(\varepsilon), H_a^-(\varepsilon)$	pravé, levé $\varepsilon$ -okolí bodu $a$
$H_{+\infty}(\alpha), H_{-\infty}(\alpha)$	$\alpha$ -okolí bodu $+\infty, -\infty$
$x\mathcal{R}y$	$x$ je v relaci $\mathcal{R}$ s $y$
$f: A \rightarrow B$	zobrazení z množiny $A$ do množiny $B$
$D_f$	definiční obor zobrazení $f$
$H_f$	obor hodnot zobrazení $f$
$f _M$	zúžení zobrazení $f$ na množinu $M$
$f(M)$	obraz množiny $M$ při zobrazení $f$
$f^{-1}(M), f_{-1}(M)$	vzor množiny $M$ při zobrazení $f$
$f \circ g$	složené zobrazení
$\text{id}_A$	identické zobrazení na množině $A$
$f^{-1}$	inverzní zobrazení
$(a_n)_{n=1}^\infty, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)$	reálná číselná posloupnost
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	limita posloupnosti
$\sum_{k=0}^\infty a_k, \sum_{k=0}^\infty a_k$	číselná řada
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limita funkce $f$ v bodě $a$
$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$	limita funkce $f$ v bodě $a$ zprava
$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$	limita funkce $f$ v bodě $a$ zleva
$f'(a)$	derivace funkce $f$ v bodě $a$
$T_{n,a}$	Taylorův polynom stupně $n$ se středem v bodě $a$
$R_{n,a}$	zbytek po $n$ -tém Taylorově polynomu
$\omega_{n,a}$	Peanův tvar zbytku
$\int f, \int f(x)dx$	neurčitý integrál funkce $f$
$\int_a^b f(x)dx$	Riemannův určitý integrál funkce $f$ na intervalu $(a, b)$
$\mathcal{I}(\sigma, f)$	integrální součet funkce $f$ při rozdělení $\sigma$
$a_n \sim b_n$	asymptoticky ekvivalentní posloupnosti
$\mathcal{O}(a_n)$	posloupnost s horní asymptotickou mezí $a_n$



# Kapitola č. 1

## Základní pojmy a úvod

Uspořádaná dvojice; kartézský součin; relace; ekvivalence; uspořádání; zobrazení; reálná funkce reálné proměnné; zúžení zobrazení; obraz a vzor množiny; složené zobrazení; vlastnosti zobrazení; identické zobrazení; inverzní zobrazení; vlastnosti množiny reálných čísel; absolutní hodnota; aritmetická posloupnost; geometrická posloupnost; faktoriál; kombinační číslo; binomická věta; polynom; mocniny; odmocniny; exponenciála; logaritmus; trigonometrické funkce.

V této kapitole předpokládáme, že čtenář je již seznámem se základními množinovými operacemi, způsoby zadání množin (výčtem, vlastností) a orientuje se mezi číselnými množinami (přirozená, celá, racionální). Množině reálných čísel se budeme podrobněji věnovat v této kapitole.

### 1.1 Relace

Relace formalizuje pojem „vztahu“ mezi dvěma objekty. Nejprve si zavedeme pojem uspořádané dvojice.

**Definice 1:** Jsou-li  $x$  a  $y$  prvky (nějakých množin), zavedeme symbol  $(x, y)$  pro jejich **uspořádanou dvojici**. Jsou-li  $(x, y)$  a  $(u, v)$  dvě uspořádané dvojice, pak definujeme rovnost mezi uspořádanými dvojicemi následovně,

$$(x, y) = (u, v) \stackrel{\text{def}}{\iff} x = u \text{ a } y = v.$$

Podobně definujeme uspořádanou  $n$ -tici  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Všimněte si, že  $\{x, y\}$  je množina shodná s  $\{y, x\}$ , kdežto uspořádané dvojice  $(x, y)$  a  $(y, x)$  nejsou stejné (obecně). Přesto lze uspořádanou dvojici zavést pouze pomocí množinových pojmů, např. dvojici  $(x, y)$  lze ztotožnit s množinou  $\{x, \{x, y\}\}$ .

**Definice 2:** Nechť  $A$  a  $B$  jsou množiny. Symbolem  $A \times B$  označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru  $(x, y)$ , kde  $x \in A$  a  $y \in B$ . Tedy symbolicky

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ a } y \in B\}.$$

Množina  $A \times B$  se nazývá **kartézský součin** množin  $A$  a  $B$ .

Kartézský součin byl pojmenován na počest **René Descarta** (latinsky Renatus Cartesius, francouzský matematik, 1596 – 1650). Operace  $\times$  mezi množinami je nekomutativní, tedy množina  $A \times B$  je obecně různá od  $B \times A$ .

**Příklad:** Uvažme  $A = \{1, 2, 3\}$  a  $B = \{a, b\}$ . Potom

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}, \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}. \end{aligned} \quad \triangle$$

V kartézském součinu  $A \times B$  jsou tedy všechny možné uspořádané dvojice  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Pokud chceme mezi prvky množin  $A$  a  $B$  zavést jistý vztah, pak musíme vybrat jen některé uspořádané dvojice.

**Definice 3:** Relace  $\mathcal{R}$  mezi množinami  $A$  a  $B$  je libovolná podmnožina kartézského součinu  $A \times B$ .

Je-li  $A = B$ , mluvíme o relaci **na množině**  $A$ . Je-li  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , pak říkáme že  $x$  a  $y$  **jsou v relaci**  $\mathcal{R}$  a zkráceně tento fakt zapisujeme  $x\mathcal{R}y$ .

Relace  $\mathcal{R}$  je sama množinou. Mezi relacemi tedy můžeme provádět standardní množinové operace. Speciálně vždy existuje tzv. prázdná relace  $\emptyset \subset A \times B$  (prvky  $A$  a  $B$  spolu nijak nesouvisí).

**Příklad:** Uvedme různorodé příklady relací:

1. Označme symbolem  $\mathcal{P}(A)$  množinu všech podmnožin množiny  $A$ . Této množině se říká **potenční množina**, proto písmeno  $\mathcal{P}$ . Na množině  $\mathcal{P}(A)$  zavedeme relaci  $\mathcal{R}_1$  takto:

$$X\mathcal{R}_1Y \stackrel{\text{def}}{\iff} X \subset Y.$$

2. Řekneme, že přímky  $p$  a  $q$  v rovině jsou v relaci  $\mathcal{R}_2$ , právě když  $p$  a  $q$  jsou rovnoběžné.
3. Řekneme, že přímky  $p$  a  $q$  v rovině jsou v relaci  $\mathcal{R}_3$ , právě když  $p$  a  $q$  jsou kolmé.
4. Na množině všech studentů FIT ČVUT zavedeme relaci podle data jejich narození. Řekneme, že dva studenti jsou v relaci  $\mathcal{R}_4$ , jestliže mají narozeniny ve stejný den.
5. Na množině  $\mathbb{N}$  definujeme relaci  $m\mathcal{R}_5n$ , právě když  $m$  dělí  $n$ .  $\triangle$

## 1.2 Ekvivalence, uspořádání a zobrazení

Nakladením dalších požadavků na vlastnosti relací dostáváme tři důležité a nejčastěji používané typy relací: ekvivalence, uspořádání a zobrazení. Pro další výklad bude zejména důležité zobrazení. S dalšími typy relací se čtenář podrobněji seznámí v předmětu BI-MLO. Relace dále nacházejí uplatnění v relačních databázových systémech (BI-DBS). Uspořádáním se budeme podrobněji zabývat v kapitole 9.1. Pro úplnost nyní rozeberme relaci typu ekvivalence.

**Definice 4:** Řekneme, že relace  $\mathcal{R}$  na množině  $M$  je **ekvivalence**, právě když splňuje následující tři vlastnosti

1. (reflexivita): pro každé  $x \in M$  platí  $x\mathcal{R}x$ ,
2. (symetrie): pro každé  $x, y \in M$  platí, že pokud  $x\mathcal{R}y$  pak i  $y\mathcal{R}x$ ,
3. (tranzitivita): pokud pro  $x, y, z \in M$  platí  $x\mathcal{R}y$  a  $y\mathcal{R}z$ , pak platí i  $x\mathcal{R}z$ .

**Příklad:** Pro relace zavedené výše platí:

1.  $\mathcal{R}_1$  není ekvivalencí, není totiž symetrická, je ale tranzitivní a reflexivní.
2.  $\mathcal{R}_2$  je ekvivalencí.
3.  $\mathcal{R}_3$  není ekvivalencí, protože není ani reflexivní ani tranzitivní, je ale symetrická.
4.  $\mathcal{R}_4$  je ekvivalencí.
5.  $\mathcal{R}_5$  není ekvivalencí, protože není symetrická, je ale tranzitivní a reflexivní.

Pojem ekvivalence vyjadřuje „stejnost“ či „podobnost“ mezi objekty. △

**Definice 5:** Nechť  $\mathcal{R}$  je ekvivalence na množině  $M$  a  $x$  je libovolný prvek  $M$ . Symbolem  $\mathcal{R}[x]$  označujeme množinu všech prvků  $y \in M$   $\mathcal{R}$ -ekvivalentních s  $x$ . Stručněji,

$$\mathcal{R}[x] = \{y \in M \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Množina  $\mathcal{R}[x]$  obsahuje aspoň  $x$  a nazývá se **třída ekvivalence určená prvkem  $x$** .

Platí, že pro každé dva prvky  $x, y \in M$  je buď  $\mathcal{R}[x] = \mathcal{R}[y]$ , nebo  $\mathcal{R}[x] \cap \mathcal{R}[y] = \emptyset$ . Množinu  $M$  je pak možno zapsat jako sjednocení disjunktních tříd ekvivalence.

**Příklad:** Uvážíme-li relaci  $\mathcal{R}_3$ , pak množina všech studentů FIT se rozpadá na množiny studentů, kteří se narodili ve stejný den. Všichni studenti v takovéto množině si jsou z tohoto pohledu ekvivalentní.  $\triangle$

Ve velké části předmětu BI-ZMA se budeme zabývat vlastnostmi funkcí. Funkce jsou speciálním případem zobrazení, které zavedeme nyní.

**Definice 6: Zobrazení**  $f$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  je relace mezi množinami  $A$  a  $B$  splňující podmínku: pro každé  $x \in A$  existuje nejvýše<sup>1</sup> jedno  $y \in B$  tak, že  $xfy$ . Toto zobrazení  $f$  značíme  $f : A \rightarrow B$ . Místo  $xfy$  píšeme  $y = f(x)$  nebo  $x \xrightarrow{f} y$ .

Pro představu uvádíme grafickou ilustraci zobrazení na obrázku č. 1.1. Uvedme nyní základní terminologii používanou v kontextu zobrazení. Buď  $f : A \rightarrow B$  zobrazení a nechť  $y = f(x)$  pro  $x \in A$ ,  $y \in B$ . Prvek  $y$  nazýváme **hodnota  $f$  v bodě  $x$** , nebo **obraz  $x$  při zobrazení  $f$** . Prvku  $x$  říkáme **vzor** prvku  $y$  při zobrazení  $f$ .

Interpretace tohoto typu relace je tedy taková, že pokud je dvojice  $(x, y)$  v takovéto relaci  $f$ , pak  $f$  přiřazuje prvku  $x$  prvek  $y$ . Podmínka v definici je pak jasná, nelze jednomu prvku přiřadit dva různé obrazy. Zavedme ještě standardní terminologii používanou pro zobrazení.

Množinu všech  $x \in A$  takových, že existuje  $y \in B$  splňujících  $y = f(x)$  nazýváme **definičním oborem** zobrazení  $f$ . Symbolicky lze psát

$$D_f = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(y = f(x))\}.$$

Množina všech obrazů při zobrazení  $f$  se nazývá **obor hodnot** zobrazení  $f$  a značí se  $H_f$ . V symbolech

$$H_f = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(y = f(x))\}.$$

Pokud je to typograficky nutné, pak definiční obor, resp. obor hodnot, značíme také symbolem  $D(f)$ , resp.  $H(f)$ .

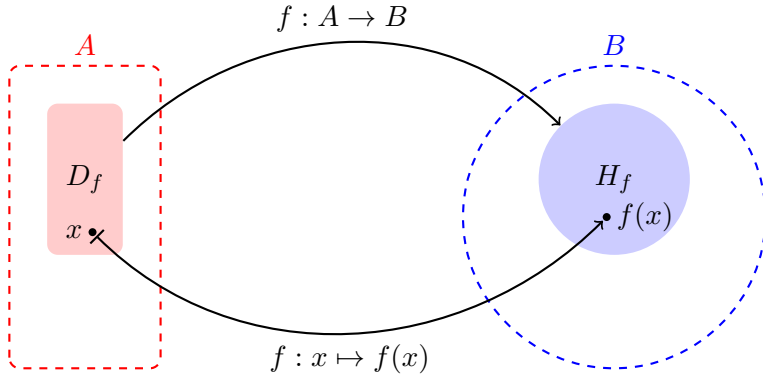
Zobrazení jsou relace, čili množiny, které umíme srovnávat. Buďte  $f$  a  $g$  dvě zobrazení z  $A$  do  $B$ . Podmínka jejich rovnosti  $f = g$  je ekvivalentní podmínkám

$$D_f = D_g \quad \text{a} \quad f(x) = g(x) \text{ pro všechna } x \in D_f.$$

Buď  $f : A \rightarrow B$ . Zobrazení  $g : A \rightarrow B$  s  $D_g := M$ , kde  $M \subset D_f$ , definované předpisem  $g(x) := f(x)$  pro libovolné  $x \in M$  nazýváme **zúžením zobrazení  $f$  na množinu  $M$** . Zapisujeme  $g = f|_M$ . Množinu

$$f(S) := \{y \in B \mid (\exists x \in S)(f(x) = y)\},$$

<sup>1</sup> „Nejvýše jedno“ znamená buď jedno nebo žádné.



Obrázek 1.1: Zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Definiční obor, resp. obor hodnot, nemusí být roven celému  $A$ , resp.  $B$ .

kde  $S \subset A$ , nazveme **obrazem množiny  $S$  při zobrazení  $f$** . Je-li  $N \subset B$ , potom množinu

$$f^{-1}(N) := \{x \in D_f \mid (\exists y \in N)(f(x) = y)\}$$

nazveme **vzorem množiny  $N$  při zobrazení  $f$** .

**Poznámka:** Symbol pro vzor množiny,  $f^{-1}(N)$ , je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (viz níže).

Nová zobrazení můžeme také vytvářet pomocí skládání zobrazení, pokud jsou zobrazení správného typu.

**Definice 7:** Jsou-li  $f: A \rightarrow B$  a  $g: B \rightarrow C$  zobrazení, definujeme **složené zobrazení**  $g \circ f: A \rightarrow C$  předpisem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

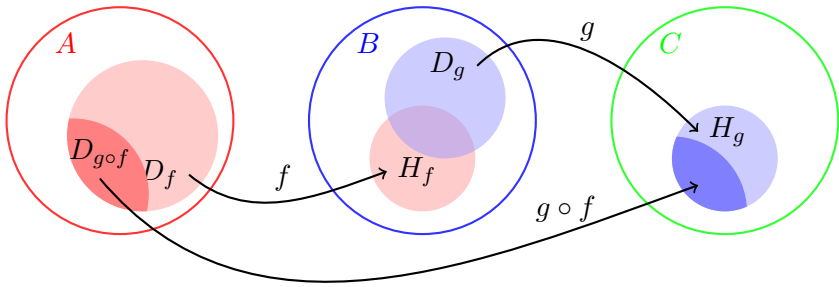
pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

O definičním oboru složeného zobrazení pouze víme, že  $D_{g \circ f} \subset D_f$ . I v případě, že  $D_f \neq \emptyset$  a  $D_g \neq \emptyset$  může nastat situace  $D_{g \circ f} = \emptyset$ . Názorně je tato situace uvedena na obrázku č. 1.2.

Mezi zobrazeními rozlišujeme následující tři důležité typy.

**Definice 8** (Důležité druhy zobrazení): Zobrazení  $f: A \rightarrow B$  je



Obrázek 1.2: Složené zobrazení.

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici  $x, y \in D_f$ ,  $x \neq y$ , platí  $f(x) \neq f(y)$ .
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé  $y \in B$  existuje  $x \in D_f$  splňující  $f(x) = y$ .
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže  $f$  je prosté,  $D_f = A$  a na.

Pomocí kvantifikátorů lze tyto podmínky zapsat následovně

$$\begin{aligned} \text{prosté:} & \quad (\forall x, y \in D_f)((x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))), \\ \text{na:} & \quad (\forall y \in B)(\exists x \in D_f)(f(x) = y), \end{aligned}$$

Při ověřování prostoty zobrazení častěji využíváme ekvivalentní formulaci<sup>2</sup>

$$(\forall x, y \in D_f)((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)).$$

Dále ještě poznamenejme, že zobrazení  $f: A \rightarrow B$  je na, právě když jeho obor hodnot je celá množina  $B$ . Zobrazení  $f$  pak zobrazuje svůj definiční obor na celou množinu  $A$ , proto „na“.

**Příklad:** Zobrazení  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definované předpisem  $f(n) := n^2$  je prosté, ale není na. Skutečně, splňují-li  $n, m \in \mathbb{N}$  rovnost  $f(n) = f(m)$ , pak  $n^2 = m^2$  a díky kladnosti  $n = m$ . Zobrazení nemůže být na, protože například pro  $m = 3$  neexistuje přirozené číslo  $n \in \mathbb{N}$  splňující  $n^2 = 3$ .  $\triangle$

<sup>2</sup>Vzpomeňte na větu obměněnou.

**Příklad** (Identické zobrazení): Buď  $A$  libovolná množina. Zobrazení  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  definované předpisy

$$D_{\text{id}_A} := A \quad \text{a} \quad \text{id}_A(x) := x, \quad x \in D_{\text{id}_A},$$

nazýváme **identické zobrazení**. Zobrazení  $\text{id}_A$  je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní.  $\triangle$

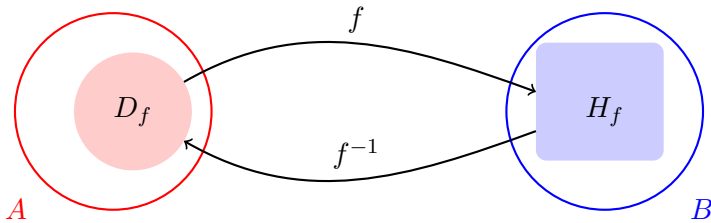
Přirozeně se nabízí otázka, jestli můžeme „změnit směr“ zobrazení  $f : A \rightarrow B$ . Přesněji, jestli zadanému prvku z oboru hodnot můžeme jednoznačně přiřadit nějaký prvek v definičním oboru. To lze zřejmě pouze v případě, že každý prvek v oboru hodnot má právě jeden vzor, čili když zobrazení je prosté. Tímto způsobem získáváme pojem inverzního zobrazení.

**Definice 9:** Je-li  $f : A \rightarrow B$  prosté zobrazení, pak každému prvku  $x$  z oboru hodnot  $H_f$  lze přiřadit právě jedno  $y$  z množiny  $D_f$  tak, že  $x = f(y)$ . Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení  $f$  a značíme  $f^{-1}$ .

Z definice ihned plyne, že  $f^{-1} : B \rightarrow A$  a dále

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= H_f, & H_{f^{-1}} &= D_f, \\ f^{-1} \circ f &= \text{id}_{D_f}, & f \circ f^{-1} &= \text{id}_{H_f}. \end{aligned}$$

K ilustraci tohoto pojmu také uvádíme obrázek č. 1.3.



Obrázek 1.3: Prosté zobrazení  $f : A \rightarrow B$  a jeho inverze  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .

**Příklad:** Uvažme zobrazení  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  definované předpisem<sup>3</sup>

$$f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{N}.$$

<sup>3</sup>Pro reálné  $x$  označuje  $\lfloor x \rfloor$  dolní celou část čísla  $x$ .

Toto zobrazení je prosté a na. Inverzní zobrazení je dáno předpisem

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & m \geq 1, \\ 1 - 2m, & m \leq 0, \end{cases}$$

pro libovolné celočíselné  $m$ .

△

## 1.3 Množina reálných čísel

V předchozí podkapitole jsme definovali pojem zobrazení. Abychom mohli mluvit o reálných funkcích je nejprve nutné připomenout vlastnosti množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$ . Této množině se proto budeme věnovat v této podkapitole.

Mezi reálnými čísly existují dvě binární operace (tj. zobrazení), **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

které mají známé vlastnosti (platí komutativní, asociativní, distributivní zákon). Podrobněji, pro libovolná reálná  $x, y, z$  platí

$$\begin{aligned} \text{komutativní zákon:} \quad & x + y = y + x, & x \cdot y = y \cdot x, \\ \text{asociativní zákon:} \quad & x + (y + z) = (x + y) + z, & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ \text{distributivní zákon:} \quad & x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z). \end{aligned}$$

Dále mezi reálnými čísly existují čísla 0 (nula) a 1 (jedna) splňující

$$a + 0 = a \quad \text{a} \quad a \cdot 1 = a,$$

pro každé  $a \in \mathbb{R}$ . Ke každému reálnému číslu  $a$  existuje reálné číslo  $-a$  splňující  $a + (-a) = 0$ . Podobně ke každému nenulovému číslu  $a$  existuje reálné číslo  $a^{-1}$  splňující  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Tento odstavec lze stručně shrnout do krátkého konstatování, že reálná čísla spolu s operacemi sčítání a násobení tvoří těleso<sup>4</sup>.

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje relace **uspořádání** na  $\mathbb{R}$ :

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

<sup>4</sup>Více se o číselných tělesech dozvíte v předmětu BI-LIN. Pro aplikace v počítačové bezpečnosti (kryptologii, šifrování) mají velký význam zvláště konečná tělesa.



Toto uspořádání je tak zvaně úplné<sup>5</sup>, pro libovolná dvě různá reálná čísla  $a$  a  $b$  lze rozhodnout, zda-li  $a < b$  nebo  $b < a$ . Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že

$$a < b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c,$$

$$a < b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

Zdvojená šipka znamená **implikaci**, kterou čteme: Jestliže jsou splněny podmínky vlevo, pak platí tvrzení vpravo.

Uspořádání  $<$  reálných čísel nám umožňuje porovnat libovolná dvě reálná čísla. Pomocí uspořádání zavádíme speciální podmnožiny  $\mathbb{R}$ , a to **intervaly**:

otevřený interval	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$
uzavřený interval	$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$
polootevřený (polouzavřený) interval	$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$
polootevřený (polouzavřený) interval	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$

A neomezené intervaly

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.$$

Ve všech těchto intervalech je  $a$  tzv. **počáteční** bod a  $b$  tzv. **koncový** bod intervalu.

Dále definujeme pojem okolí bodu a pojem rozšířené reálné osy. Pomocí okolí budeme později definovat limity posloupností i funkcí.

**Definice 10** (Okolí bodů z  $\mathbb{R}$ ): Nechť  $a \in \mathbb{R}$  a  $\varepsilon > 0$ . Otevřený interval  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  nazýváme  **$\varepsilon$ -okolím bodu  $a$  v  $\mathbb{R}$**  a značíme  $H_a(\varepsilon)$ .

Je-li  $a \in \mathbb{R}$  a  $\varepsilon > 0$ , pak  $x \in H_a(\varepsilon)$  právě, když  $|x - a| < \varepsilon$ . Bod  $x$  tedy patří do  $\varepsilon$ -okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  právě tehdy, když jeho vzdálenost od  $a$  je menší než  $\varepsilon$ .

**Definice 11:** Nechť  $a \in \mathbb{R}$  a  $\varepsilon > 0$ . Interval  $\langle a, a + \varepsilon \rangle$ , resp.  $(a - \varepsilon, a]$ , nazýváme **pravým**, resp. **levým**,  **$\varepsilon$ -okolím bodu  $a$  v  $\mathbb{R}$**  a značíme  $H_a^+(\varepsilon)$ , resp.  $H_a^-(\varepsilon)$ .

Z očividných důvodů o množině  $H_a^\pm(\varepsilon)$  někdy též mluvíme jako o **jednostranném** okolí, a o  $H_a(\varepsilon)$  jako o **oboustranném** okolí.

Dále bude často výhodné pracovat i s  $+\infty$  a  $-\infty$  jako s reálnými čísly. Rozšíříme proto o tyto prvky reálná čísla v následující definici.

<sup>5</sup>Existují i neúplná uspořádání, vizte například relaci  $\mathcal{R}_5$  z konce podkapitoly 1.1

**Definice 12:** Množinu  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  nazýváme **rozšířenou reálnou osou**.

Konečně také zavedeme okolí těchto nových bodů  $+\infty$  a  $-\infty$ .

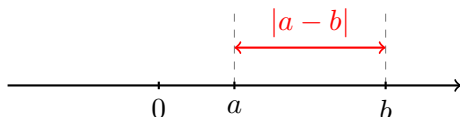
**Definice 13:** Necht  $c \in \mathbb{R}$ . Otevřený interval  $(c, +\infty)$ , resp.  $(-\infty, c)$ , nazýváme okolím bodu  $+\infty$ , resp.  $-\infty$ , v  $\overline{\mathbb{R}}$  a značíme  $H_\infty(c)$ , resp.  $H_{-\infty}(c)$ .

Není-li potřeba specifikovat velikost okolí, píšeme zkráceně  $H_a, H_{+\infty}, H_{-\infty}$ . Okolí bodu  $a$  jsme definovali pro libovolné  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , avšak toto okolí je vždy podmnožinou  $\mathbb{R}$ .

Uspořádání nám dále umožňuje zavést pojem vzdálenosti mezi dvěma reálnými čísly. **Vzdálenost** dvou reálných čísel definujeme pomocí **absolutní hodnoty**,

$$|a| := \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

**Vzdálenost** dvou čísel  $a, b \in \mathbb{R}$  je rovna  $|a - b| = |b - a|$ . Grafické znázornění vzdálenosti mezi dvěma reálnými čísly lze nalézt na obrázku č. 1.4.



Obrázek 1.4: Vzdálenost dvou reálných čísel.

Ze střední školy víte, že množina reálných čísel se skládá z

- **přirozených čísel**  $1, 2, \dots$ , značíme ji  $\mathbb{N}$ ,
- **celých čísel**  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , značíme ji  $\mathbb{Z}$  a vzniká řešením rovnic  $a + x = b$ ,
- **racionálních čísel**, která vzniknou řešením rovnic

$$q \cdot x = p, \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0.$$

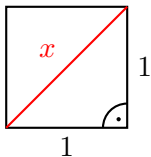
Řešení této rovnice píšeme ve tvaru  $\frac{p}{q}$  a lze předpokládat, že  $q \in \mathbb{N}$  (eventuální znaménko minus je v čitateli) a  $p, q$  jsou nesoudělná. Např.  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$ . Množina všech racionálních čísel se značí  $\mathbb{Q}$ .

- **iracionálních čísel**.

Množina iracionálních čísel je poněkud magická, protože ji nelze popsat nijak jednoduše. Tvrzení, že iracionální čísla jsou reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém na definici reálného čísla. Použijeme-li geometrického znázornění  $\mathbb{R}$  jako přímky, pak lze požadovat, že přímka není nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry“. Objasněme tento požadavek na následujícím příkladu.

**Příklad:** Existuje kladné řešení rovnice  $x^2 = 2$ .

Motivací této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1. Vizte obrázek č. 1.5.



Obrázek 1.5: Iracionalita délky uhlopříčky ve čtverci o straně délky 1.

Pokud řešení existuje, nemůže jím být racionální číslo. Toto tvrzení dokážeme **sporem**. Předpokládejme opak, tj. existují  $p, q \in \mathbb{N}$ , nesoudělná a taková, že  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ . Pak  $p^2 (= 2q^2)$  je nutně sudé číslo, tj. má tvar  $p = 2k, k \in \mathbb{N}$ . Tedy  $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ , tj.  $q^2$  i  $q$  jsou sudá čísla,  $q = 2l, l \in \mathbb{N}$ . To ale znamená, že  $p, q$  jsou soudělná (obě jsou dělitelná 2), což je ale spor s naším předpokladem. Náš předpoklad o existenci racionálního řešení rovnice  $x^2 = 2$  byl chybný.

Nyní ukážeme jak lze dospět k existenci (iracionálního) řešení  $x$ . Určitě musí být  $x \in \langle 1, 2 \rangle = I_1$ . Rozpůlením tohoto intervalu zjistíme, že  $x \in \langle 1, \frac{3}{2} \rangle = I_2$ . Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly  $I_n, n \in \mathbb{N}$ , uvnitř kterých musí ležet  $x$ . Pro tyto intervaly je  $I_{n+1} \subset I_n$  a délka  $n$ -tého intervalu je  $\frac{1}{2^{n-1}}$ . Náš požadavek, že  $\mathbb{R}$  nemá díry v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{\sqrt{2}\}.$$

Poznamenejme, že dělení intervalů vždy na deset stejných dílů vede k vyjádření reálného čísla ve tvaru desetinného rozvoje, nekonečného a neperiodického pro iracionální číslo.  $\triangle$

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**:

Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.

Přesněji, pokud jsou  $I_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , uzavřené intervaly splňující

$$I_n \supset I_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n$  tak, že délka  $I_n$  je menší než  $\varepsilon$ ,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

V průniku zřejmě leží právě jedno reálné číslo. Pokud bychom předpokládali existenci dvou různých čísel ležících v tomto průniku snadno se dostaneme do rozporu s libovolností délky uvažovaných intervalů.

Je důležité si uvědomit, že axiom úplnosti je to, co odlišuje reálná čísla od racionálních. Algebraicky (vzhledem k  $+$  a  $\cdot$ ) mají jinak tyto množiny shodné vlastnosti.

## 1.4 Reálná funkce reálné proměnné

Matematická analýza, kterou budeme v tomto kurzu studovat, spočívá převážně ve studiu **reálných funkcí reálné proměnné**. Intuitivně je funkce jednoznačný výsledek nějakého procesu, který lze měřit pomocí reálných čísel. Přitom výsledek procesu závisí na měnícím se vstupu jehož hodnotu lze opět popsat pomocí reálných čísel. Jedná se tedy o speciální případ zobrazení.

**Definice 14:** Zobrazení  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu  $y := f(x)$ . **Přirozeným definičním oborem** nazýváme množinu všech reálných  $x$  pro které má výraz  $f(x)$  jednoznačný smysl. Pokud je dán pouze funkční předpis bez dalších detailů, automaticky máme na mysli funkci definovanou na příslušném přirozeném definičním oboru.

Funkci si můžeme také představit, respektive nakreslit, pomocí jejího **grafu**.

**Definice 15:** **Grafem** funkce  $f$  nazýváme množinu

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Příklady jednoduchých grafů lze nalézt níže. Pomocí uspořádání reálných čísel můžeme rozlišovat mezi několika druhy funkcí.

**Definice 16:** Funkce  $f$  se nazývá

- **rostoucí na intervalu  $I$** , jestliže

$$(\forall x, y \in I)(x < y \implies f(x) < f(y))$$

- **klesající na intervalu  $I$** , jestliže

$$(\forall x, y \in I)(x < y \implies f(x) > f(y))$$

Je-li funkce buď rostoucí nebo klesající na intervalu  $I$ , pak se nazývá **monotonní** na intervalu  $I$ .

V definici je implicitně obsažen požadavek, aby interval  $I$  celý ležel v definičním oboru funkce  $f$ . Není ho potřeba zvlášť zdůrazňovat.

Podívejme se na několik příkladů reálných funkcí reálné proměnné. Vzhledem k tomu, že funkce jsou speciálním případem zobrazení, můžeme s nimi provádět stejné operace jako se zobrazeními. Speciálně tedy máme k dispozici skládání funkcí, obrazy a vzory množin vzhledem k funkci, zúžení funkce, atp.

**Příklad:** Příkladem rostoucí funkce na  $\mathbb{R}$  je lichá mocnina (a také lichá odmocnina, vizte níže). Funkce  $f(x) = x^2$  není na  $\mathbb{R}$  ani rostoucí ani klesající, ale je klesající na intervalu  $(-\infty, 0)$  a rostoucí na intervalu  $\langle 0, +\infty)$ .  $\triangle$

**Příklad:** Uvažme výraz  $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ . Přirozeným definičním oborem je množina

$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Takto definovaná funkce je dána relací

$$f = \left\{ \left( x, \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \mid x \in \langle 0, 1) \cup (1, +\infty) \right\}.$$

Podmínky na „smyslupnost“ daného výrazu jsou totiž v tomto případě nenulovost jmenovatele a nezápornost argumentu odmocniny.  $\triangle$

**Příklad:** Uvažme funkce  $f_1(x) = \sqrt{x}$  a  $f_2(x) = \sqrt{|x|}$  jejichž přirozenými definičními obory jsou  $D_{f_1} = \langle 0, +\infty)$  a  $D_{f_2} = \mathbb{R}$ . Funkce  $f_1$  je zúžením funkce  $f_2$  na množinu  $\langle 0, +\infty)$ . Platí tedy  $f_1 = f_2|_{\langle 0, +\infty)}$ .  $\triangle$

výraz	má smysl pro
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\sqrt[k]{x}$	$x \geq 0, k \in \mathbb{N}$
$\ln(x)$	$x > 0$
$\operatorname{tg}(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tabulka 1.1: Definiční obory některých elementárních funkcí.

**Příklad:** Buď  $A = \langle -1, 1 \rangle$  určete

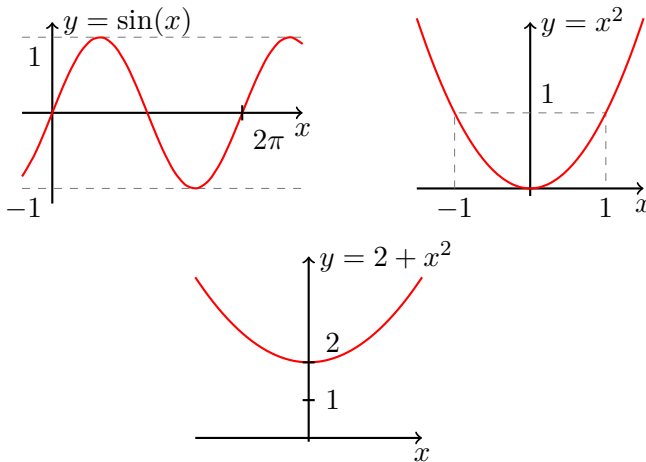
$$\sin^{-1}(A), \quad f(A), \quad g^{-1}(A),$$

kde  $f(x) = x^2$  a  $g(x) = 2 + x^2$ . Stručná odpověď:

$$\sin^{-1}(A) = \mathbb{R}, \quad f(A) = \langle 0, 1 \rangle, \quad g^{-1}(A) = \emptyset.$$

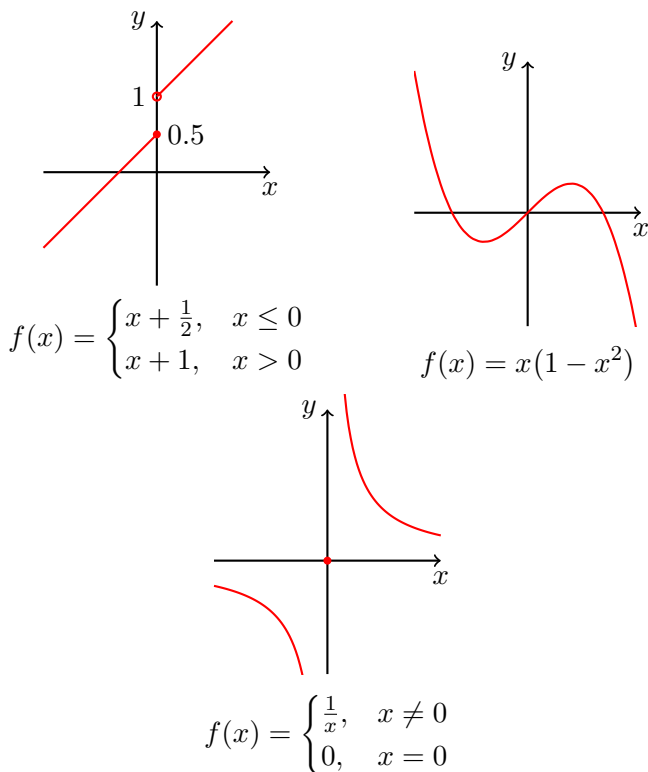
Grafy těchto funkcí jsou uvedeny na následujících obrázcích.

△



**Příklad:** Které z následujících funkcí  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  jsou prosté, na, či bijektivní?

△



**Definice 17:** Necht  $f$  je reálná funkce reálné proměnné. Řekneme, že funkce  $f$  je **omezená**, resp. **shora omezená**, resp. **zdola omezená**, právě když obor hodnot  $H_f$  je množina omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.

**Příklad:** Například platí, že

- $f(x) = x^2$  je omezená zdola ( $H_f = \langle 0, +\infty \rangle$ ), ale není omezená shora. Není ani rostoucí ani klesající:  $-1 < 0 < 1$  ale  $f(-1) > f(0) < f(1)$ .
- $f(x) = \sin x$  je omezená ( $H_f = \langle -1, 1 \rangle$ ). Není ani rostoucí ani klesající.
- $f(x) = e^x$  je omezená zdola ( $H_f = (0, +\infty)$ ), není omezená shora, je rostoucí.  $\triangle$

**Poznámka:** Pomocí kvantifikátorů můžeme podmínku omezenosti zformulovat následovně:

$$(\exists K > 0)(\forall x \in D_f)(|f(x)| \leq K).$$

Podobně lze postupovat u omezenosti shora, resp. zdola.

**Poznámka:** Je-li funkce  $f$  monotonní, pak je i prostá. Tudíž existuje její inverzní funkce, kterou opět značíme  $f^{-1}$ . Platí

$$f \text{ je rostoucí} \Rightarrow f^{-1} \text{ je rostoucí,}$$

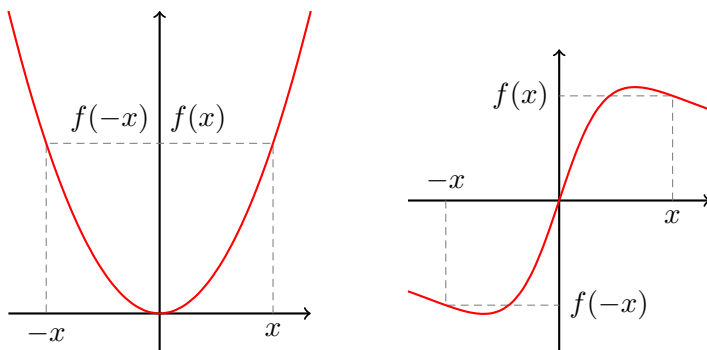
$$f \text{ je klesající} \Rightarrow f^{-1} \text{ je klesající.}$$

**Poznámka:** Prostá funkce nemusí být monotonní. Příkladem prosté funkce, která není ani klesající ani rostoucí je  $f(x) := \frac{1}{x}$  s definičním oborem  $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Další užitečnou vlastností některých funkcí je sudost/lichost/periodicita. Tyto pojmy můžeme s výhodou použít při vyšetřování průběhu funkcí, umožňují nám totiž problém zredukovat na vyšetřování funkce pouze na jisté části definičního oboru funkce.

**Definice 18:** Reálná funkce reálné proměnné  $f$  se nazývá

- **sudá**, právě když pro všechna  $x \in D_f$  platí  $-x \in D_f$  a  $f(x) = f(-x)$ .
- **lichá**, právě když pro všechna  $x \in D_f$  platí  $-x \in D_f$  a  $f(x) = -f(-x)$ .



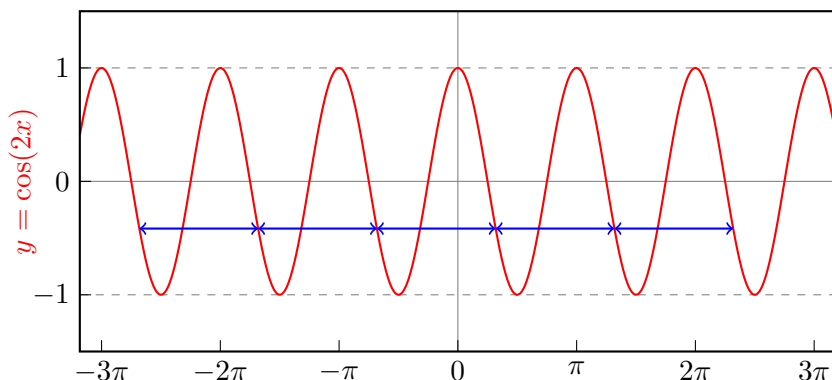
Obrázek 1.6: Sudá a lichá funkce.

**Definice 19:** Buď  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pro niž existuje kladné  $T \in \mathbb{R}$  takové, že

1.  $(\forall x \in D_f)(x + T, x - T \in D_f)$ ,
2.  $(\forall x \in D_f)(f(x + T) = f(x))$ .

Říkáme, že funkce  $f$  je **periodická** a číslo  $T$  nazýváme **periodou** funkce  $f$ .





Obrázek 1.7: Periodická funkce.

## 1.5 Základní vztahy

Budeme potřebovat různé „vzorce“ pro reálná čísla, z nichž nyní uvedeme ty důležitější. Pro libovolná reálná čísla  $a, b$  platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.

*Důkaz trojúhelníkové nerovnosti.* Mají-li obě čísla  $a$  a  $b$  stejné znaménko, dostáváme z definice absolutní hodnoty rovnost. Je-li jedno kladné a druhé záporné, např.  $a > 0$  a  $b < 0$ , pak  $|a| + |b| = a - b > |a + b|$ , která je buď rovna  $a + b$  nebo  $-a - b$  podle znaménka  $a + b$ .  $\square$

Členy **aritmetické posloupnosti** jsou dány rekurentním vztahem  $a_{n+1} = a_n + d$ , kde  $d$  je tzv. *diference*. K odstartování rekurentní formule potřebujeme zadat první člen  $a_1$ . Platí

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tento vztah lze dokázat **matematickou indukcí**, která spočívá ve dvou krocích:

- (i) Dokážeme platnost pro  $n = 1$ , zde  $a_1 = a_1$  zřejmě platí.
- (ii) Za předpokladu (IP), že vztah platí pro kladné přirozené  $n$ , dokážeme jeho platnost pro  $n + 1$  (tzv. **indukční krok**). Zde

$$a_{n+1} = a_n + d \stackrel{\text{(IP)}}{=} a_1 + (n - 1)d + d = a_1 + nd.$$

Tím postupně projdeme všechna přirozená čísla, takže vztah pro  $n$ -tý člen platí pro všechna kladná přirozená  $n$ .

**Poznámka:** Může se zdát podivné dokazovat vzoreček pro explicitní vyjádření členů aritmetické posloupnosti, když je takřka očividný. Jedná se však hlavně o elementární ukázkou důkazu pomocí matematické indukce.

Podobně lze indukci (ale i jinak) dokázat, že pro součet  $n$  členů aritmetické posloupnosti  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  platí

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Speciálně pro  $a_1 = 1$ ,  $d = 1$ , tedy  $a_n = n$ , platí

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

**Geometrická posloupnost** je dána rekurentním vztahem

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

kde parametr  $q \neq 0, 1$  se nazývá **kvocient**. Je-li dán první člen  $a_1$ , pak je  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  (důkaz například indukci) a

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

K důkazu si stačí povšimnout, že

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + a_1 q^n = a_1 + q s_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtud vyjádřením  $s_n$  dostáváme dokazovanou rovnost.

Definujeme **faktoriál**

$$0! := 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

a **kombinační číslo**

$$\binom{n}{0} := 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad n \geq k.$$

Tato čísla jsou známá z kombinatoriky:  $n!$  udává počet permutací  $n$  čísel;  $\binom{n}{k}$  je počet možných výběrů nespořádaných  $k$ -tic z  $n$  čísel.

Platí tzv. **binomická věta**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz provedeme indukcí: Pro  $n = 1$  je

$$\begin{aligned} \text{LS} &= a + b, \\ \text{PS} &= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b. \end{aligned}$$

Vzpomeňte, že klademe  $a^0 = 1$  pro každé  $a \in \mathbb{R}$ . Provedeme nyní indukční krok

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}] \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left[ \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^j b^{n+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}. \end{aligned}$$

neboť z definice kombinačního čísla lze dokázat (vzpomeňte Pascalův trojúhelník), že

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$$

pro  $j = 1, \dots, n$ .

V důkazu jsme se poprvé skutečně setkali s použitím zkráceného sumačního zápisu. Místo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

píšeme

$$\sum_{k=1}^n a_k.$$

Index  $k$  se nazývá sčítací index, čísla 1 a  $n$  dolním a horním indexem. Díky asociativitě, komutativitě a distributivitě algebraických operací platí

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k,$$

kde  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{R}$ . V důkazu jsme také použili očividnou úpravu typu

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k.$$

Připomeňme další často používaný vzorec využívaný k „zbavení se odmocniny“. Pro reálná  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ , a  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \quad (1.1)$$

Tento vztah můžeme dokázat indukcí, nebo přímo. Vydeme-li z pravé strany, pak

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

Speciálně tedy například platí

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Pro kladná  $a, b$  pak máme

$$\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{b} &= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \\ \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} &= (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}. \end{aligned}$$

Smysle těchto (a podobných úprav pro vyšší odmocniny) je vyjádřit rozdíl odmocnin jako rozdíl jejich argumentů. Tyto úpravy později využijeme při počítání limit některých výrazů nebo k důkazu spojitosti odmocniny.

## 1.6 Důležité funkce

V této kapitole si zopakujeme vlastnosti základních funkcí. Nejjednodušší možnou třídou funkcí jsou polynomy. K vyhodnocení jejich funkčních hodnot totiž vystačíme pouze s operací násobení a sčítání, tedy operacemi které lze snadno provádět za pomoci počítače, nebo i ručně.

**Definice 20: Polynom** (mnohočlen) je funkce tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde reálné konstanty  $a_0, \dots, a_n$  jsou tzv. **koefficienty polynomu** a pokud  $a_n \neq 0$ , pak se  $n$  nazývá **stupeň polynomu**.

**Příklad:** Příklad polynomu  $x^2 + 1$  ukazuje, že polynom nemusí mít **reálný kořen** (tedy nemusí existovat bod  $x_0 \in \mathbb{R}$  splňující  $P(x_0) = 0$ ).  $\triangle$

Požadavek, aby každý polynom stupně  $\geq 1$  měl kořen vede k rozšíření  $\mathbb{R}$  na tzv. **komplexní čísla**. Množinu všech komplexních čísel značíme  $\mathbb{C}$ . V BI-ZMA s ní nepřijdeme příliš do styku, přesto je ale dobré na tomto místě zopakovat její základní vlastnosti. Komplexní čísla lze zapsat ve tvaru  $z = a + ib$ , kde  $i$  je imaginární jednotka splňující  $i^2 = -1$  a  $a, b \in \mathbb{R}$ . V tomto zápisu se  $a$  nazývá **reálná část**  $z$  ( $\operatorname{Re} z = a$ ),  $b$  je **imaginární část** ( $\operatorname{Im} z = b$ ).

Komplexní čísla lze sčítat a násobit (a také odčítat a dělit, pokud je dělitel různý od  $0 = 0 + i0$ ). Pro  $z_k = a_k + ib_k$ ,  $k = 1, 2$  je

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Definuje se také **komplexně sdružené číslo**  $\bar{z} = a - ib$  a **absolutní hodnota** komplexního čísla  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Dále připomeňme již několikrát zmíněnou **přirozenou mocninu** vztahy

$$\begin{aligned} x^n &:= \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ členů}}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, \\ x^0 &:= 1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

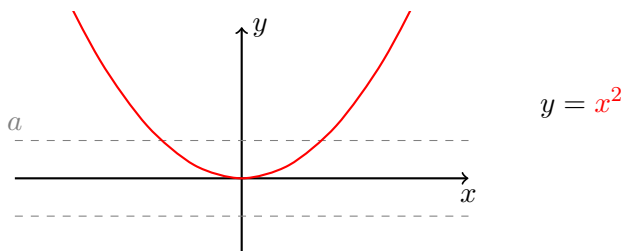
Pro záporná celá čísla  $n$  klademe

$$x^n := \frac{1}{x^{-n}} \quad \text{pro } x \neq 0,$$

Definujeme **přirozené odmocniny**, ozn.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

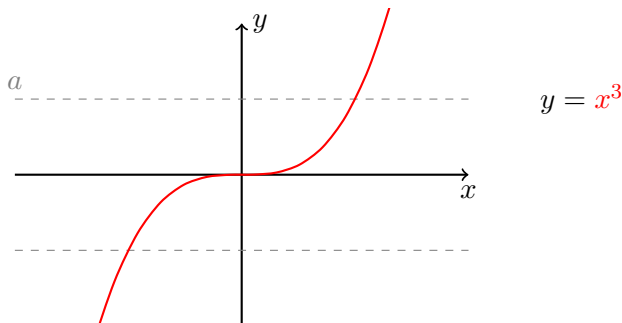
jako řešení rovnice  $x^n = a$ . Je-li  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , **sudé**, pak  $x^n \geq 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , což znamená, že rovnice má reálné řešení jen pro  $a \geq 0$ . Vizte obrázek č. 1.8.



Obrázek 1.8: Typický graf sudé mocniny.

Pro  $a > 0$  jsou tato řešení dvě, neboť  $x^{2k} = (-x)^{2k}$ . Sudou odmocninu  $\sqrt[2k]{a}$  definujeme jako nezáporné řešení. Je proto  $\sqrt{x^2} = |x|$  a nikoli  $x$ , protože nevíme, jestli je  $x$  kladné nebo záporné.

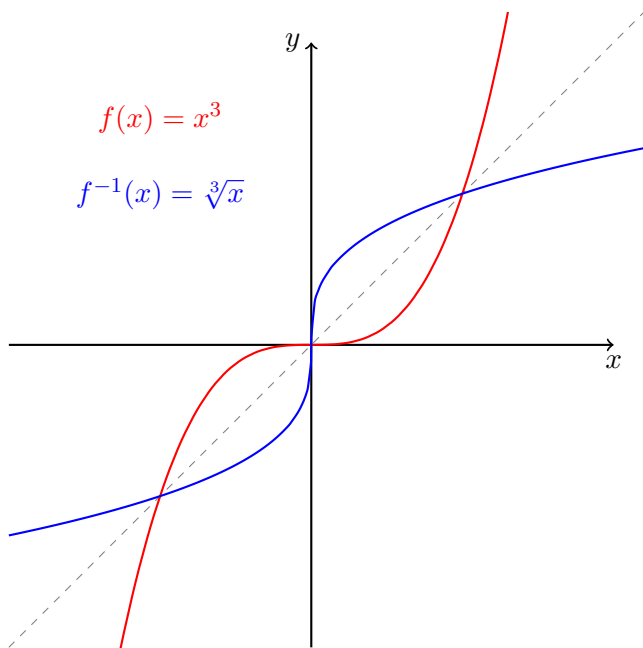
Je-li  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , **liché**, pak rovnice  $x^{2k+1} = a$  má jediné řešení, které značíme  $\sqrt[2k+1]{a}$ . Například  $\sqrt[3]{-8} = -2$ . Vizte obrázek č. 1.9.



Obrázek 1.9: Typický graf liché mocniny.

Připomeňme ještě vztah mezi grafem funkce (např.  $f(x) = x^3$ ) a grafem funkce k ní inverzní (zde  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ). Tyto grafy jsou symetrické vůči ose prvního kvadrantu, jak je pěkně vidět například na obrázku č. 1.10.

Platí tedy, že lichá odmocnina  $f^{-1}(y) = \sqrt[2k+1]{y}$  je inverzní funkcí k liché mocnině  $f(x) = x^{2k+1}$ . Protože  $H_f = \mathbb{R}$  je  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ . Sudé mocniny  $g(x) = x^{2k}$  nejsou na  $\mathbb{R}$



Obrázek 1.10: Grafy funkce a funkce k ní inverzní jsou symetrické vůči ose prvního a třetího kvadrantu.

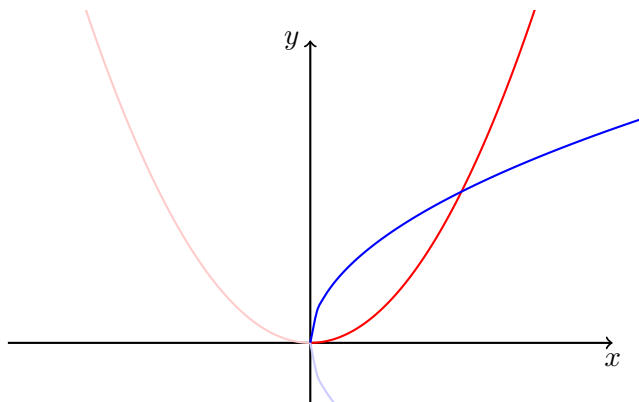
prosté. Ale zúžíme-li definiční obor na interval  $\langle 0, +\infty \rangle$  pak funkce  $h = g|_{\langle 0, +\infty \rangle}$  je již na intervalu  $\langle 0, +\infty \rangle$  rostoucí a tedy prostá. Inverzní funkce  $h^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$  má definičním oborem interval  $\langle 0, +\infty \rangle$ , protože  $H_h = \langle 0, +\infty \rangle$ , a je na tomto intervalu rostoucí. Vizte obrázek č. 1.11.

Doposud definované mocniny mají následující vlastnosti:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

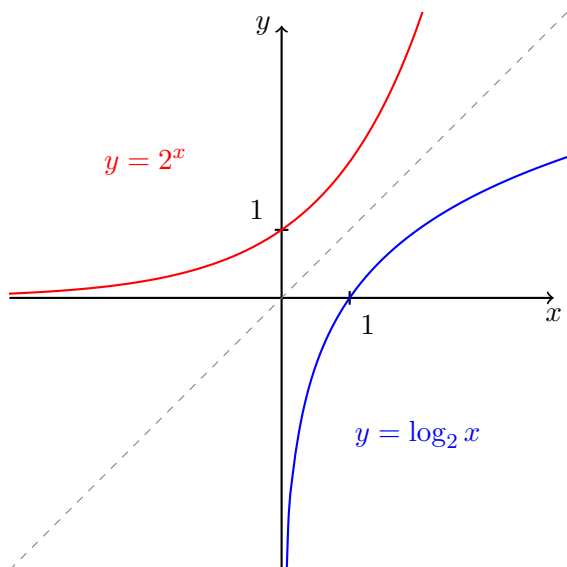
pro taková  $a, b, x$ , aby výrazy vlevo i vpravo byly definované. Definici mocniny  $x^a$  můžeme rozšířit na všechna  $a \in \mathbb{R}$  (později v kapitole 2.12 ukážeme jak to lze udělat), ale obecně jen pro  $x > 0$  a pro  $a > 0$  pro  $x \geq 0$ . Tato obecná mocnina má stejné vlastnosti jaké byly uvedeny výše.

V předcházejícím bodu jsme mluvili o obecné mocnině jako o funkci  $x \mapsto x^a$ , tj. s proměnným základem. Můžeme také považovat základ za konstantní a exponent za proměnný. Pro  $b > 0$  se funkce typu  $x \mapsto b^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , nazývá **exponenciální funkce**. Pro  $b > 1$  je funkce  $f(x) = b^x$  rostoucí na  $\mathbb{R}$  a je  $H_f = (0, +\infty)$ . Existuje



Obrázek 1.11: Sudá mocnina a sudá odmocnina.

proto inverzní funkce, která se nazývá logaritmická o základu  $b$  a kterou značíme  $\log_b$ . Graf těchto funkcí se základem  $b = 2$  je zobrazen na obrázku č. 1.12.

Obrázek 1.12: Grafy funkcí  $2^x$  a  $\log_2 x$ .

Platí tedy

$$b^x = y \iff x = \log_b y \quad (b > 1, x \in \mathbb{R}, y > 0).$$



Funkce  $\log_b$  je definovaná a rostoucí (stále  $b > 1$ ) na intervalu  $(0, +\infty)$ . Její vlastnosti jsou odvozeny z vlastností exponenciální funkce:

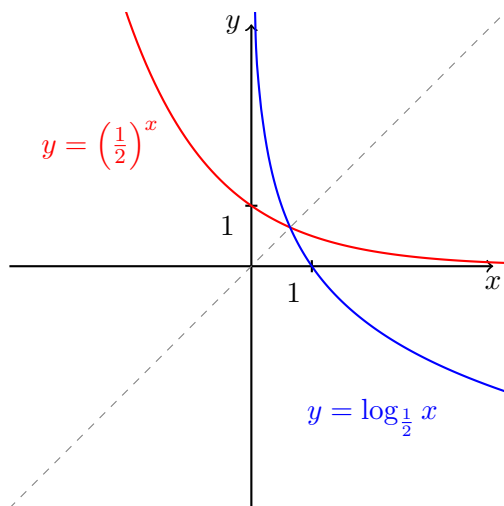
$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y, \quad x, y > 0,$$

(tato vlastnost se dříve používala pro násobení na tzv. logaritmickém pravítku)

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y, \quad \log_b(x^c) = c \cdot \log_b x, \quad x, y > 0, c \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že zcela zvláštní místo v matematice má exponenciální funkce se základem  $e$  (**Eulerovo** číslo,  $e = 2.718\dots$ , je iracionální) o níž bude řeč později v kapitole 2.11. Inverzní funkce k ní se nazývá **přirozený logaritmus** a značí se  $\ln$ .

Je-li základ exponenciální funkce  $b \in (0, 1)$ , pak funkce  $x \mapsto b^x$  je klesající na  $\mathbb{R}$  a inverzní funkce k ní (opět  $\log_b$ ) je definovaná a klesající na intervalu  $(0, +\infty)$ . Graf těchto funkcí se základem  $b = \frac{1}{2}$  uvádíme na obrázku č. 1.13.



Obrázek 1.13: Grafy funkcí  $(1/2)^x$  a  $\log_{1/2} x$ .

Občas je užitečný převodní vztah mezi exponenciálními funkcemi o různých základech: Pro  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1 \neq b$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , je

$$b^x = a^{x \log_a b},$$

jak snadno nahlédneme řešením rovnice  $b^x = a^y$  vzhledem k neznámé  $y$  je

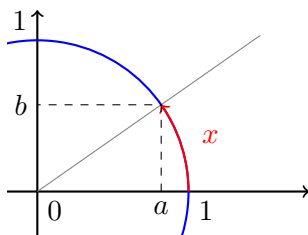
$$y = \log_a b^x = x \log_a b.$$

Podobně (pro stejné hodnoty  $a, b, x$  jako výše)

$$\log_a x = (\log_a b)(\log_b x).$$

Ještě poznamenejme, že funkce  $x \mapsto x^x$  není ani mocninná ani exponenciální, protože má jak proměnný základ, tak exponent. V souladu s předcházejícím je definovaná takto  $x^x = e^{x \ln x}$ .

Funkce **sinus** ( $\sin$ ) a **kosinus** ( $\cos$ ) se zpravidla definují pomocí souřadnic  $(a, b)$  bodu v rovině  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ležícího na kružnici o středu v počátku  $(0, 0)$  a poloměru 1, vizte obrázek č. 1.14.



Obrázek 1.14: Zavedení goniometrických funkcí.

Označíme-li  $x$  délku kruhového oblouku od bodu  $(1, 0)$  do bodu  $(a, b)$  ( $x$  je velikost příslušného úhlu v tzv. obloukové míře, radiánech), pak klademe

$$\cos x := a, \quad \sin x := b.$$

Tím jsou definovány funkce  $\cos$  a  $\sin$  pro  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$  ( $2\pi$  je délka příslušné kružnice). Z Pythagorovy věty ( $a^2 + b^2 = 1$ ) ihned plyne vелеznámý vztah

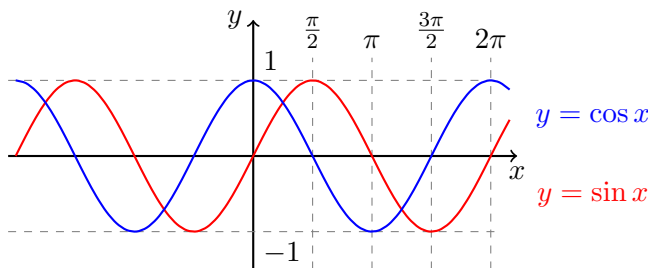
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Funkce sinus a kosinus lze  $2\pi$ -periodicky rozšířit, tj. klademe

$$\cos x = \cos(x - 2k\pi), \quad \sin x = \sin(x - 2k\pi)$$

pro  $x \in \langle 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Grafy funkcí sinus a kosinus lze nalézt na obrázku č. 1.15.

Odvození **součtových vzorců** je o něco složitější. Pro jejich odvození použijeme komplexní čísla, konkrétně jejich vyjádření v tzv. goniometrickém tvaru. Ztotožníme-li  $\mathbb{C}$  s  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , pak množina komplexních čísel s absolutní hodnotou rovnou 1 bude



Obrázek 1.15: Grafy funkcí sinus a kosinus.

ztotožněna s jednotkovou kružnicí, tj.  $(a, b) = \cos x + i \sin x$ . Pro součin dvou komplexních čísel komplexních čísel v goniometrickém tvaru platí

$$(\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y).$$

Roznásobením čísel na levé straně, použitím rovnosti dvou komplexních čísel (právě tehdy, když se rovnají jejich reálné a imaginární složky) a eventuálním periodickým rozšířením dostáváme

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Z těchto vztahů lze odvodit ostatní goniometrické vztahy.

Ještě budeme používat funkce **tangens** ( $\operatorname{tg}$ ) a **kotangens** ( $\operatorname{cotg}$ ), které jsou  $\pi$ -periodické a definujeme je pomocí podílů

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right),$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k + 1)\pi).$$

Na závěr uvedme ještě, že exponenciální funkci  $e^x$  lze rozšířit pro komplexní hodnoty nezávisle proměnné Eulerovým vztahem

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

a takto rozšířená exponenciální funkce bude mít stále svoji základní vlastnost:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Odtud např. plyne jednoduchá metoda pro určení  $\sum_{k=0}^n \cos ky$  a  $\sum_{k=1}^n \sin ky$  pro  $y \neq 2k\pi$ :

$$\sum_{k=0}^n (\cos ky + i \sin ky) = \sum_{k=0}^n e^{iky} = (\text{geometrická posloupnost}) = \frac{1 - e^{i(n+1)y}}{1 - e^{iy}}.$$

Úpravou pravé strany najdeme příslušné vztahy.

# Kapitola č. 2

## Reálné posloupnosti

Reálná posloupnost; vlastnosti posloupností; vybraná posloupnost; rozšířená reálná osa; okolí bodů rozšířené reálné osy; limita číselné posloupnosti; jednoznačnost limity; konvergentní, divergentní posloupnosti; věta o limitě vybrané posloupnosti; kritéria konvergence; hromadný bod posloupnosti; Bolzano-Cauchyova věta; věta o existenci limity omezené monotónní posloupnosti; algebraické operace na množině  $\mathbb{R}$ ; věty o nerovnostech v limitách; věta o sevržené posloupnosti. Výpočty limit důležitých posloupností; rekurentně zadané posloupnosti; číselné řady; Eulerovo číslo; exponenciální funkce a obecná mocnina.

### 2.1 Definice pojmu posloupnosti

Pomocí pojmu posloupnosti můžeme formalizovat procesy probíhající v diskretních krocích. Například posloupnost měření průměrné denní teploty v jistém místě, nebo posloupnost aproximací řešení jisté úlohy. V této kapitole si ukážeme, jak pojem posloupnosti definovat, jaké významné vlastnosti posloupností nás budou zajímat a jak definovat veledůležitý pojem limity posloupnosti.

**Definice 21** (Posloupnost): Zobrazení z množiny  $\mathbb{N}$  do množiny  $\mathbb{R}$ , jehož definiční obor je nekonečná množina, nazýváme **reálná posloupnost**.

Než přistoupíme k rozboru tohoto pojmu, učiníme následující dohodu. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že zkoumaná posloupnost je definovaná na celém  $\mathbb{N}$ . Pokud tomu tak není, pak ji lze vždy vhodně „preindexovat“. V některých případech však může být vhodné uvažovat menší indexovou množinu (například pouze sudá čísla), v takovém případě na to bude čtenář jasně upozorněn.

Dále budeme používat následující standardní označení. Je-li  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  posloupnost, pak funkční hodnotu  $a$  v bodě  $n \in D_a \subset \mathbb{N}$ , tj. číslo  $a(n)$ , označujeme pomocí dolního indexu<sup>1</sup> symbolem  $a_n$  a nazýváme  **$n$ -tým členem posloupnosti  $a$** . Skuteč-

---

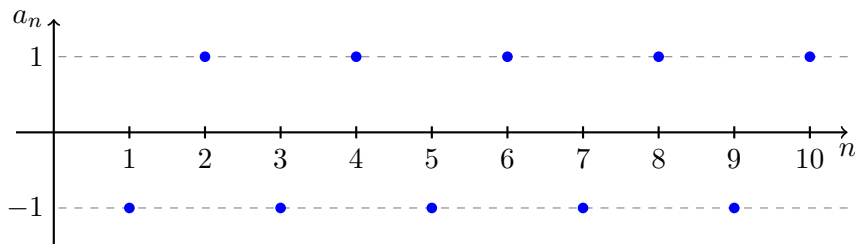
<sup>1</sup>Závislost na diskretních parametrech (např. celočíselných) vyjadřujeme pomocí dolních indexů. Jako například u posloupností:  $a_n$ . Naopak závislost na spojitých parametrech pak většinou pomocí závorek, tj. například u reálných funkcí reálné proměnné píšeme  $f(x)$ .

nost, že  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem  $(a_n)$ . Pokud chceme zvýraznit i definiční obor, tedy pro jaké indexy jsou členy posloupnosti definovány, píšeme  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , či pouze  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

**Příklad:** Uvažme posloupnost  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou předpisem  $a_n := (-1)^n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Například tedy platí rovnosti  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ , či  $a_{321} = -1$ . Tuto posloupnost jsme mohli zapsat i ekvivalentním způsobem:

$$a = ((-1)^n).$$

Oborem hodnot  $a$  je množina obsahující pouze **dva** prvky,  $\{-1, 1\}$ . Posloupnost  $a$  je graficky znázorněna na obrázku č. 2.1. △



Obrázek 2.1: Příklad posloupnosti  $(a_n)$ ,  $a_n = (-1)^n$ .

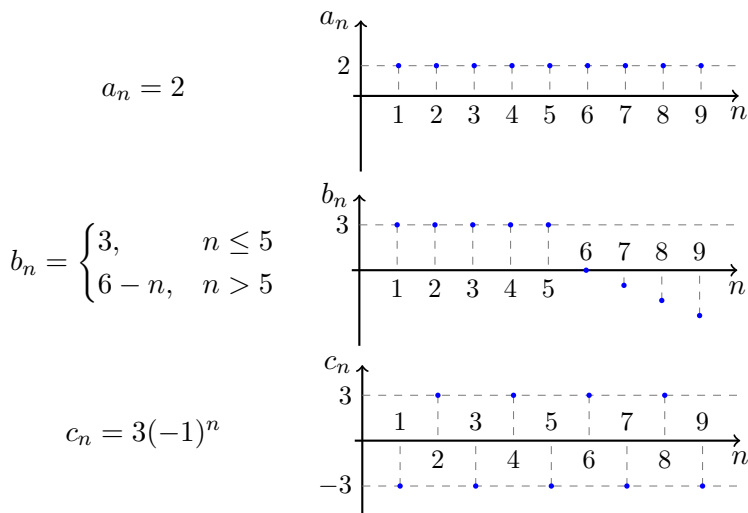
Podobně jako u funkcí, zavádíme několik typů posloupností podle vlastností jejich sousedních členů. Posloupnost  $(a_n)$  je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud  $a_n < a_{n+1}$  (resp.  $a_n > a_{n+1}$ ) pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Posloupnost  $(a_n)$  je **neklesající** (resp. **nerostoucí**) pokud  $a_n \leq a_{n+1}$  (resp.  $a_n \geq a_{n+1}$ ). Posloupnost  $(a_n)$  nazýváme **monotonní** jestliže je nerostoucí nebo neklesající.

Rozmyslete si, jaké z těchto vlastností mají posloupnosti na obrázku č. 2.2.

## 2.2 Limita číselné posloupnosti

V této podkapitole nejprve zavedeme pojem limity posloupnosti a pak prozkoumáme jeho základní vlastnosti. Hlavní myšlenkou je vyjádření intuitivního požadavku aby se „členy posloupnosti  $a_n$  blížily libovolně blízko k jistému  $\alpha$ “. Začneme ale přesnou definicí.

**Definice 22:** Řekneme, že reálná posloupnost  $(a_n)$  má **limitu**  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ , právě když pro každé okolí  $H_\alpha$  bodu  $\alpha$  lze nalézt  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  větší než



Obrázek 2.2: Tři různé příklady posloupností.

$n_0$  platí  $a_n \in H_\alpha$ . V symbolech

$$(\forall H_\alpha)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n \in H_\alpha). \quad (2.1)$$

Tuto skutečnost můžeme zapsat několika možnými ekvivalentními způsoby:

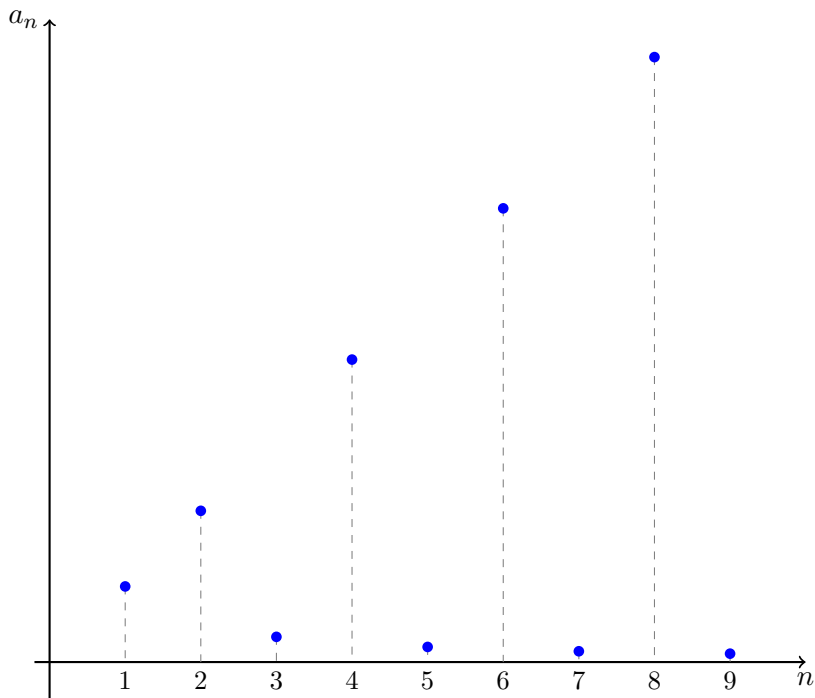
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \rightarrow \alpha.$$

Slovně můžeme definici (2.1) přeformulovat i takto:  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$  je limitou posloupnosti  $(a_n)$ , právě když v každém okolí  $H_\alpha$  bodu  $\alpha$  leží všechny členy posloupnosti s dostatečně velkým indexem, tj. všechny až na konečný počet výjimek. Na druhou stranu, k tomu aby  $\lim a_n = \alpha$  ale nestačí, aby v každém okolí bodu  $\alpha$  leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti. Uvažte například posloupnost

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché.} \end{cases} \quad (2.2)$$

V každém okolí bodu 0 leží nekonečně mnoho jejích členů, ale tato posloupnost nemůže mít limitu, protože mimo toto okolí leží taktéž nekonečně mnoho jejích členů. Tato posloupnost je znázorněna na obrázku č. 2.3.

Pokud bychom v definici limity zaměnili „ $n_0 \in \mathbb{N}$ “ za „ $n_0 \in \mathbb{R}$ “, pak se její smysl nezmění. Význam zůstane také zachován připustíme-li „ $n \geq n_0$ “ místo „ $n > n_0$ “.



Obrázek 2.3: Grafické znázornění posloupnosti (2.2).

Index  $n_0$  totiž vyjadřuje pouze to, že inkluze  $a_n \in H_\alpha$  platí pro všechna dostatečně velká  $n$ .

Pokud uvažujeme  $\alpha \in \mathbb{R}$ , můžeme definici přeformulovat a zbavit ji reference na pojem okolí. Každé okolí  $H_\alpha$  je v tomto případě tvaru  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$  pro nějaké kladné  $\varepsilon$ . Dále inkluze  $a_n \in H_\alpha$  platí, právě když  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ . Dostáváme tedy ekvivalentní formulaci definice,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Podobnou úvahou pro případ  $\alpha = +\infty$  obdržíme následující tvrzení

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall c \in \mathbb{R}) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n > n_0 \Rightarrow a_n > c).$$

Rozmyslete si podmínku pro  $\alpha = -\infty$ .



Následující věta odhaluje důležitou vlastnost pojmu limity. Posloupnost buď limitu nemá, nebo ji má a její hodnota je dána jednoznačně. Jinak řečeno, žádná posloupnost nemůže mít **dvě různé** limity. Pokud tedy dva lidé počítají jeden příklad a vyjde jim rozdílný výsledek, pak aspoň jeden z nich musel někde ve výpočtu udělat chybu.

**Věta 23** (O jednoznačnosti limity): Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

*Důkaz sporem.* Předpokládejme, že  $(a_n)$  má dvě různé limity  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a \neq b$ . Potom existují dvě disjunktní okolí  $H_a$  a  $H_b$ , tj.  $H_a \cap H_b = \emptyset$ . Z definice limity ovšem máme k dispozici  $n_0 \in \mathbb{N}$  a  $m_0 \in \mathbb{N}$  taková, že pro všechna  $n > n_0$  je  $a_n \in H_a$  a pro všechna  $n > m_0$  je  $a_n \in H_b$ . Tudíž pro libovolné  $n > \max\{n_0, m_0\}$  platí

$$a_n \in H_a \cap H_b = \emptyset$$

což je spor. □

Při počítání limit většinou (přímo) nepoužíváme definici, ale výpočet zakládáme na znalosti jednoduchých, elementárních, limit. V následujících třech jednoduchých příkladech si ukážeme jak definici použít právě na těchto jednoduchých posloupnostech.

**Příklad:** Dokažte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Skutečně, buď  $\varepsilon > 0$  libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Stačí tedy k danému  $\varepsilon$  volit libovolné  $n_0 \in \mathbb{N}$  splňující  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ . Pro ilustraci vizte obrázek č. 2.4. △

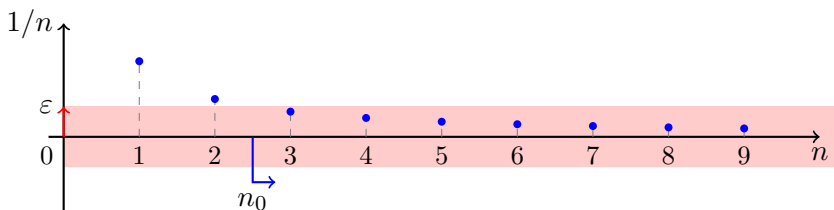
**Příklad:** Limita konstantní posloupnosti  $a_n = \alpha$  je rovna  $\alpha$ . Buď  $\varepsilon > 0$  libovolné. Zvolíme-li jakékoliv  $n_0 \in \mathbb{N}$  potom pro  $n > n_0$  triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon. \quad \triangle$$

**Příklad:** Limita posloupnosti  $a_n = n^2$  je  $+\infty$ . Buď  $K > 0$  libovolné. Zvolíme-li přirozené  $n_0 > \sqrt{K}$ , pak pro každé  $n > n_0 = \sqrt{K}$  platí  $a_n = n^2 > K$ . △

**Poznámka:** Z předchozích tří příkladů by mělo být patrné, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a > 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$



Obrázek 2.4: Grafické znázornění posloupnosti  $a_n = 1/n$  a volby  $n_0$  pro konkrétní  $\varepsilon$  v definici limity.

Toto tvrzení je snadné<sup>2</sup> ověřit na základě definice stejně jako v předchozích příkladech.

Podle toho, zda existuje limita posloupnosti rozlišujeme následující dva typy posloupností.

**Definice 24:** Buď  $(a_n)$  posloupnost. Pokud má limitu  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

O konvergentní posloupnosti někdy také ze zjevných důvodů říkáme, že má konečnou limitu. Výsledky předchozích příkladů proto můžeme také formulovat takto: posloupnost  $\left(\frac{1}{n}\right)$  je konvergentní, libovolná konstantní posloupnost je konvergentní, posloupnost  $(n)$  je divergentní.

Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti  $(a_n)$  je úspěšné provedení následujících dvou kroků.

1. Uhodni kandidáta na limitu, označme si ho  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ .
2. Pomocí definice dokaž, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ .

V další části tohoto textu si ukážeme sofistikovanější nástroje pro výpočet limit. Velmi často je nám hodnota limity (pokud vůbec existuje) neznámá. Typicky je její případná hodnota právě to, co hledáme. Vystává proto přirozená otázka: lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti  $(a_n)$  pouze na základě znalosti jejích členů? Na tuto otázku zanedlouho kladně odpovíme.

<sup>2</sup>Ovšem obecnou mocninu jsme ještě nezavedli. V tento okamžik je toto tvrzení pravdivé pouze pro  $a \in \mathbb{Z}$ .

## 2.3 Vybrané posloupnosti

V předešlé podkapitole jsme si ukázali, jak pomocí definice ověřit, že jisté  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$  je limitou zadané posloupnosti  $(a_n)$ . Ne všechny posloupnosti však limitu mají. Pokud máme podezření, že limita zadané posloupnosti neexistuje, můžeme se pokusit její existenci vyvrátit. Jedním ze způsobů jak vyvrátit existenci limity je „vybrat“ ze zadané posloupnosti dvě podposloupnosti s různou limitou. Přesněji tento postup rozebereme v této podkapitole.

**Definice 25:** Necht  $(a_n)$  je libovolná posloupnost a  $(k_n)$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost  $(a_{k_n})$  nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti  $(a_n)$ . Posloupnost  $(a_{k_n})$  nazýváme také **podposloupností** posloupnosti  $(a_n)$ .

**Příklad:** Posloupnost  $(1)$  je vybraná z  $((-1)^n)$ . Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy  $k_n = 2n$  pro  $n = 1, 2, \dots$ . Posloupnost  $(1)$  není vybraná z  $(n)$  i přesto, že se člen s hodnotou 1 v posloupnosti  $(n)$  vyskytuje.  $\triangle$

Členy posloupnosti  $(k_n)$  tedy udávají indexy členů vybíraných z  $(a_n)$ . Požadavek aby  $(k_n)$  byla rostoucí znamená, že při výběru členů se nesmím vracet k předchozím členům ani nemohu vybrat stejný člen dvakrát.

**Příklad:** Uvažme posloupnost  $a_n = (-1)^n n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Prvních pár členů tedy je  $-1, 2, -3, 4, \dots$ . Posloupnost  $(2n)_{n=1}^{\infty}$  je vybraná z  $(a_n)$ . Ano, stačí volit rostoucí  $k_n = 2n$  a pak  $a_{k_n} = 2n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Posloupnost  $(2)$  není vybraná z  $(a_n)$ . Sice platí, že když položíme  $k_n = 2$ , pak  $a_{k_n} = 2$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , ale  $(k_n)$  není rostoucí (je konstantní s hodnotou 1).  $\triangle$

Ihned vyvstává otázka jak spolu souvisí limita posloupnosti a limita její podposloupnosti? Přímo z definice limity nahlédneme platnost následující věty.

**Věta 26** (O limitě vybrané posloupnosti): Necht posloupnost  $(a_n)$  má limitu  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ . Pak každá posloupnost vybraná z  $(a_n)$  má také limitu  $\alpha$ .

*Důkaz.* Pro  $(a_n)$  platí formule (2.1). Buď  $(k_n)$  libovolná ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel a  $b = (a_{k_n})$  posloupnost vybraná z  $(a_n)$ . Buď  $H_\alpha$  okolí  $\alpha$ , limity posloupnosti  $(a_n)$ . Potom existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $n > n_0$  je  $a_n \in H_\alpha$ . Dle předpokladů o posloupnosti  $(k_n)$  ale existuje ale i  $m_0$  takové, že  $k_{m_0} > n_0$ . Je-li tedy  $m > m_0$  pak nutně  $a_{k_m} \in H_\alpha$ . Posloupnost  $(a_{k_n})$  má tedy také limitu  $\alpha$ .  $\square$

**Příklad:** Platí  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n! + n^2} = 0$ . Posloupnost  $\left(\frac{1}{4n! + n^2}\right)$  je totiž vybraná posloupnost z  $\left(\frac{1}{n}\right)$  a již víme, že  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .  $\triangle$

Věta 26 nám dává jednoduché a užitečné kritérium pro neexistenci limity posloupnosti. Zformulujeme si ho jako následující důsledek.

**Důsledek 27:** Lze-li z posloupnosti  $(a_n)$  vybrat dvě podposloupnosti s **různými** limitami, pak limita původní posloupnosti  $(a_n)$  neexistuje.

*Důkaz.* Důkaz důsledku je zřejmý. Sporem. Kdyby posloupnost  $(a_n)$  měla limitu a šlo z ní vybrat dvě podposloupnosti s různými limitami, pak se ihned dostáváme do sporu s větou o limitě vybrané podposloupnosti.  $\square$

**Příklad:** Limita posloupnosti  $((-1)^n)_{n=1}^\infty$  neexistuje. Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme  $k_n := 2n$  a  $\ell_n := 2n - 1$  pro  $n = 1, 2, \dots$ . Potom obě vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \rightarrow 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \rightarrow -1. \quad \triangle$$

## 2.4 Kritéria konvergence posloupností

V této kapitole se budeme zabývat vlastnostmi limity posloupnosti. Nejprve si ukážeme důležitá kritéria pro existenci konečné limity nevyžadující její *a priori* znalost. Poté probereme praktické věty pro výpočty, tedy věty umožňující nám pomocí znalosti jednoduchých limit činit závěry o limitách složitějších posloupností.

Připomeňme si z dřívější přednášky axiom úplnosti reálných čísel. Nyní již navíc můžeme podmínku, kladenou na délky intervalů, formulovat pomocí pojmu limity.

**Poznámka** (Axiom úplnosti): Každý smřšťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\begin{aligned} \langle a_n, b_n \rangle &\supset \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) &= 0, \end{aligned}$$

pak existuje reálné  $x$  ležící v každém z intervalů  $\langle a_n, b_n \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Takovéto  $x$  může být zřejmě nejvýše jedno. Předpokládáme-li existenci dvou různých prvků  $x$  a  $y$ , ležících v průniku, snadno se dostaneme ke sporu.

Dále si zavedme ještě pojem hromadného bodu, který úzce souvisí s pojmem limity a který budeme v této kapitole potřebovat.

**Definice 28:** Bod  $x \in \mathbb{R}$  nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti  $(a_n)$ , právě když v **každém** okolí  $H_x$  bodu  $x$  leží nekonečně mnoho členů posloupnosti  $(a_n)$ .

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti? Pokud má posloupnost  $(a_n)$  konečnou limitu  $\alpha \in \mathbb{R}$  pak je tato i hromadným bodem posloupnosti  $(a_n)$ . Narozdíl od limit může mít zadaná posloupnost více hromadných bodů. Např. posloupnost  $((-1)^n)$  má hromadné body 1 a  $-1$ .

**Poznámka:** Není těžké nahlédnout, že bod  $\alpha$  je hromadným bodem posloupnosti  $(a_n)$ , právě když existuje posloupnost  $(b_n)$  vybraná z  $(a_n)$  jejíž limita je  $\alpha$ , tj.  $\lim b_n = \alpha$ .

Přistupme nyní k důležité větě nesoucí jméno po [Bernardovi Bolzanovi](#) (matematik pocházející z itálie ale studující v Praze, 1781 - 1848) a [Karlovi Weierstrassovi](#) (německý matematik, otec moderní matematické analýzy, 1815 - 1897). Její tvrzení není vůbec očividné a jak uvidíme v důkazu, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel.

**Věta 29** (Bolzano-Weierstrass): Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod.

*Důkaz.* Buď  $(a_n)$  omezená posloupnost. Jistě existuje interval  $\langle b_1, c_1 \rangle$  takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti  $(a_n)$ . Rozdělíme-li interval  $\langle b_1, c_1 \rangle$  na poloviční intervaly  $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$  a  $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$ , pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti  $(a_n)$ , označme ho  $\langle b_2, c_2 \rangle$ .

Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů  $\langle b_n, c_n \rangle$  z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů  $(a_n)$  a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné  $x$  patřící do každého z intervalů  $\langle b_n, c_n \rangle$ . Protože délky intervalů  $\langle b_n, c_n \rangle$  konvergují k nule, lze pro libovolné okolí  $H_x$  nalézt  $n$  dostatečně velké na to, aby celý interval  $\langle b_n, c_n \rangle$  patřil do  $H_x$ . Proto lze v  $H_x$  nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti  $(a_n)$  a  $x$  je tedy hromadným bodem  $(a_n)$ .  $\square$

**Poznámka:** Jinak řečeno, z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost.

Následující větu budeme velmi často využívat. Dává nám totiž **postačující podmínku** pro konvergenci posloupnosti. Pokud ověříme tuto podmínku (v tomto případě monotonii a omezenost posloupnosti) pak je zaručena existence její konečné limity. Jak je patrné z důkazu, jedná se o důsledek předchozí Bolzano-Weierstrassovi věty.

**Věta 30** (O limitě monotonní posloupnosti): Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

*Důkaz.* V případě, že je zkoumaná posloupnost  $(a_n)$  neomezená, je z definice limity zřejmé, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ . (znaménko  $+$  pro neomezenost shora,  $-$  pro zdola).

Předpokládejme, že  $(a_n)$  je neklesající a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty má posloupnost  $(a_n)$  hromadný bod, označme ho  $x$ . Buď  $H_x$  libovolné okolí bodu  $x$ . Potom existuje jisté  $a_{n_0}$  patřící do  $H_x$ . Do tohoto okolí ale musí patřit všechna  $a_n$  s  $n > n_0$ , protože pro ně nutně platí  $a_n \leq x$ . Kdyby totiž  $a_n$  přerostlo  $x$ , nemohl by  $x$  být hromadným bodem  $(a_n)$ .  $\square$

**Příklad** (Limita posloupnosti harmonických čísel): Zkoumejme limitu posloupnosti

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Tato posloupnost je očividně rostoucí. Podle věty o limitě monotonní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme posloupnost  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j + 1} + \frac{1}{2^j + 2} + \cdots + \frac{1}{2^j + 2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost  $(b_n)$ , a tedy i  $(a_n)$ , není omezená shora. Proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty. \quad \triangle$$

Další věta nám dává **nutnou a postačující** podmínku pro konvergenci posloupnosti. Tedy podmínku ekvivalentní s definicí. Podstatnou výhodou této podmínky je, že vyžaduje pouze znalost členů zkoumané posloupnosti.

**Věta 31** (Bolzano-Cauchy): Posloupnost  $(a_n)$  je konvergentní, právě když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n, m > n_0$  je  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

*Důkaz*  $\Rightarrow$ . Nechť má  $(a_n)$  limitu  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Buď  $\varepsilon > 0$  libovolné. Potom lze nalézt  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n > n_0$  je  $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Takže pro libovolné  $n, m > n_0$  platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti. □

*Důkaz*  $\Leftarrow$ . Nechť  $(a_n)$  splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

Zvolme za  $\varepsilon = 1$ , pak existuje index  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro  $m > n_0$  patří  $a_m$  do intervalu  $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{n_0}(1)$ . Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost  $(a_n)$  je proto omezená. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje  $x \in \mathbb{R}$ , hromadný bod posloupnosti  $(a_n)$ .

Buď  $H_x(\varepsilon/2)$  okolí bodu  $x$ . Pro  $\varepsilon/2$  existuje  $n_0$  tak, že pokud  $m, n > n_0$  pak platí  $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ . Určitě ale existuje  $m > n_0$  tak, že  $a_m \in H_x(\varepsilon/2)$ . Tudíž pro  $n > n_0$  je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \leq |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

Vraťme se ještě jednou k posloupnosti harmonických čísel. Ukažme, že její limita je nekonečno pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria. Nejprve si opět povšimneme, že zkoumaná posloupnost  $(b_n)$ ,  $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , je rostoucí a tedy má limitu. Dokažme, že tato limita nemůže být konečná (tj. nemůže patřit do  $\mathbb{R}$ ) a proto musí být nutně rovna  $+\infty$ . K tomu použijeme Bolzano-Cauchyova kritéria, chceme ukázat jeho negaci. Tedy

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n, m \in \mathbb{N})(n, m > n_0 \text{ a } |b_n - b_m| \geq \varepsilon),$$

kde  $(a_n)$  je zkoumaná posloupnost. Zvolme  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  a buď  $n_0 \in \mathbb{N}$  libovolné. Položme  $n = 4n_0$  a  $m = 2n_0$ , potom  $n > m > n_0$  a

$$|b_n - b_m| = \sum_{k=2n_0+1}^{4n_0} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4n_0} \cdot 2n_0 = \frac{1}{2}.$$

Což bylo dokázati.

**Poznámka** (Podílové kritérium): Na tomto místě je vhodné připomenout další postačující podmínku pro konvergenci probíranou na cvičení a to podílové kritérium. Buď  $(a_n)$  posloupnost kladných čísel a necht

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Potom

- pokud  $q < 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,
- pokud  $q > 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

**Příklad:** Vypočtěme limitu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Pro limitu podílů platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Podle podílového kritéria proto původní limita konverguje k nule. △

## 2.5 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

V předchozí kapitole jsme zavedli rozšířenou reálnou osu,  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Nyní mezi prvky  $\overline{\mathbb{R}}$  rozšíříme binární operace sčítání a násobení.

**Definice 32:** Necht  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  v závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$ :  $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ ,
- $a < +\infty$ :  $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ ,
- $a > 0$ :  $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$ ,
- $a < 0$ :  $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$ ,
- $a > 0$ :  $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$ ,
- $a < 0$ :  $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$ .
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$ .



Rozdíl definujeme vztahem  $a - b := a + (-b)$ , podíl  $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$ , pouze v případě že výraz na pravé straně je definován. Klademe  $-(+\infty) = -\infty$ ,  $-(-\infty) = +\infty$ ,  $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$  a  $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$  pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$ .

**Nedefinovány** zůstávají výrazy

$$\pm\infty - \pm\infty, \quad \pm\infty + \mp\infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0} \quad \text{pro } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Symboly  $\pm$  je ve stejném řádku je nutno chápat tak, že vždy horní a dolní znaménko si odpovídá. Přesněji, výraz  $\pm\infty - \pm\infty$  je zkratka pro dva výrazy:  $+\infty - (+\infty)$  a  $-\infty - (-\infty)$ , **ne** pro  $+\infty - (-\infty)$ .

**Příklad:** Platí tedy  $+\infty - 2 = +\infty$ ,  $4 \cdot (-\infty) = -\infty$ ,  $\frac{2}{+\infty} = 0$  a podobně. Výrazy  $\frac{4}{0}$ ,  $+\infty - (+\infty)$ , či  $0 \cdot (+\infty)$  **nejsou** definovány a nelze jim dát dobrý obecný smysl.  $\triangle$

## 2.6 Věty o limitách

Následující věty nám umožňují „kombinovat“ jednoduché limity do složitějších, jsou tedy velmi praktickým nástrojem pro výpočet limit.

**Věta 33:** Nechtě  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou reálné posloupnosti mající limitu v  $\overline{\mathbb{R}}$ . Označme  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  a  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

**pokud** je výraz na pravé straně definován.

Všimněte si, že aby podíl  $\frac{a}{b}$  byl definován, musí být  $b \neq 0$ . Za chvilku uvidíme, že odtud plyne existence  $n_0 \in \mathbb{N}$  takového, že  $b_n \neq 0$ . Má tedy smysl zkoumat limitu posloupnosti  $(a_n/b_n)$ .

Důkaz této věty je poněkud zdoluhavý, vzhledem k množství kombinací různých situací. Uvedmě aspoň argument pro součet a konečné limity. Ostatní případy lze ošetřit podobně i když například podíl a součin vyžadují složitější argumentaci.

*Důkaz pro součet a konečné limity.* Předpokládejme, že  $a, b \in \mathbb{R}$  potom lze pro  $\varepsilon/2$  najít  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $n > n_0$  je  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  a  $|b_n - b| < \varepsilon/2$ . Pro tato  $n$  pak máme i

$$|a_n + b_n - a - b| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle definice tedy  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ . □

Všimněme si, že ve větě se existence limit  $\lim a_n$  a  $\lim b_n$  předpokládá. Opačná tvrzení obecně neplatí, například z existence limity  $\lim(a_n + b_n)$  neplyne existence limit  $\lim a_n$  a  $\lim b_n$ . Jako příklad můžeme uvést následující volbu posloupností:

$$a_n = (-1)^n \quad \text{a} \quad b_n = (-1)^{n+1}.$$

Protože  $a_n + b_n = 0$  existuje limita součtu, ale limita původních posloupností neexistuje, jak jsme již ukázali dříve.

Uvedme ještě jeden důležitý důsledek věty 33.

**Důsledek 34:** Buď  $c \in \mathbb{R}$  konstanta a  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  posloupnosti s limitami v  $\overline{\mathbb{R}}$ . Potom platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} c a_n &= c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n. \end{aligned}$$

*Důkaz.* V případě prvního tvrzení důsledku stačí využít větu 33 a její tvrzení o součinu s posloupností  $(a_n)$  a konstantní posloupností  $b_n = c$ . K nahlédnutí druhého tvrzení si pak stačí uvědomit, že  $a_n - b_n = a_n + (-1) \cdot b_n$  a použít první část důsledku a větu 33 o součtu. □

**Příklad:** Vypočítejte

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3},$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3},$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}.$

Je potřeba použít předchozí větu, ale před tím je třeba výrazy za limitou vhodně upravit. V prvním příkladě platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 1} = -2.$$

Všimněte si, že předchozí větu jsme použili hned několikrát (podíl limit, výpočet limity čitatele a jmenovatele pomocí součtu/rozdílu limit).

V druhém příkladě podobně máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - n} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - \infty} = 0.$$

A konečně ve třetím

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{+\infty - 0 + 0}{0 - 1} = -\infty.$$

Samozřejmě způsobů jak provést úpravu těchto typů zlomků, tak aby bylo možné použít větu na podíl/součin/součet limit, je více možných.  $\triangle$

Další věta nám ukazuje, jak se chová absolutní hodnota vůči limitě.

**Věta 35:** Necht  $(a_n)$  je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |\alpha|, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Dokažme nejprve první část. Pokud  $\alpha = \pm\infty$ , pak je důkaz přímočarým použitím definice. Uvažme  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pro libovolná  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (2.3)$$

Skutečně, podle trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu platí  $|a + b| \leq |a| + |b|$  pro reálná  $a, b$ . Položíme-li  $a = x - y$  a  $b = y$ , pak

$$|x| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Záměnnou  $x$  za  $y$  a  $y$  za  $x$  pak

$$|y| - |x| \leq |y - x| \implies |x| - |y| \geq -|x - y|.$$

Celkem (2.3). Buď  $\varepsilon > 0$ . Potom dle předpokladu existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n$  větší než  $n_0$  je  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ . Díky výše odvozené nerovnosti pak ale pro tato  $n$  platí i  $||a_n| - |\alpha|| < |a_n - \alpha| < \varepsilon$ . První část tvrzení je tímto dokázána.

Ekvivalence v druhé části plyne z rovnosti

$$||x| - 0| = |x - 0|$$

platné pro každé reálné  $x$ .  $\square$

**Příklad:** Předchozí věta tedy říká, že můžeme beztréstně zaměňovat pořadí počítání limity a absolutní hodnoty. Například

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} - 2 \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} - 2 \right) \right| = |-2| = 2. \quad \triangle$$

**Věta 36:** Nechť  $(a_n)$  je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť  $k \in \mathbb{N}$  je pevně dané číslo. Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

*Důkaz.* Uvažme případ  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Podle předpokladů existuje konstanta  $c > 0$  tak, že  $c < a_n$  pro každé  $n$  a  $c < \alpha$ . Dále si stačí povšimnout, že<sup>3</sup>

$$\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha} \right| = \frac{|a_n - \alpha|}{a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\alpha + \dots + a_n\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}} \leq \frac{|a_n - \alpha|}{k \cdot c^{k-1}}.$$

Je-li tedy  $\varepsilon > 0$  zadáno libovolně, pak lze podle předpokladů nalézet  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že  $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon c^{k-1}}{k}$ . Potom ale podle nerovnice výše je

$$\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha} \right| < \varepsilon.$$

Uvažme případ  $\alpha = 0$ . Buď  $\varepsilon > 0$  libovolné. Pro  $\varepsilon^k$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pokud je  $n$  větší než  $n_0$  platí  $0 \leq a_n < \varepsilon^k$ . Pro tato  $n$  je pak ale i  $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$ . Čili  $(\sqrt[k]{a_n})$  konverguje k 0.

Případ  $\alpha = +\infty$  se vyšetří analogicky. □

**Příklad:** Vypočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n.$$

Všimněte si, že nelze použít větu o limitě součtu. Dostáváme nedefinovaný výraz  $+\infty - (+\infty)$ . Skutečně, protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 2n + 5 = +\infty$  pak podle předchozí věty platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} = +\infty$ . K výpočtu naší limity použijeme úpravu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 5} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n}} + 1} = 1.$$

Zde jsme v poslední kroku využili předchozí věty. Konkrétně

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n} \right)} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1. \quad \triangle$$

---

<sup>3</sup>Dokázáno na cvičení.

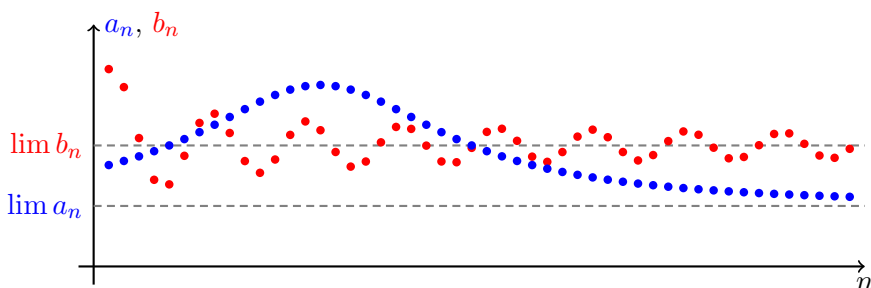
## 2.7 Nerovnosti a limity

Z nerovnosti mezi limity lze odvodit nerovnost mezi členy posloupnosti a naopak z nerovnosti mezi členy posloupnosti lze odvodit nerovnost mezi jejich limity. Hlavním výsledkem této podkapitolky je věta o sevřené posloupnosti, kterou s výhodou využíváme, pokud není možné využít věty o součtu, součinu, či podílu limit.

**Věta 37:** Nechť reálné posloupnosti  $(a_n)$  a  $(b_n)$  mají limity v  $\overline{\mathbb{R}}$ . Pokud

$$\lim a_n < \lim b_n$$

potom existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna přirozená  $n > n_0$  platí  $a_n < b_n$ .



Obrázek 2.5: Ilustrace k větě 37

*Důkaz.* Označme  $\alpha = \lim a_n$  a  $\beta = \lim b_n$ , platí  $\alpha < \beta$ . Předpokládejme, že  $\alpha$  i  $\beta$  jsou konečná. Potom pro  $\varepsilon := \frac{\beta - \alpha}{2}$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro  $n > n_0$  je  $a_n \in H_\alpha(\varepsilon)$  a  $b_n \in H_\beta(\varepsilon)$ . Protože jsou tato okolí disjunktní platí jistě navíc pro tato  $n$  nerovnost  $a_n < b_n$ .

Podobným způsobem snadno ověříme i případ kdy jsou  $\alpha$  či  $\beta$  nekonečná.  $\square$

**Příklad:** Jako příklad uvažme  $a_n = 2 - \frac{1}{n}$  a  $b_n = 1 + \frac{2}{n}$ . Jejich limity jsou  $\lim a_n = 2$  a  $\lim b_n = 1$ . Existuje tedy  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n > n_0$  přirozené platí  $a_n > b_n$ . V našem případě lze za  $n_0$  volit číslo 4.  $\triangle$

**Důsledek 38:** Nechť  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou reálné posloupnosti mající limitu v  $\overline{\mathbb{R}}$ . Pokud existuje  $n_0$  takové, že pro všechna přirozená  $n > n_0$  je  $a_n \leq b_n$ , potom  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že  $\lim a_n > \lim b_n$ . Potom podle předchozí věty existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n > n_0$  platí  $a_n > b_n$ . To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností  $(a_n)$  a  $(b_n)$ .  $\square$

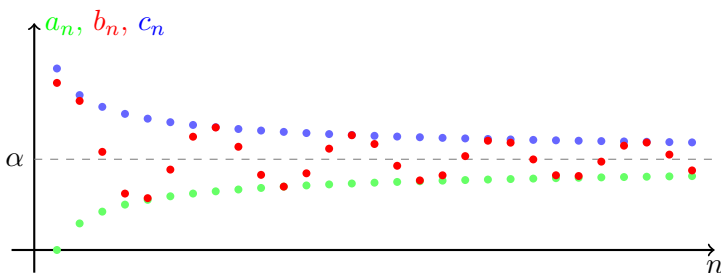
Všimněte si, že neostrost nerovnosti je zde důležitá. Například, pro  $a_n = \frac{1}{n}$  a  $b_n = 0$  platí ostrá nerovnost  $a_n > b_n$  pro každé přirozené  $n$ , ale  $\lim a_n = \lim b_n = 0$ .

Nyní se dostáváme k velmi důležité větě, kterou často použijeme. Její myšlenka spočívá v tom, že dokážeme-li „dobře vystihnout“ chování dané posloupnosti pomocí posloupností se známými shodnými limity, pak známe i limitu zkoumané posloupnosti.

**Věta 39** (O sevřené posloupnosti): Nechť  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  a  $(c_n)$  jsou reálné posloupnosti pro které platí

1.  $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n \leq b_n \leq c_n)$
2. posloupnosti  $(a_n)$  a  $(c_n)$  mají stejnou limitu  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Potom existuje limita posloupnosti  $(b_n)$  a platí  $\lim b_n = \alpha$ .



Obrázek 2.6: Ilustrace k větě 39.

*Důkaz.* Buď  $H_\alpha$  okolí bodu  $\alpha$ . Existuje  $m_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro  $n > m_0$  patří jak  $a_n$  tak  $c_n$  do  $H_\alpha$ . Pro  $n > \max\{n_0, m_0\}$  do tohoto okolí musí patřit i  $b_n$ , protože  $a_n \leq b_n \leq c_n$ . Proto má posloupnost  $(b_n)$  limitu rovnou  $\alpha$ .  $\square$

**Příklad:** Vypočtěte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ . Funkce  $\sin$  má obor hodnot  $H_{\sin} = \langle -1, 1 \rangle$ . Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené  $n$  platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0$  je podle předchozí věty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0. \quad \triangle$$

**Příklad:** Pokud zkoumáme posloupnost o které máme podezření, že její limitou je  $+\infty$ , pak nám stačí udělat odhad pouze z jedné strany, zespoda. Skutečně. Uvažme například posloupnost

$$a_n = (2 + (-1)^n)n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vzhledem ke kladnosti a omezenosti závorky očekáváme, že limitou bude  $+\infty$ . Nelze ale použít větu o limitě součinu, protože limita závorky neexistuje. Každý člen posloupnosti ale můžeme odhadnout zespoda takto,

$$a_n = (2 + (-1)^n)n \geq (2 - 1)n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti  $(n)$  víme, že její limitou je  $+\infty$ . Odtud ihned plyne (prakticky hned z definice), že limitou naší posloupnosti je také  $+\infty$ .  $\triangle$

## 2.8 Příklady

V této podkapitole vypočteme několik základních limit, které se často hodí znát při výpočtech. V předešlé části textu jsme totiž odvodili několik vět, které však v podstatě nelze použít, neznáme-li limity aspoň některých jednoduchých posloupností.

Připomeňme, že hned po zavedení pojmu limity posloupnosti jsme si prakticky odvodili nejelementárnější limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Přistupme nyní k dalším příkladům.

**Příklad:** Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme  $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ . Z jedné strany platí  $h_n \geq 0$  pro každé  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Z binomické věty dostaneme pro  $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro  $n \geq 2$  platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro  $n \geq 2$  je výraz  $\frac{n(n-1)}{2}$  kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti  $h_n$  poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ .  $\triangle$

**Příklad:** Pro každé  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- Příklad  $a \geq 1$ : Pro každé celé  $n > a$  platí

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

- Příklad  $0 < a < 1$ : Z předchozí bodu plyne  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$ , tudíž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1. \quad \triangle$$

**Příklad:** Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém“ pořadí:

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \\ &= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdots (n \cdot 1) = \\ &= \prod_{k=1}^n k(n+1-k) \end{aligned}$$



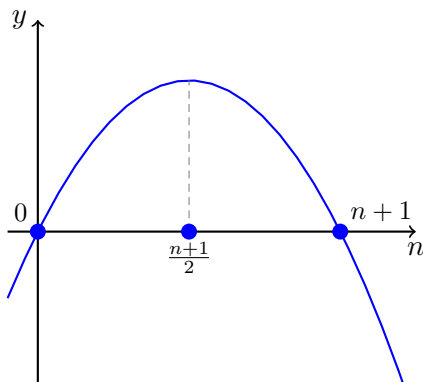
Z grafu paraboly  $f(x) = x(n+1-x)$  je zřejmé (vizte obrázek č. 2.7), že

$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n$$

a proto  $(n!)^2 \geq n^n$ . Konečně,  $2n$ -tá odmocnina dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$

△



Obrázek 2.7: Ilustrace k výpočtu příkladu výpočtu limity posloupnosti  $\sqrt[n]{n!}$ .

**Příklad (!!!):** Necht  $a \in \mathbb{R}$ . Pak pro limitu reálné posloupnosti  $(a^n)$  platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje,} & a \leq -1. \end{cases}$$

- Jednoduché případy: Pokud  $a = 0$  nebo  $a = 1$ , pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro  $a = -1$  jsme již ukázali, že limita  $((-1)^n)$  neexistuje.
- Necht  $0 < |a| < 1$ . Platí

$$|a^{n+1}| = |a^n| \cdot |a| < |a^n|.$$

Posloupnost  $(|a^n|)$  je tedy klesající a omezená,  $0 < |a^n| < |a|$ . Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a^n|$ .

Posloupnost  $(|a^{n+1}|)$  je vybraná z  $(|a^n|)$  a proto mají stejnou limitu. Koněčně

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a^{n+1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a| \cdot |a^n| = |a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na  $a$  odtud nutně plyne rovnost  $L = 0$ .

- Příklad  $a > 1$ : Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že  $(a^n)$  je rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ . Protože posloupnost roste, musí nutně být  $L > a$ . Navíc platí

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = a \cdot L.$$

Protože ale  $L > a > 1$  může tato nerovnost platit pouze v případě  $L = +\infty$ .

- Příklad  $a < -1$ : Pro vybranou posloupnost  $(a^{2n}) = ((a^2)^n)$  nyní podle předchozího bodu platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} = +\infty$ , protože  $a^2 > 1$ .

Limitu vybrané posloupnosti  $(a^{2n+1})$  snadno spočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ , tedy neexistuje.  $\triangle$

Shrňme si doposud odvozené limity v tabulce č. 2.1.

## 2.9 Rekurentně zadané posloupnosti

Doposud jsme se v příkladech setkávali pouze s explicitně zadanými posloupnostmi, tj. pro dané  $n$  bylo  $a_n$  explicitně dáno pomocí vzorce obsahujícího pouze  $n$ . Pokud je  $n$ -tý člen posloupnosti zadán pomocí předcházejících členů, nazýváme danou posloupnost **rekurentní**. Rekurentní posloupnost nemusí být možné převést na explicitně zadanou. Na rekurentní posloupnosti narazíme velmi často, např. Newtonova metoda, o které budeme mluvit později, nám dává rekurentní posloupnost aproximující řešení rovnic tvaru  $f(x) = 0$ .

**Příklad (Fibonacci):** Jednou z nejznámějších rekurentně zadaných posloupností je Fibonacciho posloupnost  $(F_n)_{n=1}^\infty$  definovaná předpisem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad F_1 = F_2 = 1. \quad \triangle$$

posloupnost	limita
$(n^a)$	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$(\sqrt[n]{n})$	1
$(\sqrt[n]{a})$ pro $a > 0$	1
$(\sqrt[n]{n!})$	$+\infty$
$(a^n)$	$\begin{cases} 0, &  a  < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje,} & a \leq -1. \end{cases}$

Tabulka 2.1: Známé posloupnosti a jejich limity.

**Příklad:** Uvažme posloupnost  $(a_n)$  definovanou předpisem

$$a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \quad \text{pro } n = 2, 3, 4, \dots$$

Nejprve si všimněme, že kdyby limita posloupnosti existovala (označme ji  $a$ ), pak z definičního vztahu plyne

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n + 2} = \sqrt{a + 2}.$$

Tento vztah je v  $\overline{\mathbb{R}}_+$  splněn buď pro  $a = 2$  nebo  $a = +\infty$ . První možnost by nastala v případě omezenosti, druhá v případě neomezenosti, posloupnosti  $(a_n)$ .

Pokusme se nejprve ukázat, že  $(a_n)$  je monotónní. Zřejmě  $a_n > 0$ ,  $n \geq 1$ , a tedy

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} &\iff a_n^2 < a_n + 2 &\iff 0 < (2 - a_n)(a_n + 1) \\ &\iff a_n < 2. \end{aligned}$$

Posloupnost roste, právě když  $a_n < 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tuto nerovnost můžeme dokázat matematickou indukcí:

1. Pro  $n = 1$ :  $a_n = 1 < 2$  platí z definice.

2. Předpokládejme, že pro pevné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , platí  $a_n < 2$ : Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \stackrel{\text{I.P.}}{<} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Ukázali jsme, že posloupnost  $(a_n)$  je rostoucí a shora omezená. Má tedy konečnou limitu, která je nutně rovna číslu 2.  $\triangle$

Studiem rekurentních posloupností se podrobněji zabývá předmět BI-ZDM. Pro některé typy rekurentních posloupností (např. lineárních s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou) existují algoritmy na jejich řešení (tj. explicitní vyjádření). My se s rekurentní posloupností setkáme při studiu složitosti algoritmu *quick sort* v kapitole 9.2.

## 2.10 Číselné řady

V této části se budeme zabývat speciálním typem číselných posloupností, číselnými řadami. Řady vznikají postupným sčítáním členů zadané posloupnosti. Začneme nejprve definicí.

**Definice 40:** Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots,$$

kde  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  je zadaná číselná posloupnost, nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě. Součtem konvergentní řady  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nazýváme hodnotu limity  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

Konvergence řady se zachová, změníme-li konečný počet členů řady. Speciálně konvergence řady  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  je ekvivalentní konvergenci řady  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  pro libovolně zvolené  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

**Poznámka:** Je důležité rozlišovat mezi pojmy „posloupnost“ a „řada“. Častou chybou je pletení a nepochopení těchto pojmů. Například posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n = n^2$  je dobré si představovat jako sérii po sobě jdoucích čísel

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

a řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pro stejnou posloupnost  $(a_n)$  jako sérii po sobě jdoucích čísel

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots$$

**Příklad:** Pro  $|q| < 1$  řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad (2.4)$$

konverguje. Skutečně, členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (2.5)$$

Takže  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$ . V závislosti na  $q$  proto součet můžeme vyjádřit následovně

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

Poznamenejme, že z rovnice (2.5) také plyne divergence řady (2.4) pro  $q > 1$  nebo  $q \leq -1$ . Pokud  $q = 1$ , pak lze také snadno ověřit, že diverguje.  $\triangle$

O některých řadách můžeme rovnou rozhodnout, že divergují, aniž bychom složité zkoumali jejich částečné součty. Máme totiž k dispozici následující větu.

**Věta 41** (Nutná podmínka konvergence): Pokud řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konverguje, potom pro limitu sčítanců platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

*Důkaz.* Označme  $S \in \mathbb{R}$  součet naší konvergentní řady a  $(s_n)$  posloupnost jejích částečných součtů. Pro libovolné kladné celé  $n$  platí

$$0 \leq |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  dostáváme z věty o sevřené posloupnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\square$

**Příklad:** Předchozí větu používáme k vyvrácení konvergence. Věta vlastně říká, že pokud posloupnost sčítanců nekonverguje k nule (nebo vůbec nemá limitu), pak příslušná řada diverguje. Například o řadách

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k+3},$$

můžeme ihned tvrdit, že divergují, protože (popořadě)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{k} = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^k \text{ neexistuje,} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+2}{k+3} = 1. \quad \triangle$$

Podmínka v předchozí větě je pouze nutná. Pokud sčítanci konvergují k nule, tak stále nemůžeme tvrdit, že řada konverguje. To nám ukazuje následující příklad.

**Příklad:** Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy  $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ , pro  $k = 1, 2, \dots$ . Víme již, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty  $(s_n)$  platí

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ . Zkoumaná řada diverguje.  $\triangle$

K odvození dalších kritérií pro testování konvergence řad budeme opět potřebovat Bolzanovo-Cauchyovo kritérium.

**Věta 42** (Bolzano-Cauchy): Řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konverguje právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{R}$  tak, že pro každé  $n \geq n_0$  a  $p \in \mathbb{N}$  platí

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

*Důkaz.* Jedná se pouze o použití Bolzanova-Cauchyova kritéria konvergence na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů.  $\square$

Všimněte si, že má-li řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nezáporné členy, pak je posloupnost jejích částečných součtů monotónní. Víme tedy, že tato řada buď konverguje, nebo je limita jejích částečných součtů rovna  $+\infty$ . Máme-li řadu  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  s členy různých znamének, pak je přirozené ptát se, v jakém vztahu je její konvergence vzhledem k řadě  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ , která má už nezáporné členy.

**Definice 43:** Řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konverguje.

**Věta 44:** Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

*Důkaz.* Použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéria pro konvergenci řady. Bud'  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolutně konvergentní řada. Potom pro  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro každé  $n \geq n_0$  a  $p \in \mathbb{N}$  je

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  tedy konverguje. □

Poznamenejme, že řady které jsou konvergentní, ale nejsou absolutně konvergentní, jsou citlivé na změnu pořadí sčítání členů. Jinak řečeno, u absolutně konvergentní řady nezáleží na pořadí, v jakém členy sčítáme, výsledek bude vždy stejný. Tak tomu ale není u řad které konvergují neabsolutně.

**Věta 45** (Leibniz<sup>4</sup>): Bud'  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  monotónní posloupnost s nezápornými členy konvergující k nule. Potom je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergentní.

*Důkaz.* Důkaz Leibnizova kritéria vynecháváme. Plyne z Dirichletova kritéria, které jsme si ani nevyslovili, natož dokázali. □

**Příklad:** Příkladem konvergentní řady, která ale není absolutně konvergentní je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Skutečně, tato řada konverguje podle Leibnizova kritéria, protože posloupnost  $(1/k)$  má kladné členy a monotónně konverguje k nule. Řada z absolutních hodnot členů je  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  o které již víme, že diverguje. △

Kritéria, která dále vyslovíme, jsou prakticky použitelná k ověřování absolutní konvergence řad. Začneme nejprve srovnávacím kritériem.

**Věta 46** (Srovnávací kritérium): Nechť pro každé  $k \in \mathbb{N}$  platí odhad  $0 \leq |a_k| \leq b_k$  a nechť řada  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konverguje. Potom řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolutně konverguje.

---

<sup>4</sup>Gottfried Leibniz, německý matematik, 1646 – 1716.

*Důkaz.* Opět použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu věty 44. Tvzení opět plyne z odhadu založeném na trojúhelníkové nerovnosti,

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots b_{n+p}. \quad \square$$

Již víme, že řada  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konverguje pro  $|q| < 1$ . Tohoto faktu s výhodou využijeme v důkazu následující věty.

**Věta 47** (d'Alembertovo<sup>5</sup> kritérium): Budte  $a_k > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Pokud pro všechna  $k \in \mathbb{N}$  od jistého  $n_0 \in \mathbb{N}$  platí odhad

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1,$$

pak řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (absolutně) konverguje.

*Důkaz.* Necht' tedy pro každé  $k \geq k_0$  platí odhad  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$ . Odtud nahlédneme, že pro každé  $k \geq k_0$  platí

$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Už ale víme, že řada  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konverguje pro  $|q| < 1$ . Podle srovnávacího kritéria tedy konverguje i řada  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .  $\square$

**Poznámka:** K splnění podmínky d'Alembertova kritéria například stačí, když

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q < 1.$$

Dále poznamenejme, že pokud všechna  $a_k$  jsou kladná a

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q > 1 \tag{2.6}$$

pro  $k \geq k_0$ , potom řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence. Skutečně, podle podílového kritéria pro posloupnosti pak totiž platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = +\infty$ . K splnění podmínky (2.6) stačí, aby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

---

<sup>5</sup>Jean d'Alembert, francouzský matematik, 1717 – 1783.



Poznamenejme, že d'Alembertovo kritérium zdaleka není všemocné. Například o řadě  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  víme, že diverguje. Ovšem pro limitu podílů platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1.$$

D'Alembertovo kritérium tedy o konvergenci, resp. divergenci, této konkrétní řady **nerozhodne**. Existují další kritéria pro vyšetřování konvergence číselných řad (Cauchyovo, Gaussovo, a další). V další části přednášky odvodíme ještě integrální kritérium.

Přístupme nyní k první zajímavé aplikaci číselných řad. Pomocí číselné řady můžeme dát přirozený význam nekonečnému desetinnému číselnému rozvoji.

**Příklad** (Desetinný rozvoj): Buď  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny  $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$ . Potom klademe

$$0.a_1a_2a_3 \dots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo. Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

a řada  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$  konverguje. △

## 2.11 Eulerovo číslo

Eulerovo<sup>6</sup> číslo je jedna z nejdůležitějších matematických konstant. V této kapitole budeme Eulerovo číslo nejprve definovat jako součet jisté číselné řady a poté se budeme věnovat dalším způsobům jeho výpočtu a vlastnostem.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Jedná se o řadu nezáporných členů pro jejichž podíly platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$$

<sup>6</sup>Leonhard Euler, švýcarský matematik, 1707 – 1783.

Podle d'Alembertova kritéria proto řada konverguje.

**Poznámka:** Konvergenci této řady můžeme ukázat i přímo (z definice). Posloupnost jejích částečných součtů<sup>7</sup>

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

je monotónní a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Tímto postupem získáváme i horní odhad hodnoty její limity. Součet zkoumané řady tedy leží mezi čísly 1 a 3.

**Definice 48** (Eulerovo číslo): Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

konverguje, její součet značíme  $e$  a nazýváme **Eulerovým číslem**.

Při výpočtech limit často narazíme na potřebu vypočítat limitu posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2.7)$$

Všimněte si, že na ní nelze použít žádnou z dosud probíraných vět na výpočet limity. Nejedná se o součin/podíl/odmocninu z žádných známých limit.

**Lemma 49:** Posloupnost  $(a_n)$  konverguje a její limita je  $e$ . Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**Poznámka** (Častá chyba): Pozor, ačkoliv v limitě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (2.8)$$

výraz v závorce konverguje k 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ , a konstantní posloupnost  $1^n = 1$  konverguje k 1, **není limita (2.8) rovna 1!**

<sup>7</sup>Do konce této podkapitoly bude symbol  $s_n$  vyhrazen pro tento součet.

*Důkaz.* Pomocí binomické věty a úpravou kombinačních čísel upravíme<sup>8</sup> výraz pro  $a_n$ ,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Odtud ihned plyne odhad  $a_n < s_n < 3$ . Dále lze výraz výše odhadnout následovně

$$a_n < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) = a_{n+1}.$$

Při odhadu jsme zvětšili každý výraz v závorce a přidali jeden kladný člen. Posloupnost  $(a_n)$  je tedy monotónní a omezená. Označme její limitu  $a$ .

Pro  $m > n$  máme odhad

$$a_m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right)$$

Odtud limitním přechodem  $m \rightarrow \infty$  dostáváme nerovnost

$$a \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = s_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uzavíráme, že pro každé  $n$  platí nerovnost

$$a_n < s_n \leq a.$$

Podle věty o limitě sevřené posloupnosti získáváme kýženou rovnost  $a = e$ . Tím je důkaz lemmatu dokončen.  $\square$

Uvažme dále posloupnost

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (2.9)$$

Protože platí rovnost

$$b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

---

<sup>8</sup>Pro  $m < n$  se standardně klade

$$\prod_{k=n}^m \alpha_k = 1.$$

je limita posloupnosti  $(b_n)$  také rovna  $e$ . Ukážme, že posloupnost  $(b_n)$  je klesající. Pro každé  $n$  by tedy mělo platit

$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n. \quad (2.10)$$

Po vynásobení kladným číslem  $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$  je tato nerovnost ekvivalentní

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < \left(\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}\right)^{n+1}.$$

Upravíme pravou stranu této nerovnosti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{(n+2)n}\right)^{n+1} = \\ &= 1 + \frac{n+1}{(n+2)n} + \text{další členy binomické formule.} \end{aligned}$$

Ukážeme-li

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) < 1 + \frac{n+1}{(n+2)n}$$

budeme hotovi. Protože  $\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$ , dostáváme nerovnost

$$\frac{1}{n+1} < \frac{n+1}{(n+2)n},$$

což je ekvivalentní

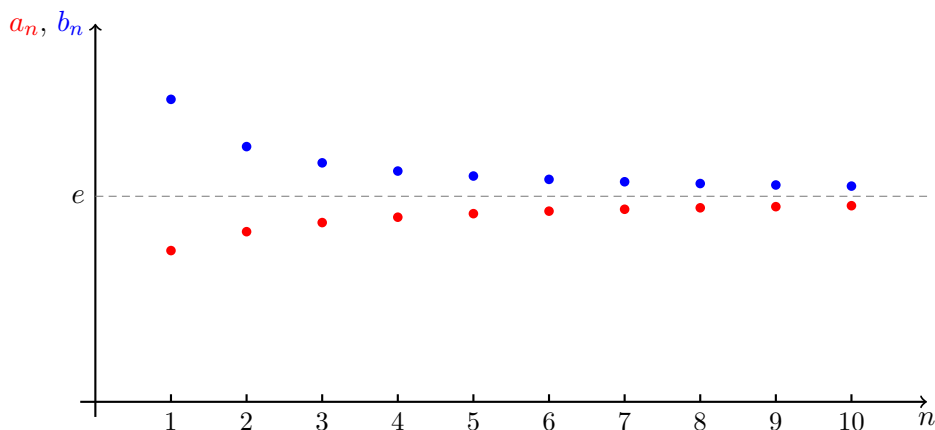
$$n(n+2) < (n+1)^2.$$

To však zřejmě platí, čímž je nerovnost (2.10) dokázána a  $(b_n)$  je tedy klesající.

Z vlastností posloupností  $(a_n)$  a  $(b_n)$  je zřejmé, že nerovnosti

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

platí pro každé kladné přirozené  $n$ . Jinak řečeno  $e \in (a_n, b_n)$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Tato vlastnost nám umožňuje získat přibližnou hodnotu čísla  $e$  a **znát chybu**, které se dopustíme nahradíme-li  $e$  hodnotou některého členu  $a_n$ , či  $b_n$  pro konkrétní  $n$ . Grafické znázornění a tabulku hodnot prvních několika členů naleznete na obrázku č. 2.8 a v tabulce č. 2.2.

Obrázek 2.8: Poslopnosti  $(a_n)$  a  $(b_n)$  z rovnic (2.7) a (2.9).

**Poznámka** (Rychlost konvergence  $(a_n)$  a  $(b_n)$  k  $e$ ): Pro délku intervalu  $(a_n, b_n)$  platí

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) \cdot b_n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot b_n > \\ &> \frac{e}{n+1} > \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy ani po výpočtu  $a_{1000}$  a  $b_{1000}$  neznáme cifru na **třetím** místě za desetinnou čárkou v Eulerově čísle  $e$ .

**Lemma 50** (Odhad chyby při výpočtu  $e$  pomocí řady): Pro rozdíl  $e$  od  $s_n$  (definice pomocí řady) platí

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{pro } n \geq 1.$$

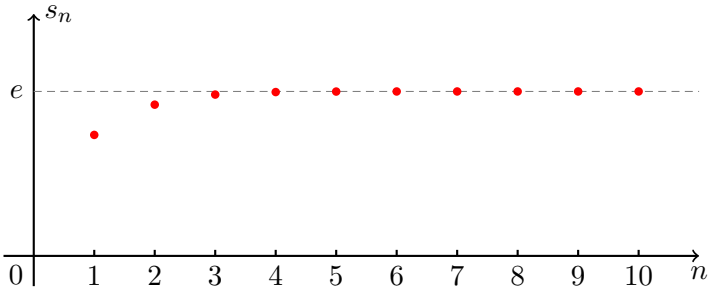
*Důkaz.* Pro  $n \geq 1$  platí odhad

$$e - s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k!} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{2^{k-1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pro  $k \geq 2$  je totiž  $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ . □

$n$	$a_n$	$b_n$
1	2.0000000	4.0000000
2	2.2500000	3.3750000
3	2.3703704	3.1604938
4	2.4414062	3.0517578
5	2.4883200	2.9859840
6	2.5216264	2.9418974
7	2.5464997	2.9102854
8	2.5657845	2.8865076
9	2.5811748	2.8679720
10	2.5937425	2.8531167

Tabulka 2.2: Členy posloupností  $(a_n)$  a  $(b_n)$  s přesností na osm cifer. Vidíme, že posloupnosti nekonvergují k  $e$  příliš rychle ( $e \approx 2.7182818$ ).



Obrázek 2.9: Grafické znázornění posloupnosti  $(s_n)$ .

**Příklad:** Vypočtěte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ . Protože

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{d_n :=}$$

$n$	$s_n$
1	2.0000000
2	2.5000000
3	2.6666667
4	2.7083333
5	2.7166667
6	2.7180556
7	2.7182540
8	2.7182788
9	2.7182815
10	2.7182818

Tabulka 2.3: Prvních deset členů posloupnosti  $s_n$ . Výpočet je proveden s přesností na 8 cifer.

a posloupnost  $(d_n)$  je vybraná z posloupnosti  $(a_n)$  která konverguje k  $e$ , platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{d_n} = \sqrt{e}. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ . Nejprve upravme výraz

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

Posloupnost v jmenovateli prvního zlomku je opět vybraná z  $(a_n)$  a tudíž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \cdot 1 = e^{-1}. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ . Výraz upravíme následovně,

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)\right)^{\frac{n}{3}}}_{d_n := \frac{n}{3}}^3.$$

Posloupnost  $(d_n)$  **není** vybraná za naší  $(a_n)$ . Úplně stejně jako o  $(a_n)$  však můžeme i o  $(d_n)$  ukázat, že je rostoucí. Tudíž má limitu. Ovšem nyní  $(a_n)$  je vybraná z  $(d_n)$ ,  $d_{3n} = a_n$ . Takže limita  $(d_n)$  je  $e$ . Uzavíráme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3. \quad \triangle$$

**Poznámka:** Z předchozích příkladů by mělo být zřejmé, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}},$$

pro  $p \in \mathbb{Z}$  a  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 1$ .

## 2.12 Obecná mocnina a exponenciální funkce

V této kapitole ukážeme jak, pomocí limit posloupností definovat obecnou mocninu. Definice nám přímo dává návod, jak hodnotu obecné mocniny počítat.

Připomeňme, že pro  $a \in \mathbb{R}$  a kladné  $n \in \mathbb{N}$  definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Při této definici platí

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{a} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

pro kladná  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Ukažme si nejprve, jak definici mocniny rozšířit na racionální exponenty:

1. Klademe  $a^0 := 1$ .

2. Pro  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \leq -1$  a  $a \neq 0$ , definujeme  $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$ .



3. Je-li  $q \in \mathbb{N}$  a  $a > 0$  položíme  $a^{\frac{1}{q}} := b$ , kde  $b^q = a$ ,  $b > 0$  (takové  $b$  existuje zřejmě právě jedno).

4. Konečně, pro  $p \in \mathbb{Z}$ , kladné  $q \in \mathbb{N}$  a  $a > 0$  klademe

$$a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Stále platí pravidla  $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$  a  $(a^r)^s = a^{rs}$  pro  $a > 0$ ,  $r, s \in \mathbb{Q}$ . Zbývá ukázat, jak definovat  $a^x$  pro iracionální  $x$ .

**Lemma 51:** Pro dané iracionální  $x$  existují posloupnosti  $(\alpha_n)$  a  $(\beta_n)$  takové, že  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\alpha_n)$  je rostoucí,  $(\beta_n)$  je klesající a obě mají limitu  $x$ .

*Důkaz.* Posloupnosti požadovaných vlastností zřejmě zkonstruujeme jako kraje smřšťujících se uzavřených intervalů obsahujících  $x$ . Vizte diskuzi o axiomu úplnosti.  $\square$

**Definice 52:** Pro iracionální  $x$  a  $a > 0$  položíme

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\beta_n},$$

kde  $(\alpha_n)$  a  $(\beta_n)$  jsou posloupnosti z předchozího Lemmatu.

**Poznámka** (Korektnost definice): Všimněte si, že pro racionální  $r$  a  $s$  splňující  $r < s$  a kladné  $a > 1$  platí

$$a^r \leq a^s.$$

Odtud plyne, že  $(a^{\alpha_n})$  je rostoucí,  $(a^{\beta_n})$  je klesající a platí  $a^{\alpha_n} \leq a^{\beta_n}$  pro každé  $n$ . Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existují konečné limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\beta_n}.$$

Dále lze ukázat, že tyto limity jsou shodné a nezávisí na volbě posloupností  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$ . Příklad  $a < 1$  se ověří podobně.

**Poznámka:** Pro  $a > 0$  je funkce  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  daná předpisem  $f_a(x) := a^x$  s  $D_{f_a} = \mathbb{R}$

- rostoucí pokud  $a > 1$ ,
- klesající pokud  $0 < a < 1$ ,
- konstantní pokud  $a = 1$ .

Vyjma posledního případu je  $H_f = (0, +\infty)$ . Stále platí  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$  a  $(a^x)^y = a^{xy}$ .

**Věta 53:** Nechť posloupnost  $(b_n)$  konverguje k  $b \in \mathbb{R}$  a nechť  $a > 0$ . Potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{b_n} = a^b.$$

Nechť posloupnost kladných čísel  $(a_n)$  konverguje k  $a \in \mathbb{R}^+$  a  $b \in \mathbb{R}$ . Potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^b = a^b.$$

*Důkaz.* K důkazu staří použít definici obecné mocniny. Vzhledem k technické náročnosti tento důkaz vynecháváme.  $\square$

**Příklad:** Například platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{3+\frac{1}{n}} = 2^3,$$

nebo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^\pi = 2^\pi. \quad \triangle$$

**Definice 54:** Buď  $0 < a \neq 1$ , pak inverzní funkci k funkci  $f_a$  nazýváme **logaritmem o základu  $a$**  a značíme  $\log_a$ . Platí

- $D_{\log_a} = (0, +\infty)$ ,  $H_{\log_a} = \mathbb{R}$ ,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ,  $x, y > 0$ ,
- $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$ ,  $x > 0$  a  $y \in \mathbb{R}$ .

**Věta 55:** Pro  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  a posloupnost  $(b_n)$  kladných čísel konvergující k  $b \in \mathbb{R}^+$  platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a b_n = \log_a b.$$

*Důkaz.* Jedná se o důsledek věty č. 53, jejíž důkaz jsme však vynechali. Podobně vynecháváme i důkaz tohoto tvrzení.  $\square$

**Příklad:** Například platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right) = \ln \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3} = \ln \frac{1}{2}. \quad \triangle$$

**Definice 56:** Funkci  $x \mapsto e^x$  nazýváme **exponenciální funkcí**, logaritmus o základu  $e$  nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme  $\ln = \log_e$ .

**Poznámka:** Exponenciální funkce a přirozený logaritmus jsou jedny z nejdůležitějších funkcí vůbec. Všimněte si, že přímo z jejich definice plyne pro  $a > 0$  důležitý vztah  $a = e^{\ln a}$  a proto

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

**Věta 57:** Je-li  $(a_n)$  posloupnost splňující  $\lim |a_n| = +\infty$ , pak

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

**Důsledek 58:** Pro reálné  $x \in \mathbb{R}$  platí  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ .

*Důkaz.* Pro  $x = 0$  je tvrzení zřejmé. Pokud  $x \neq 0$ , pak

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x,$$

protože  $\lim \left|\frac{n}{x}\right| = +\infty$ . □

# Kapitola č. 3

## Limita a spojitost funkce

Limita funkce; jednostranná limita funkce; Heineho věta; výpočet limity; limita složené funkce; příklady; spojitost funkce v bodě; věty o spojitosti funkce; spojitost funkce na intervalu; metoda půlení intervalu.

### 3.1 Limita funkce

U posloupnosti  $(a_n)$  jsme zkoumali, jak se chovají její členy pro velká  $n$ . Pokud se její členy „blížily“ k jistému  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ , pak jsme tuto hodnotu nazývali limitou této posloupnosti. Význam slova „blížit“ přesně popisovala definice 22, která říkala, že v každém okolí bodu  $\alpha$  leží všechny členy posloupnosti  $(a_n)$  až na konečný počet výjimek.

Nyní u funkcí se můžeme ptát, jak se zadaná funkce  $f$  chová, když se nezávisle proměnná  $x$  blíží k zadanému bodu  $a \in D_f$ , případně  $\pm\infty$ . V následující definici limity funkce si všimněte podobnosti s definicí limity posloupnosti.

**Definice 59:** Buďte  $f$  reálná funkce reálné proměnné a  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Necht  $f$  je definovaná na okolí bodu  $a$ , s možnou výjimkou bodu  $a$  samotného. Řekneme, že  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  je **limitou funkce  $f$  v bodě  $a$** , právě když pro každé okolí  $H_c$  bodu  $c$  existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  takové, že z podmínky

$$x \in H_a \setminus \{a\}$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \quad \lim_a f = c.$$

**Poznámka** ( $\varepsilon$ - $\delta$  definice limity): V případě kdy  $a$  i  $c$  jsou prvky  $\mathbb{R}$  je podmínka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  ekvivalentní požadavku:

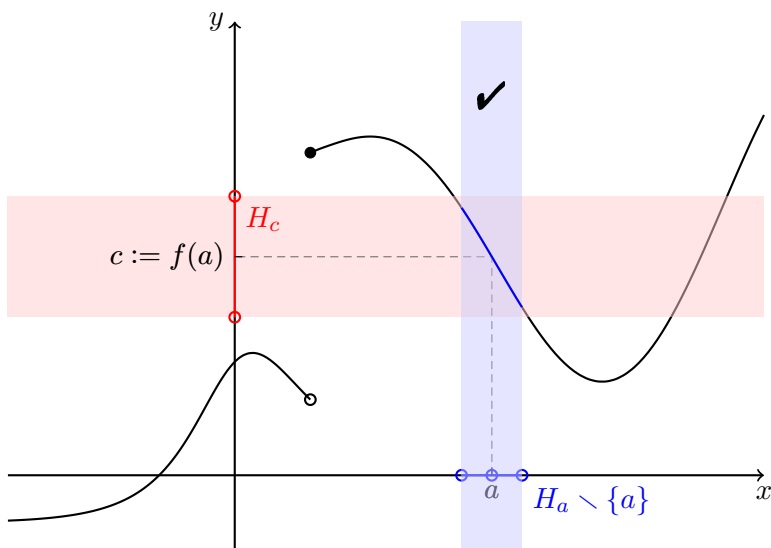
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Analogické formule lze zformulovat pro různé kombinace případů  $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Hodnota limity funkce  $f$  v bodě  $a$  závisí pouze na chování funkce  $f$  na okolí bodu  $a$  **mimo** bod  $a$ . Limita funkce  $f$  v bodě  $a$  může být různá od funkční hodnoty  $f(a)$ . Příkladem budiž funkce  $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$ ,  $D_f := \mathbb{R}$ , ačkoliv pro funkční hodnotu platí  $f(0) = 0$ , pro limitu máme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

Funkce  $f$  v bodě  $a$  ani nemusí být definovaná, přesto limita může existovat. Příkladem je funkce  $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$ ,  $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ačkoliv  $0$  nepatří do  $D_f$  platí  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

K snazšímu představení si požadavků v definici 59 uvádíme obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Limita funkce.

V definici 59 jsme se dívali na chování funkce  $f$  na celém okolí bodu  $a$  (vyjma bodu  $a$  samotného). Podobně můžeme zkoumat chování funkce pouze vpravo, či vlevo, od zadaného bodu  $a$ . Získáváme tak pojem limity funkce zprava, či zleva.

**Definice 60:** Buďte  $f$  reálná funkce reálné proměnné a  $a \in \mathbb{R}$ . Necht  $f$  je definovaná na levém, resp. pravém, okolí bodu  $a$ . Řekneme, že  $c \in \mathbb{R}$  je **limitou funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva, resp. zprava**, právě když pro každé okolí  $H_c$  bodu  $c$  existuje levé okolí  $H_a^-$ , resp. pravé okolí  $H_a^+$ , bodu  $a$  takové, že z podmínky

$$x \in H_a^- \setminus \{a\}, \text{ resp. } x \in H_a^+ \setminus \{a\},$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

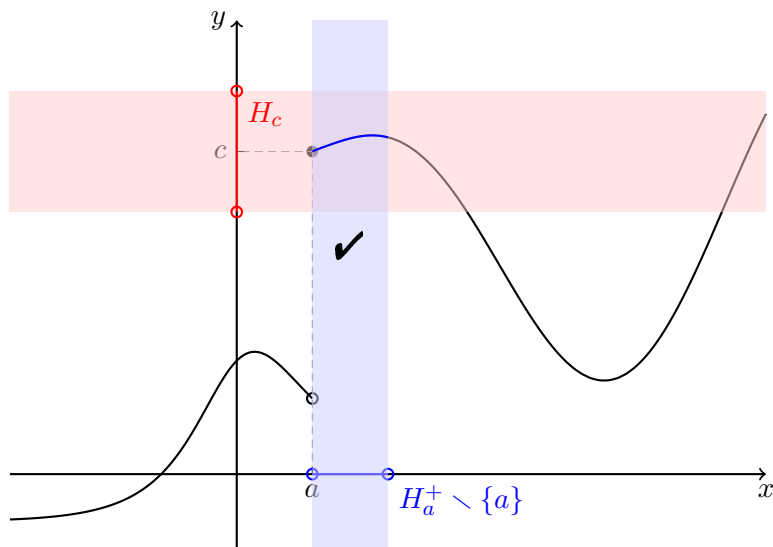
Zapisujeme

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c, \quad \lim_{a-} f = c,$$

resp.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c, \quad \lim_{a+} f = c.$$

Pro lepší představu odkazujeme čtenáře na obrázek 3.2. Na závěr této podkapitoly uvedme několik příkladů výpočtů limit jednoduchých funkcí.



Obrázek 3.2: Jednostranná limita funkce.

**Příklad:** Limita konstantní funkce je rovna dané konstantě. Je-li  $c \in \mathbb{R}$  zadaná konstanta a  $f(x) = c$  pro každé  $x \in D_f = \mathbb{R}$ , pak pro libovolný bod  $a \in \mathbb{R}$  platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ . Skutečně, buď  $H_c(\varepsilon)$  libovolné okolí bodu  $c$  s poloměrem  $\varepsilon > 0$ . V případě naší konstantní funkce můžeme zvolit libovolné okolí  $H_a(\delta)$  bodu  $a$  s poloměrem  $\delta > 0$ . Pak totiž pro  $x \in H_a(\delta) \setminus \{a\}$  jistě platí  $f(x) = c \in H_c(\varepsilon)$ .  $\triangle$

**Příklad:** Pro libovolné  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

Skutečně, vezmeme-li libovolné okolí  $H_a$  bodu  $a$  pak pro  $x \in H_a \setminus \{a\}$  zcela jistě platí, že  $x \in H_a$ . △

**Příklad:** Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Skutečně, buď  $H_{+\infty}(c)$  libovolné okolí bodu  $+\infty$  a  $c > 0$ . Hledáme okolí  $H_0(\delta)$  bodu 0 o poloměru  $\delta > 0$  takové, že pokud  $x \in H_0(\delta) \setminus \{0\}$  pak  $\frac{1}{x^2} \in H_{+\infty}(c)$ . Požadujeme tedy aby

$$\frac{1}{x^2} > c \Rightarrow x^2 < \frac{1}{c} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Stačí proto zvolit třeba  $\delta := \frac{1}{\sqrt{c}}$ . △

**Příklad:** Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ukažme nejprve první z limit. Buď  $H_{+\infty}(c)$  libovolné okolí bodu  $+\infty$  dané konstantou  $c > 0$ . Zvolíme-li  $\delta = \frac{1}{c} > 0$ , pak pro  $x \in (0, \delta) = H_0^+(\delta) \setminus \{0\}$  platí

$$0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = c.$$

Podobně v druhém příkladě pro libovolné okolí  $H_{-\infty}(c)$  bodu  $-\infty$  zadané konstantou  $c < 0$  stačí položit  $\delta = \frac{1}{|c|} > 0$ . Pak pro libovolné  $x \in H_0^-(\delta) \setminus \{0\} = (-\delta, 0)$  platí

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -|c| = c.$$

Vzpomeňte, že  $c < 0$ . Na tomto místě je dobré si připomenout graf hyperboly  $y = \frac{1}{x}$ . △

## 3.2 Vlastnosti limit

Při výpočtu limit posloupností často nevyužíváme přímo definici, ale znalost několika základních limit, vizte předchozí kapitolu. Znalosti těchto základních limit lze využívat při výpočtu limit složitějších funkcí. Podobně tomu bylo i u posloupností. Ukažme si tedy, jak s limitami funkcí pracovat.

Nejprve si rozmysleme, jaký je vztah mezi jednostrannými a oboustrannými limitami.

**Věta 61:** Nechť  $a \in \mathbb{R}$ . Limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existuje a je rovna  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ , právě když existují obě jednostranné limity  $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x)$  a obě jsou rovny  $c$ .

*Důkaz.* K důkazu si stačí rozmyslet obě implikace.

- Nechť existuje oboustranná limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ . Je-li  $H_c$  libovolné okolí bodu  $c$ , pak existuje  $H_a$  okolí bodu  $a$  takové, že je-li  $x \in H_a \setminus \{a\}$ , pak  $f(x) \in H_c$ . Tudíž pro  $x \in H_a^\pm \setminus \{a\}$  je  $f(x) \in H_c$ . Jednostranné limity  $\lim_{x \rightarrow a_\pm} f(x)$  proto obě existují a obě jsou rovny  $c$ .
- Naopak. Nechť obě jednostranné limity existují a obě jsou rovny  $c$ . Buď  $H_c$  libovolné okolí bodu  $c$ . Pak existuje levé okolí  $H_a^-(\varepsilon_1)$  bodu  $a$  a pravé okolí  $H_a^+(\varepsilon_2)$  bodu  $a$  tak, že pokud  $x \in H_a^-(\varepsilon_1) \setminus \{a\}$  nebo  $x \in H_a^+(\varepsilon_2) \setminus \{a\}$ , pak  $f(x) \in H_c$ . Položíme-li  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , pak pro  $x \in H_a(\varepsilon) \setminus \{a\}$  platí  $f(x) \in H_c$ . Oboustranná limita funkce  $f$  v bodě  $a$  tedy existuje je rovna  $c$ .  $\square$

Předešlou větu často využíváme na vyvracení existence oboustranné limity. Přesněji formulujeme následující tvrzení.

**Důsledek 62:** Nechť  $f$  je funkce a bod  $a \in \mathbb{R}$ . Platí-li aspoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce  $f$  v bodě  $a$  existují a jsou různé,
- aspoň jedna z jednostranných limit funkce  $f$  v bodě  $a$  neexistuje,

potom limita funkce  $f$  v bodě  $a$  neexistuje.

**Příklad:** Limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje. Skutečně, pro jednostranné limity platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_+} \operatorname{sgn} x &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0_-} \operatorname{sgn} x &= -1. \end{aligned}$$

Podle předchozího důsledku oboustranná limita nemůže existovat ( $1 \neq -1$ ). Na tomto místě je vhodné si připomenout graf funkce  $\operatorname{sgn} x$ !  $\triangle$

**Příklad:** Limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$



neexistuje. Opravdu, na konci předešlé podkapitoly jsme odvodili, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \quad \triangle$$

Další věta nám ukazuje, jak souvisí pojmy „limita posloupnosti“ a „limita funkce“. Díky této větě můžeme některé limity posloupností počítat pomocí znalosti limity funkcí. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že na limity funkcí můžeme použít nástroje diferenciálního počtu (jako například l'Hospitalovo pravidlo), které pro posloupnosti nemáme k dispozici.

**Věta 63** (Heine):  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ , právě když je  $f$  definována na okolí bodu  $a$  (s možnou výjimkou bodu  $a$ ) a pro každou posloupnost  $(x_n)$  s limitou  $a$  a splňující  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .

Důkaz této věty vynecháváme. Implikace v jednom směru je snadná (rozmyslete která), druhá je již komplikovanější. Po drobné modifikaci platí Heineho věta i pro jednostranné limity.

**Věta 64** (Heine pro jednostranné limity):  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$ , právě když je  $f$  definována na levém, resp. pravém, okolí bodu  $a$  a pro každou posloupnost  $(x_n)$  s limitou  $a$  a splňující

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (-\infty, a), \quad \text{resp.} \quad \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (a, +\infty),$$

platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .

Díky Heineho větě můžeme odvodit následující veledůležitou limitu.

**Příklad:** Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Použijme Heineho větu. Funkce

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

je definována na jistém okolí bodu 0 s výjimkou bodu 0 samotného, např. na

$$H_0(1) \setminus \{0\} = (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Buď  $(x_n)$  libovolná posloupnost patřící do  $(-1, 1) \setminus \{0\}$  a splňující  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Potom podle věty 57 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{x_n}} \right)^{\frac{1}{x_n}} = e,$$

protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x_n} \right| = +\infty$ .  $\triangle$

Heineho věta nám umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.

**Důsledek 65:** Necht  $f$  je funkce definovaná na okolí bodu  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  a  $(x_n), (z_n)$  jsou dvě reálné posloupnosti patřící do  $D_f$ , konvergující k  $a$  a splňující podmínky  $x_n \neq a$  a  $z_n \neq a$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Pokud limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  neexistuje.

**Příklad:** Limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

neexistuje. Označme  $f(x) := \sin \frac{1}{x}$  a položme

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Tyto posloupnosti splňují

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Konečně

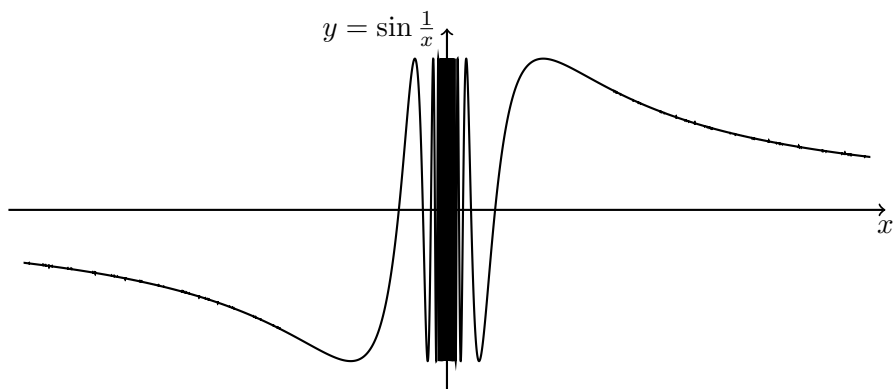
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Pro představu uvádíme obrázek 3.3. Z obrázku je patrné, že limita posloupnosti obrazů závisí na způsobu jakým se k bodu 0 blížíme.  $\triangle$

Velmi často se setkáváme se součtem, součinem, či podílem funkcí. Pro jejich limity platí analogická věta jako v případě posloupností. Porovnejte tuto větu s větou 33.

**Věta 66:** Necht  $f$  a  $g$  jsou funkce a  $a$  prvek  $\overline{\mathbb{R}}$ . Potom

$$\begin{aligned} \lim_a (f + g) &= \lim_a f + \lim_a g, \\ \lim_a f \cdot g &= \lim_a f \cdot \lim_a g, \\ \lim_a \frac{f}{g} &= \frac{\lim_a f}{\lim_a g}, \end{aligned}$$



Obrázek 3.3: Graf funkce  $\sin \frac{1}{x}$ . Limita této funkce v bodě 0 neexistuje.

platí v případě, že výrazy na pravé straně jsou definovány a v posledním případě za předpokladu, že  $\frac{f}{g}$  je definována na okolí bodu  $a$  s možnou výjimkou bodu  $a$  samotného.

*Důkaz.* Důkaz této věty je potřeba provést ve všech možných případech. Ukážeme jeden z případů.

- $\lim_a f = c \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_a g = d \in \mathbb{R}$ , součet: Buď  $\varepsilon > 0$  zadáno. Potom existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  takové, že

$$x \in H_a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ a } |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je-li tedy  $x \in H_a$ , pak pomocí trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|f(x) + g(x) - c - d| = |(f(x) - c) + (g(x) - d)| \leq |f(x) - c| + |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž  $\lim_a (f + g) = c + d$ . □

Poznamenejme, že analogická věta platí i pro jednostranné limity. Počítat limitu polynomů je díky předcházející větě velmi jednoduché.

**Příklad:** Buď  $P(x)$  libovolný polynom a  $a \in \mathbb{R}$ . Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ . Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí (věta 66), ihned dostaneme tvrzení uvedené na začátku našeho příkladu. Například tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1. \quad \triangle$$

O něco složitější je počítat limitu racionálních lomených funkcí. Zde už může nastat více možností.

**Příklad:** Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$  a  $d = -\infty$ .

Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2),$$

tudíž  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ . Pro výpočet limity v bodě  $a = -1$  můžeme proto použít větu o limitě podílu,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x \rightarrow a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě  $d$  upravme výraz pro  $f(x)$  následovně

$$f(x) = \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Pro výpočet limit v bodech  $b$  a  $c$  je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatele,

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2 + 3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2 + 3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$

Tudíž, opět pomocí předešlých vět,

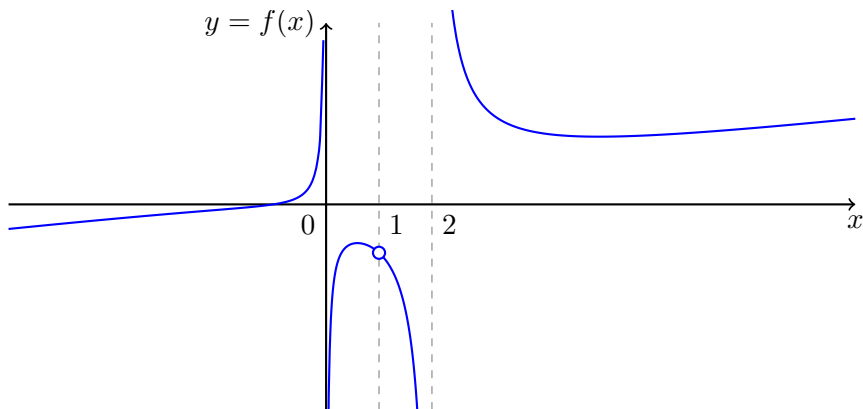
$$\lim_{x \rightarrow b} = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,

$$\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$

Je dobré porovnat naše výsledky s grafem uvažované funkce, vizte obrázek 3.4.  $\triangle$



Obrázek 3.4: Graf racionální lomené funkce.

**Příklad:** Vypočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

V bodě  $x = 2$  je jmenovatel roven 3, což je nenulové číslo. Podle věty o limitě podílu proto ihned dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{4}{3}.$$

$\triangle$

**Příklad:** Vypočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Nyní je limita typu  $\frac{0}{0}$ . Z polynomů v čitateli a jmenovateli proto můžeme vytknout kořenový činitel  $x - 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Protože ale pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x \rightarrow 1_{\pm}} \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2} \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$$

původní limita podle důsledku 62 neexistuje. △

Mnoho funkcí, na které narazíme, jsou složené funkce. Následující věta nám umožňuje počítat jejich limity, aniž bychom se museli obracet na definici limity.

**Věta 67** (O limitě složené funkce): Necht  $f$  a  $g$  jsou funkce,  $a, b, c$  jsou prvky  $\overline{\mathbb{R}}$  a platí tři podmínky

1.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$ ,
3. buď  $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \setminus \{a\})(g(x) \neq b)$  nebo  $(b \in D_f \text{ a } f(b) = c)$ .

Potom platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$ .

*Důkaz.* Vynecháváme. □

**Poznámka:** Podmínka v bodě tři je důležitá. Například pokud uvažíme  $f(x) = \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$  a  $g(x) = 0$ , pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Podmínky v bodě jedna a dva jsou tedy splněny, ale ani jedna podmínka v bodě tři neplatí. Dále, složená funkce  $f \circ g$  neexistuje, její definiční obor je prázdná množina. Nemá proto ani smysl počítat její limitu.

Hrubě řečeno lze říci, že pokud se vnitřní funkce na okolí bodu  $a$  nechová „pěkně“, nesplňuje bod tři, pak limita složené funkce nemusí existovat.

Na závěr této podkapitolky odvodíme pomocí věty o limitě složené funkce dvě veledůležité limity. Tyto limity nám umožní snadno počítat některé složitější limity.

**Příklad:** Ukažte rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Použijeme větu o limitě složené funkce na:

- $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$  a  $x \rightarrow 0$ ,
- vnější funkcí je  $f(x) = \ln x$  a  $b = e$ ,
- vnitřní funkcí je  $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  a  $a = 0$ .

Ověřme předpoklady věty:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = b$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \ln(x) = 1 = c$ ,
3.  $b = e \in D_f = D_{\ln} = (0, +\infty)$ ,  $f(b) = \ln e = 1$ .

Tudíž

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = 1.$$

△

**Příklad:** Dokažte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Využijeme znalosti limity z předchozího příkladu,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{\ln e^x} = \frac{e^x - 1}{\ln(1 + e^x - 1)}.$$

Ve větě o limitě složené funkce položíme

- vnější funkcí je  $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ ,  $b = 0$
- vnitřní funkcí je  $g(x) = e^x - 1$ ,  $a = 0$ .

Ověřme předpoklady věty:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0 = b$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 = c$ ,

3.  $b \notin D_f$ , ale  $g(x) = e^x - 1 \neq 0$  pro každé  $x \neq 0 = a$ .

Potom

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = 1. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}.$$

Výraz nejprve upravíme,

$$\frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě složené funkce a známé limity, pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 = 1. \quad \triangle$$

### 3.3 Nerovnosti v limitách

K výpočtům limit posloupností jsme často s výhodou používali větu o limitě sevřené posloupnosti (věta 39). Analogická tvrzení platí i pro limitu funkce. Těmito tvrzeními se budeme zabývat v této podkapitole.

**Věta 68:** Necht existují limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Pak platí dvě tvrzení:

1. Pokud  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , potom existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  takové, že  
pro všechna  $x \in H_a \setminus \{a\}$  platí  $f(x) < g(x)$ .

2. Pokud existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  takové, že

$$\text{pro všechna } x \in H_a \setminus \{a\} \text{ je } f(x) \leq g(x),$$

$$\text{potom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

*Důkaz.* Dokažme postupně obě tvrzení.

1. Označme  $\alpha = \lim_a f$  a  $\beta = \lim_a g$ . Podle předpokladu  $\alpha < \beta$  lze zvolit disjunktní okolí  $H_\alpha$  bodu  $\alpha$  a  $H_\beta$  bodu  $\beta$ . Podle předpokladu existence limit existuje jisté okolí  $H_a$  bodu  $a$  pro které platí

$$x \in H_a \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in H_\alpha \text{ a } g(x) \in H_\beta.$$

Pro stejná  $x$  proto platí  $f(x) < g(x)$ .



2. Plyne ihned z předchozího bodu. □

Hlavním výsledkem této podkapitoly je následující věta.

**Věta 69** (O limitě sevřené funkce): Nechť pro funkce  $f, g, h$  a body  $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$  platí:

1. existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  takové, že pro každé  $x \in H_a \setminus \{a\}$  platí  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ,
2. existují  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = c$ .

Potom existuje i limita  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  a je rovna  $c$ .

*Důkaz.* Uvažme nejprve případ  $c \in \mathbb{R}$ . Buď  $\varepsilon > 0$ . Existuje okolí  $U_a$  bodu  $a$  takové, že pokud  $x \in U_a \setminus \{a\}$  pak  $f(x) \in H_c(\varepsilon)$  a  $h(x) \in H_c(\varepsilon)$ . Pro  $x \in U_a \cap H_a$  platí  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Proto i  $g(x) \in H_c(\varepsilon)$ . □

Poznamenejme, že pokud např.  $c = +\infty$ , pak stačí pouze dolní odhad. Pro libovolné  $K \in \mathbb{R}$  máme k dispozici  $U_a$  okolí bodu  $a$  takové, že pro  $x \in U_a$  je  $f(x) > K$ . Je-li  $x \in U_a \cap H_a$  pak  $h(x) \geq f(x) > K$ . Podobná poznámka platí i pro  $c = -\infty$ .

**Příklad:** Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ . Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  totiž neexistuje. Ovšem nerovnost

$$f(x) := 0 \leq g(x) := \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zvolíme-li např.  $H_a = (-1, 1)$  okolí bodu  $a = 0$ , pak

1. nerovnost  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  platí pro každé  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ ,
2. existují  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ .

Podle věty o limitě sevřené funkce pak  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$ . △

**Poznámka:** V předchozím výpočtu jsme využili následující ekvivalence

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0,$$

jejíž platnost se ověří úplně stejně jako u limity posloupnosti.

**Poznámka:** Dále platí následující tvrzení: je-li  $f(x)$  definována a nezáporná na okolí bodu  $a$ , a existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{c}$ . Toto tvrzení se dokáže velmi podobně jako v případě posloupností. Můžeme se na něj také dívat jako na speciální případ věty o limitě složené funkce kde jsme využili toho, že odmocnina je spojitá. Ke spojitosti se dostaneme v příští kapitole.

**Příklad:** Ověřte správnost následujících tvrzení

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V tento okamžik máme k dispozici pouze geometrickou definici goniometrických funkcí, vizte obrázek 3.5. Pro  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  platí

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Skutečně, porovnejte obsahy trojúhelníku  $OAB$ , výseče  $OAB$  a trojúhelníku  $OAC$  na obrázku 3.5. Funkce  $\sin$  je lichá a tudíž

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . A z rovnosti  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  pak i  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . (Rozmyslete znaménko!) Funkce  $\sin$  i  $\operatorname{tg}$  jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

plyne nerovnost

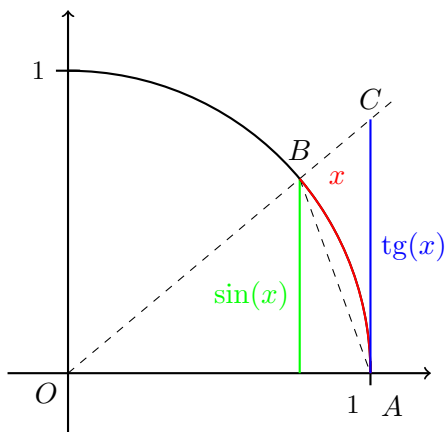
$$1 < \left| \frac{x}{\sin x} \right| < \left| \frac{1}{\cos x} \right|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Odtud ihned dostáváme poslední hledanou limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce  $\frac{\sin x}{x}$  je totiž kladná na jistém okolí nuly.

△



Obrázek 3.5: Jednotková kružnice a výpočet funkcí sinus a tangens.

### 3.4 Definice a kriteria spojitosti

Jak již bylo řečeno, hodnota limity funkce v bodě  $a \in \mathbb{R}$  nezávisí na funkční hodnotě funkce  $f$  v tomto bodě (funkce v daném bodě ani nemusí být definována a přesto v něm může mít limitu). Zavádíme proto pojem spojitě funkce, který spojuje pojem limity a funkční hodnoty. Funkce je spojitá v bodě  $a \in D_f$  právě tehdy, když její funkční hodnota v bodě  $a$  je rovna její limitě v bodě  $a$ . Přesněji:

**Definice 70:** Nechť  $f$  je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod  $a \in D_f$ . Řekneme, že funkce

- $f$  je **spojitá v bodě**  $a$ , pokud  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- $f$  je **spojitá v bodě**  $a$  **zprava**, pokud  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ .
- $f$  je **spojitá v bodě**  $a$  **zleva**, pokud  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ .

Spojitosť funkce je velmi důležitá pro praktické aplikace. Na tomto místě zatím jenom poznamenejme, že je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$ , pak z rovnosti  $f(a) = b$  plyne, že  $f(x)$  je blízko  $b$  pokud  $x$  je blízko  $a$ . Přesně to totiž korektně říká definice 70.

Jako první pozorování uvedme, že pokud  $a \notin D_f$ , pak takováto funkce nemůže být z definice spojitá i kdyby  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existovala. V definici spojitosti se totiž **předpokládá**, že funkce je definována v bodě  $a$ . V takovémto bodě bychom mohli danou

funkci tzv. **spojitě dodefinovat**. Vytvořili bychom tedy novou funkci, která by v bodě  $a$  byla spojitá.

Protože  $a \in D_f \subset \mathbb{R}$  a  $f(a) \in \mathbb{R}$ , dostáváme přeformulováním definice limity následující  $\varepsilon - \delta$  formulaci spojitosti:

**Poznámka** ( $\varepsilon - \delta$  formulace spojitosti): Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in D_f$ , právě když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x \in \mathbb{R}$  splňující  $|x - a| < \delta$  platí  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Následující tvrzení jsou bezprostředním důsledkem vlastností limity funkce:

**Věta 71:** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in D_f$ , právě když je spojitá v bodě  $a$  zleva i zprava.

*Důkaz.* Vizte větu 61. □

**Věta 72:** Součet a součin dvou funkcí  $f$  a  $g$  spojitých v bodě  $a$  je funkce spojitá v bodě  $a$ . Pokud navíc  $g(a) \neq 0$ , pak podíl  $\frac{f}{g}$  je funkce spojitá v bodě  $a$ .

*Důkaz.* Vizte větu 66. □

**Věta 73:** Buďte  $g$  funkce spojitá v bodě  $a$  a  $f$  funkce spojitá v bodě  $g(a)$ . Potom složená funkce  $f \circ g$  je spojitá v bodě  $a$ .

*Důkaz.* Vizte větu 67. Povšimněte si, že třetí předpoklad věty 67 je pro spojitě funkce automaticky splněn. □

Jako první příklad spojitě funkce zmiňme příklad libovolného polynomu.

**Příklad:** V předchozí podkapitole jsme ukázali, že pro libovolné reálné  $a$  a libovolný polynom  $P(x)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě  $a \in \mathbb{R}$ . △

Všimněte si, že díky znalosti vlastností pojmu limity (konkrétně věty o limitě součtu a součinu) a pouze znalosti spojitosti funkce  $f(x) = x$  a konstantní funkce jsme odvodili spojitost libovolného polynomu. Vůbec jsme nepotřebovali explicitně použít definici spojitosti/limity.

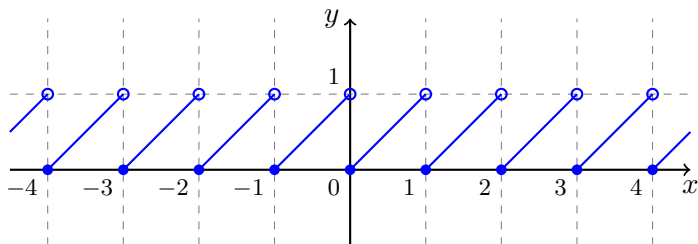
Dále se podívejme na komplikovanější příklad, který pěkně ilustruje všechny možné druhy spojitosti (zleva/zprava).

**Příklad:** Zkoumejte spojitost funkce  $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ . Přírodným definičním oborem funkce  $f$  je  $D_f = \mathbb{R}$ . Funkce  $f$  je spojitá v každém bodě  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . V bodech  $a \in \mathbb{Z}$  je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) + 1.$$

Graf této funkce je uveden na obrázku 3.6.

△



Obrázek 3.6: Graf funkce  $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ .

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

**Definice 74:** Funkce  $f$  je

- **spojitá na intervalu**  $(a, b)$ , právě když  $f$  je spojitá v každém bodě  $x \in (a, b)$ .
- **spojitá na intervalu**  $\langle a, b \rangle$ , právě když  $f$  je spojitá v každém bodě  $x \in (a, b)$  a v bodě  $a$  je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu**  $(a, b]$ , právě když  $f$  je spojitá v každém bodě  $x \in (a, b)$  a v bodě  $b$  je spojitá zleva.
- **spojitá na intervalu**  $\langle a, b \rangle$ , právě když  $f$  je spojitá v každém bodě  $x \in (a, b)$ , v bodě  $a$  je spojitá zprava a v bodě  $b$  je spojitá zleva.

Spojítost funkce na uzavřeném intervalu má závažné důsledky pro řešení rovnic. Následující věta dává postačující podmínku pro existenci řešení rovnice  $f(x) = 0$  a dokonce i nabízí algoritmus jak toto řešení nalézt. Mimo to ji ještě dále s výhodou využijeme.

Povšimněte si, že není žádným omezením mít na pravé straně rovnice číslo 0. Pokud bychom měli řešit rovnici  $h(x) = g(x)$  pro neznámou  $x$ , vždy můžeme tento problém přeformulovat do tvaru  $f(x) := g(x) - h(x) = 0$ .

**Věta 75** (Metoda půlení intervalu): Necht funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  a necht  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Potom existuje bod  $c \in (a, b)$  takový, že  $f(c) = 0$ .

*Důkaz.* Položme  $a_1 := a$  a  $b_1 := b$ . Protože znaménka  $f(a_1)$  a  $f(b_1)$  jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

1.  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ ,
2. znaménka  $f(a_1)$  a  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$  jsou různá,
3. znaménka  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$  a  $f(b_1)$  jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem  $c$  je  $\frac{a_1+b_1}{2}$  a věta je dokázána.
2. Položme  $a_2 := a_1$  a  $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ .
3. Položme  $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$  a  $b_2 := b_1$ .

Pokud nenastala první možnost, provedme stejnou úvahu s  $a_2$  a  $b_2$  místo  $a_1$  a  $b_1$ . Tímto způsobem postupně konstruujeme další  $a_3, b_3$ , atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje  $n$  tak, že  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ ), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b \rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity,  $a_n \rightarrow \alpha$  a  $b_n \rightarrow \beta$  při  $n \rightarrow \infty$ . Navíc

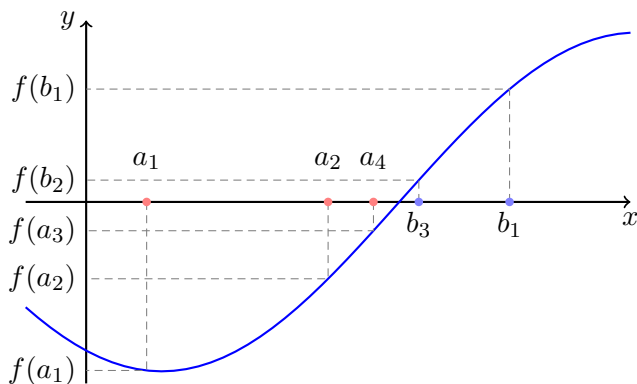
$$\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji  $c := \alpha = \beta \in \langle a, b \rangle$ . Ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $c$  a Heineho věty nyní plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c).$$

Ale protože všechny  $f(a_n)$  mají různé znaménko od  $f(b_n)$  můžou poslední rovnosti nastat pouze v případě že  $f(c) = 0$ . Tím je důkaz věty dokončen.  $\square$

Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla  $c$ , jsme dokázali jeho konstrukcí. Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice  $f(x) = 0$ . Jeho výhodou je, že máme pod kontrolou chybu výpočtu, hledané řešení  $c$  vždy leží v intervalu  $(a_n, b_n)$ . Pokud délka tohoto intervalu je již kratší než požadovaná přesnost, můžeme algoritmus zastavit a třeba o průměru  $\frac{a_n+b_n}{2}$  prohlásit, že se jedná o hledané řešení (v dané přesnosti). Nevýhodou metody půlení intervalu je její ne příliš vysoká rychlost (typicky je potřeba udělat více iterací než se dostaneme k požadované přesnosti).



Obrázek 3.7: Demonstrace k metodě půlení intervalu, věť 75.

**Poznámka:** Předpoklad spojitosti v předešlé větě 75 je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

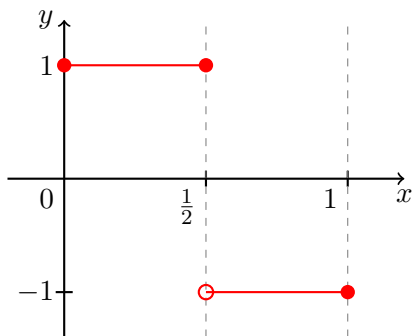
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ -1, & x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$$

na intervalu  $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ . Sice  $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$ , ale neexistuje bod  $x \in (0, 1)$  splňující  $f(x) = 0$ .

Očividným důsledkem předchozí věty 75 je následující tvrzení.

**Důsledek 76:** Buď  $f$  spojitá funkce na intervalu  $J$  a necht' platí  $f(x) \neq 0$  pro všechna  $x \in J$ . Potom pro všechna  $x \in J$  platí buď  $f(x) > 0$  nebo  $f(x) < 0$ .

Další vlastností spojitých funkcí je, že zobrazují intervaly na intervaly. To pro nespojité funkce nemusí být pravda (rozmyslete!).



Obrázek 3.8: Předpoklad spojitosti pro tvrzení věty 75 je podstatný.

**Věta 77:** Buď  $f$  funkce spojitá na intervalu  $J$ . Potom obraz  $f(J)$  intervalu  $J$  je buď interval, nebo jednoprvková množina.

*Důkaz.*  $f(J)$  je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce  $f$  je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládáme, že  $f$  není konstantní.

Ukažme, že  $f(J)$  je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky  $\alpha, \beta \in f(J)$ ,  $\alpha \neq \beta$ , leží všechna  $k$  mezi  $\alpha$  a  $\beta$  také v  $f(J)$ .

Jistě existují  $a, b \in J$ ,  $f(a) = \alpha$ ,  $f(b) = \beta$  a BÚNO  $a < b$ . Položme  $g(x) := f(x) - k$ . Funkce  $g$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ ,  $g(a) = \alpha - k$  a  $g(b) = \beta - k$  jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle věty existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $g(c) = 0$ , tj.  $f(c) = k$ .  $\square$

Spojitým obrazem intervalu je tedy interval. Zachovává spojitost i uzavřenost, resp. otevřenost, intervalu? Není těžké si rozmyslet, že obrazem otevřeného intervalu nemusí být opět otevřený interval<sup>1</sup>. Spojitým obrazem uzavřeného intervalu už ale vždy bude uzavřený interval. Platí totiž následující věta.

**Věta 78:** Buď  $f$  funkce spojitá na uzavřeném intervalu  $J$ . Potom obraz  $f(J)$  intervalu  $J$  je buď jednoprvková množina, nebo uzavřený interval.

*Důkaz.* Podle věty 77 již víme, že  $f(J)$  je buď jednoprvková množina (pokud je funkce konstantní) a nebo interval (pokud je funkce nekonstantní). Ukažme nyní uzavřenost  $f(J)$  pro nekonstantní  $f$ .

<sup>1</sup>Uvažte například funkci  $f(x) = \sin x$  a otevřený interval  $J = (0, 2\pi)$ . Obrazem tohoto otevřeného intervalu je uzavřený interval  $\langle -1, 1 \rangle$ .



Označme  $J = \langle a, b \rangle$ . Postupujme sporem, bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme, že obraz je tvaru  $(c, d)$  kde  $c \in \mathbb{R}$  nebo  $c = -\infty$ . Existuje posloupnost  $(y_n)$  konvergující k  $c$  jejíž členy leží v  $f(J)$ . Skutečně, v případě  $c \in \mathbb{R}$  můžeme volit  $y_n = c + \frac{1}{n}$  od dostatečně velkého  $n$  a v případě  $c = -\infty$  lze volit  $y_n = -n$  opět pro dostatečně velké  $n$ . Protože  $y_n \in f(J)$ , existují  $x_n \in J$  splňující  $y_n = f(x_n)$ . Posloupnost  $(x_n)$  patří do  $\langle a, b \rangle$  a je proto omezená. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty 29 lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost  $(x_{k_n})$ . Existuje tedy  $x \in J = \langle a, b \rangle$  splňující  $\lim_n x_{k_n} = x$ . Ze spojitosti dostáváme  $c = \lim_n y_n = \lim_n f(x_n) = \lim_n f(x_{k_n}) = f(\lim_n x_{k_n}) = f(x)$ . Proto  $c \in f(J)$ , což je spor s naším předpokladem.  $\square$

## 3.5 Spojitost elementárních funkcí

V této kapitole rozeberem spojitost elementárních funkcí.

**Příklad:** Funkce  $\sin$  a  $\cos$  jsou spojité v každém bodě  $a \in \mathbb{R}$ . Připomeňme známé, v minulé podkapitole vypočtené, limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci  $\sin$  platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin((x - a) + a) \\ &= \sin(x - a) \cos(a) + \cos(x - a) \sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce (věta 67) a součinu/součtu limit (věta 66) platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce  $\sin$ . Spojitost funkce  $\cos$  se ukáže analogicky.  $\triangle$

Z posledního příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí (věta 66) ihned plyne, že funkce  $\tan$  a  $\cot$  jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

**Příklad:** Funkce  $e^x$  je spojitá v každém bodě  $a \in \mathbb{R}$ , navíc platí (využijeme později)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Konečně

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x - e^a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \cdot (x - a) = e^a \cdot 0 = 0.$$

Čili  $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$ . △

Spojitosť exponenciální funkce také alternativně plyne z Heineho věty (věta 63) a z věty 53.

**Příklad:** Funkce  $\ln$  je spojitá v každém bodě  $a \in \mathbb{R}_+$  a navíc platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \left(1 + \frac{x-a}{a}\right)}{a \left(\frac{x-a}{a}\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

A konečně

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln(x) - \ln(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

Čili funkce  $\ln$  je spojitá v bodě  $a$ . △

Spojitosť logaritmu lze také alternativně ověřit pomocí Heineho věty (věta 63) a věty 55.

**Příklad:** Funkce  $x^n$  je spojitá pro každé  $n \in \mathbb{N}$  v každém bodě  $a \in \mathbb{R}$ , navíc platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Spojitosť je zřejmá (věta o spojitosti součinu spojitých funkcí). Dále

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x - a} \cdot (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}. \quad \triangle$$

**Poznámka:** Na závěr této podkapitoly poznamenejme, že ze známých limit posloupností a Heineho věty okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty, tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$$

pro  $a \geq 0$  a  $k = 2, 3, \dots$

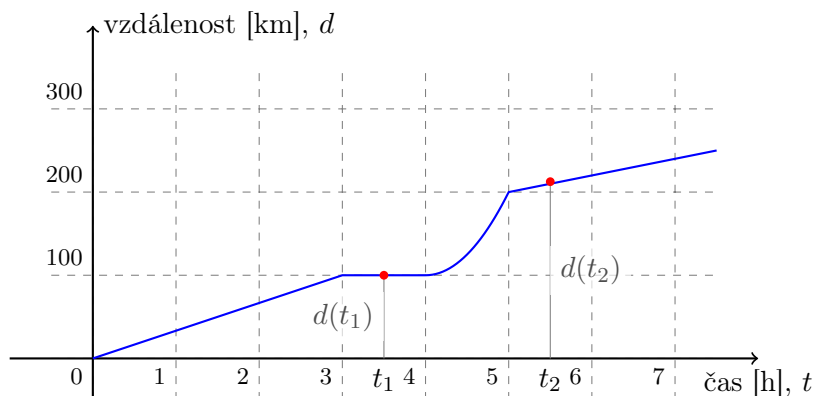
# Kapitola č. 4

## Derivace

Derivace funkce; geometrický význam derivace; tečna ke grafu funkce; derivace elementárních funkcí; vlastnosti derivace; lokální maximum a minimum funkce; nutná podmínka pro existenci extrému; Rolleova věta; Lagrangeova věta, věta o přírůstku funkce; monotonie funkce; konvexnost a konkávnost; asymptoty funkce; vyšetřování průběhu funkce; l'Hospitalovo pravidlo; kubická interpolace (splines); separace kořenů; Newtonova metoda; výpočet třetí odmocniny; diferenciální rovnice.

### 4.1 Rychlost a hledání tečny

Začněme nejprve s jednoduchým motivačním příkladem z klasické mechaniky. Jaký je vztah mezi polohou a rychlostí tělesa? Uvažme případ tělesa pohybujícího se podle obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Graf uražené vzdálenosti v závislosti na čase.

Graf na obrázku 4.1 zachycuje vzdálenost uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Poloha  $d$  tělesa je tedy **funkcí** času  $t$ . Průměrná rychlost tělesa

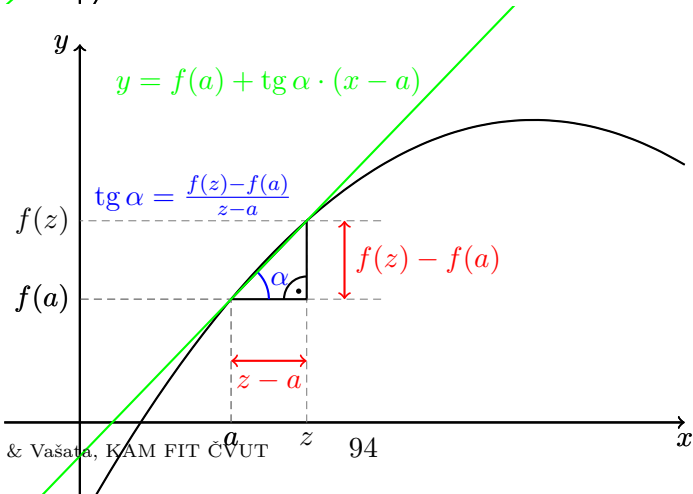
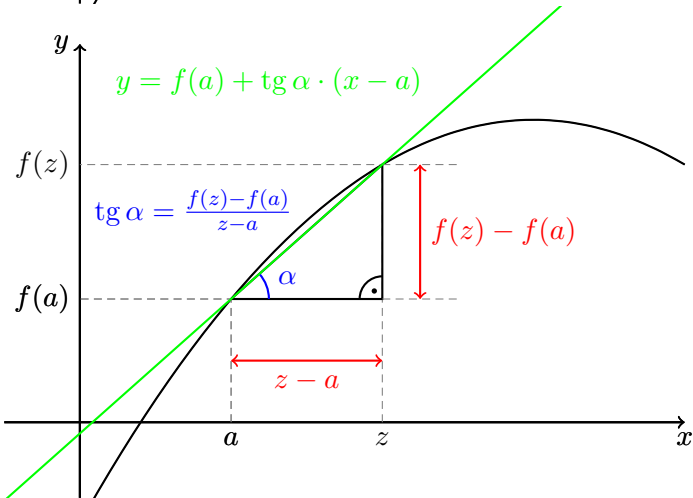
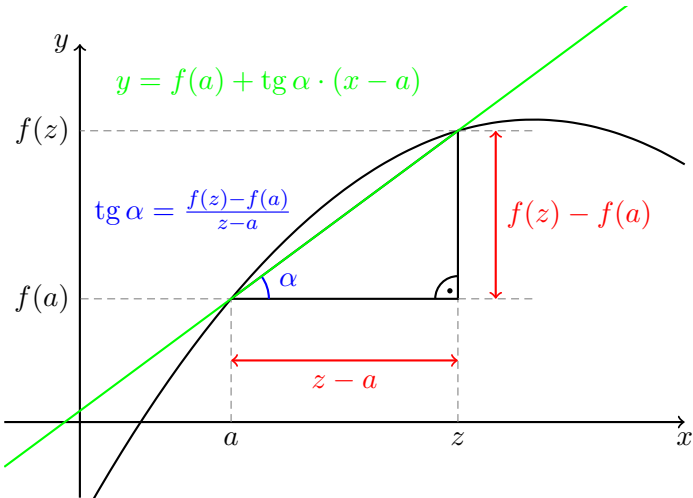
mezi okamžiky  $t_1 < t_2$  je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Čím jsou  $t_1$  a  $t_2$  navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase  $t_1$  se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nad tímto problémem se můžeme zamýšlet i geometricky. Díváme-li se na graf uražené vzdálenosti, pak „sklon“ tohoto grafu v daném bodě udává okamžitou rychlost. Podrobněji tento pohled rozebereme na obrázku 4.2, hlavní otázkou je, jak určit „sklon“ grafu v daném bodě. Zde vstoupí do hry pojem limity funkce. Na obrázku 4.2 uvádíme grafickou reprezentaci konstrukce tečny limitním procesem pomocí sečen.



## 4.2 Derivace funkce

V souladu s tím, co bylo uvedeno na začátku této kapitoly nyní definujeme:

**Definice 79:** Nechť  $f$  je funkce definovaná na okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ . Pokud existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (4.1)$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$**  a označíme  $f'(a)$ . Pokud je tato konečná (tj.  $f'(a) \in \mathbb{R}$ ) řekneme, že funkce  $f$  je **diferencovatelná v bodě  $a$** .

Derivaci funkce  $f$  se můžeme pokoušet počítat ve všech bodech  $D_f$ . Získáváme tak novou funkci.

**Definice 80:** Buď  $f$  funkce s definičním oborem  $D_f$ . Nechť  $M$  označuje množinu všech  $x \in D_f$  takových, že existuje konečná derivace  $f'(x)$ . **Derivací funkce  $f$**  nazýváme funkci s definičním oborem  $M$ , která každému  $x \in M$  přiřadí  $f'(x)$ . Tuto funkci značíme symbolem  $f'$ .

**Poznámka:** Derivace funkce  $f$  v bodě  $a$  se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{df}{dx}(a).$$

Všimněte si, že limitu v definici derivace (4.1) lze ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tento tvar je často výhodný pro výpočty.

Nyní vypočteme derivace některých funkcí přímo pomocí její definice. Uvažme nejprve funkci ze všech funkcí nejjednodušší.

**Příklad:** Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě. Je-li  $f(x) = c \in \mathbb{R}$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ , pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$$

pro každé  $a \in \mathbb{R}$ . △

Tento výsledek by nás neměl nijak překvapovat. Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou  $x$ . Tečna tohoto grafu v libovolném bodě je pak opět tato přímka, jež je rovnoběžná s osou  $x$  a svírá proto s osou  $x$  úhel 0,  $\tan 0 = 0$ .

Přístupme nyní k odvození vztahů pro derivace dalších elementárních funkcí. V minulé podkapitole jsme odvodili limity

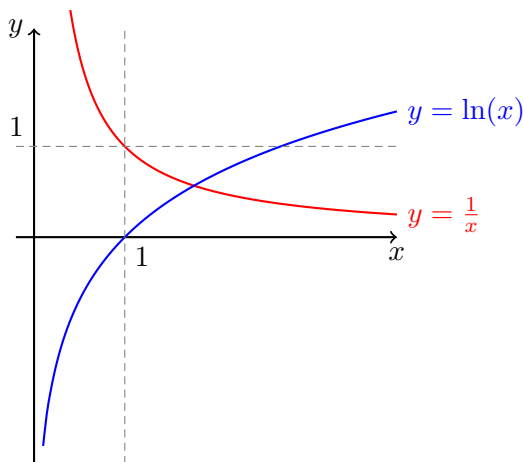
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a, \quad (a \in \mathbb{R}), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}, \quad (a > 0).$$

Tudíž známe derivace funkcí  $e^x$  a  $\ln x$ :

**Příklad:** Derivace funkce  $e^x$  je opět funkce  $e^x$ . Tedy  $(e^x)' = e^x$ . △

**Příklad:** Derivace funkce  $\ln x$  je funkce  $\frac{1}{x}$ , kde  $x > 0$ . Tedy pro  $x > 0$  máme rovnost  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . △

Pro grafickou představu o funkci a její derivaci uvádíme obrázek 4.3. V závislosti na bodu na ose  $x$  si všimněte vztahu mezi sklonem modré křivky (logaritmus  $\ln x$ ) a hodnotou červené křivky ( $\frac{1}{x}$ )!



Obrázek 4.3: Grafy funkcí  $f(x) = \ln(x)$  a  $g(x) = \frac{1}{x}$  pro  $x > 0$ .

**Poznámka:** Všimněte si, že funkce  $\ln x$  je definovaná na množině  $(0, +\infty)$  a v každém bodě  $x$  jejího definičního oboru je její derivace rovna  $\frac{1}{x}$ . Funkce  $\frac{1}{x}$  je ale definována pro všechna nenulová  $x$ .

Označíme-li  $f(x) = \ln|x|$ , s definičním oborem  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pak v každém bodě  $D_f$  platí  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . Pro kladná  $x$  jsme to již ověřili. Pro záporná  $x$  není těžké



nahlédnout, že stále platí

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(-x-\textcolor{red}{h}) - \ln(-x)}{\textcolor{red}{-h}} = \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(-x+t) - \ln(-x)}{t} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Dále jsme v minulé podkapitole odvodili limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Odtud ihned plyne:

**Příklad:** Pro kladné přirozené  $n$  je derivací funkce  $x^n$  funkce  $nx^{n-1}$ . △

**Příklad:** Speciálně pak platí

$$(x^2)' = 2x, \quad \text{nebo} \quad (x^{22})' = 22x^{21}. \quad \triangle$$

**Příklad:** Derivace funkce  $\sin x$  je funkce  $\cos x$  a derivace funkce  $\cos x$  je funkce  $-\sin x$ . Pomocí součtového vzorce pro  $\sin$  dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a + a) - \sin(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)\cos(a) + \cos(x - a)\sin(a) - \sin(a)}{x - a} = \\ &= \cos(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x - a} + \sin(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x - a) - 1}{x - a} = \\ &= \cos(a) \cdot 1 + \sin(a) \cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Navíc

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h} \cdot \frac{1}{\cos h + 1} = \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h^2} \cdot \frac{h}{\cos h + 1} = -1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

Podobným způsobem můžeme odvodit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = -\sin(a),$$

pro každé  $a \in \mathbb{R}$ . △

## 4.3 Vlastnosti derivace

Již jsme zavedli dvě lokální vlastnosti funkcí. Máme-li zadánu funkci  $f$  a bod  $a$  v jejím definičním oboru, můžeme zkoumat spojitost funkce  $f$  v bodě  $a$  a diferencovatelnost funkce  $f$  v bodě  $a$ . Jak spolu tyto pojmy souvisí?

**Věta 81:** Je-li  $f$  funkce diferencovatelná v bodě  $a$ , pak je spojitá v bodě  $a$ . Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

*Důkaz.* Elementární úpravou a použitím věty o limitě součinu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Tedy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Poznamenejme, že „diferencovatelnost“ znamená  $f'(a) \in \mathbb{R}$  a výraz na konci výpočtu proto má smysl.  $\square$

Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  neplyne její diferencovatelnost v bodě  $a$ . Jako příklad lze uvážit funkci  $f(x) = |x|$  a bod  $a = 0$ . Skutečně, protože

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \operatorname{sgn}(h) = +1, \\ \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0_-} \operatorname{sgn}(h) = -1 \end{aligned}$$

oboustranná limita (tedy derivace  $f'(0)$ )

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

neexistuje. Funkce  $f$  je však v bodě 0 spojitá, jak snadno nahlédneme vypočtením její limity v bodě 0.

Dokonce, existují funkce **spojité** na celém  $\mathbb{R}$  **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

kde  $\{x\}$  značí vzdálenost reálného čísla  $x$  od nejbližšího celého čísla. Protože  $0 \leq \{x\} < 1$  konverguje řada absolutně pro každé  $x$ . Definičním oborem funkce  $f$  je proto celá reálná osa  $D_f = \mathbb{R}$ . Ukázat spojitost a diferencovatelnost je však už složitější. Potřebovali bychom použít vlastnosti pojmu stejnoměrné konvergence funkčních řad, který však v BI-ZMA studovat nebudeme.

Pokud má funkce v daném bodě nekonečnou derivaci, nemusí v něm být spojitá. Například o funkci  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$  víme, že není spojitá v bodě  $a = 0$ , protože obě jednostranné limity jsou navzájem různé. V bodě  $a = 0$  ale má tato funkce derivaci a její hodnota je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Díky derivaci nyní můžeme zkonstruovat rovnici tečny.

**Definice 82:** Necht existuje  $f'(a)$ . Je-li

1. funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$  a  $f'(a) = +\infty$  nebo  $f'(a) = -\infty$ , nazýváme přímkou s rovnicí  $x = a$
2.  $f'(a) \in \mathbb{R}$ , nazýváme přímkou s rovnicí  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

**tečnou funkce  $f$  v bodě  $a$ .**

Na obrázku 4.4 je modře znázorněn graf funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ . Pro její derivaci v bodě 2 platí

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h \cdot ((1+h)^{2/3} + (1+h)^{1/3} + 1)} = \frac{1}{3}.$$

Tečnou grafu funkce  $f$  v bodě 2 je přímkou

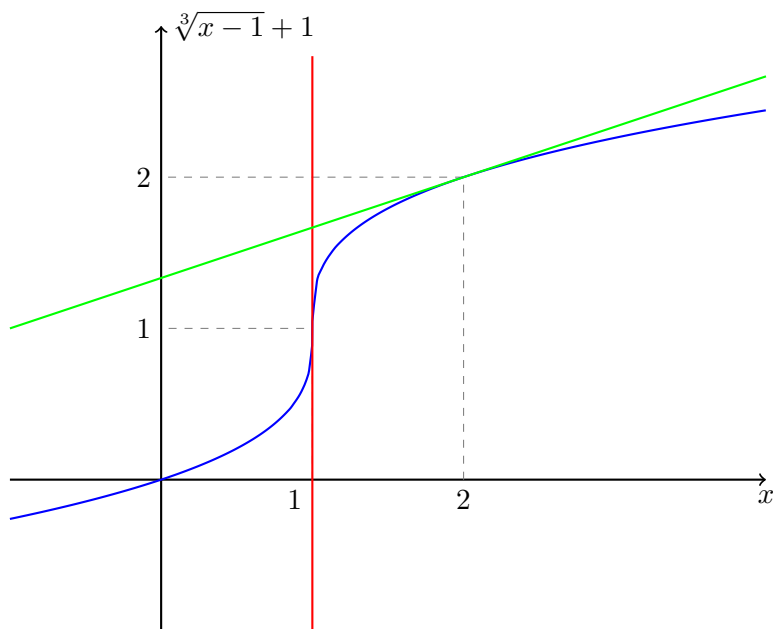
$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 2 + \frac{1}{3}(x - 2),$$

na obrázku 4.4 vynesena zeleně. Pro derivaci v bodě 1 platí

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2/3} = +\infty.$$

Protože funkce  $f$  je v bodě 1 spojitá, je tečnou v bodě 1 (červená) přímkou  $x = 1$ .

Přistupme nyní k problému výpočtu derivace. Opět se jedná o aplikaci vět o limitách funkcí.



Obrázek 4.4: Dva typy tečny grafu funkce.

**Věta 83** (Derivace součtu, součinu a podílu): Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou diferencovatelné v bodě  $a$ . Potom platí

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ , pokud  $g(a) \neq 0$ .

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo**<sup>1</sup>. Platí tedy například

$$\begin{aligned}(\sin(x) \cos(x))' &= \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x) = \cos(2x), \\(x \sin(x))' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Gottfried Wilhelm von Leibniz, německý matematik a filozof, 1646 – 1716

*Důkaz pro součet a součin.* Ukažme si, jak dokázat pravidla pro derivaci součtu a součinu funkcí. Předpokládejme, že funkce  $f$  a  $g$  jsou diferencovatelné v bodě  $a$ . Potom

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a), \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x - a} = \\ &= f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a).\end{aligned}$$

Zde jsme vždy použili větu 66 o limitě součtu a součinu (výrazy jsou díky diferencovatelnosti definovány) a navíc jsme použili spojitost  $f$  a  $g$ , která, jak víme, plyne z diferencovatelnosti.  $\square$

Důkaz vzorečku pro podíl se provede stejným způsobem. Ukažme si nyní použití věty 83 na několika příkladech.

**Příklad:** Pro derivace funkcí  $\operatorname{tg}$  a  $\operatorname{cotg}$  platí

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg}'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu dostáváme vztahy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}'(x) &= \left( \frac{\sin}{\cos} \right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}, \\ \operatorname{cotg}'(x) &= \left( \frac{\cos}{\sin} \right)'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)},\end{aligned}$$

platné na příslušných definičních oborech.  $\triangle$

Nyní tedy umíme derivovat součty, součiny a podíly funkcí, jejichž derivace již známe. Je možné derivovat i složené funkce, s kterými často přicházíme do styku? Odpověď na tuto otázku je kladná.

**Věta 84** (Derivace složené funkce): Nechť  $g$  je funkce diferencovatelná v bodě  $a$ ,  $f$  je diferencovatelná v bodě  $g(a)$ . Potom funkce  $f \circ g$  je diferencovatelná v bodě  $a$  a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

*Důkaz.* Vynecháváme. □

**Příklad:** Platí tedy například:

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad (\sin(\cos(x)))' = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)).$$

Skutečně, v prvním příkladě je vnější funkcí  $f(x) = e^x$  a vnitřní funkcí  $g(x) = x^2$ . Pak totiž

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2}.$$

A podle věty

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Podobně lze postupovat i v druhém příkladě. △

**Příklad:** Derivace funkce  $h(x) = x^\alpha$ ,  $x > 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , je opět  $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . Víme, že pro kladné  $x > 0$  platí  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ . Označme  $f(x) = e^x$  vnější funkcí a  $g(x) = \alpha \ln(x)$  vnitřní funkcí, tedy  $x^\alpha = f(g(x))$ . Potom podle věty o složené funkci máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0. \quad \triangle$$

**Příklad:** Derivace funkce  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , kde  $a > 0$  je  $f'(x) = a^x \ln a$ . Platí  $h(x) = e^{x \ln a}$ . Označme vnější funkcí  $f(x) = e^x$  a vnitřní funkcí  $g(x) = x \ln a$ . Potom

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a. \quad \triangle$$

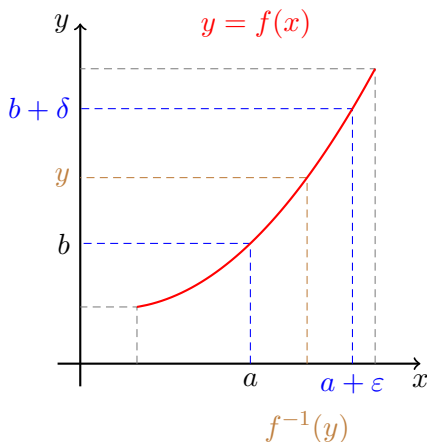
V poslední části této podkapitole budeme hledat vzorečky pro derivace zbývajících elementárních funkcí. K nim patří i jejich inverzní funkce. Nyní proto musíme podrobněji prozkoumat vlastnosti inverzních funkcí a ukázat, jak hledat jejich derivace.

**Věta 85** (O inverzní funkci): Buď  $f$  monotónní a spojitá funkce na intervalu  $I$ . Potom její inverzní funkce  $f^{-1}$  je také monotónní a spojitá na intervalu  $J := f(I)$ .

*Důkaz.*  $f^{-1}$  existuje a je monotónní.  $J$  je skutečně interval, jak tvrdí věta 77. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce  $f$  je rostoucí. Ukažme, že  $f^{-1}$  je spojitá zprava v každém bodě  $b \in J$ , který není pravým koncovým bodem. Ozn.  $a := f^{-1}(b)$ , tj.  $f(a) = b$ .

Buď  $\varepsilon > 0$ . Potom pro  $\delta := f(a + \varepsilon) - b$  a  $y \in (b, b + \delta)$  platí

$$\begin{aligned} b &< y < b + \delta = f(a + \varepsilon) \\ a &= f^{-1}(b) < f^{-1}(y) < a + \varepsilon. \end{aligned}$$



Obrázek 4.5: K důkazu věty o vlastnostech inverzní funkce.

**Příklad:** Protože už víme, že funkce  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  a  $\operatorname{cotg}$  jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\begin{aligned}\arcsin &= \left( \sin \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \right)^{-1}, \\ \arccos &= \left( \cos \Big|_{\langle 0, \pi \rangle} \right)^{-1}, \\ \arctg &= \left( \operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}, \\ \operatorname{arccotg} &= \left( \operatorname{cotg} \Big|_{(0, \pi)} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad \triangle$$

Nyní přistupme k odpovědi na otázku, jak derivovat inverzní funkce k funkcím se známými derivacemi.

**Věta 86** (Derivace inverzní funkce): Buďte  $f$  spojitá a monotónní na intervalu  $I = (a, b)$  a bod  $c \in I$ . Má-li inverzní funkce  $f^{-1}$  konečnou nenulovou derivaci v bodě  $f(c)$ , potom má  $f$  derivaci v bodě  $c$  a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

*Důkaz.* Označme  $d = f(c)$ . Všimněme si, že pro  $x \in I$ ,  $x \neq c$  platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left( \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(d)}{f(x) - d} \right)^{-1} = \left( g(f(x)) \right)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \quad \text{pro } x \in f(J), \ x \neq d.$$

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \rightarrow d} g(x) = (f^{-1})'(d)$$

konečná nenulová,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$  a  $f(x) \neq d$  pro  $x \neq c$ . Podle věty 67 o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{(f^{-1})'(d)}. \quad \square$$

**Příklad:** Již víme, že derivace  $\ln$  je funkce  $\frac{1}{x}$ .  $\ln$  je ale inverzní funkce k funkci  $e^x$ . Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat  $f(x) = \ln(x)$  na intervalu  $I = (0, +\infty)$ . Tato je spojitá, monotónní a její inverzní funkcí je  $f^{-1}(x) = e^x$ . Je-li  $x \in I$ , pak pro derivaci  $f^{-1}$  v bodě  $f(x)$  platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle naší věty tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali. △

**Příklad:** Pro derivaci funkce  $\arcsin$  platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Funkce  $f = \arcsin$  je inverzní funkcí k funkci  $\sin$  zúžené na interval  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Tj.  $f^{-1} = \sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ . Pro každé  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  již víme, že platí

$$(f^{-1})'(x) = \cos x \neq 0.$$



Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé  $x \in (-1, 1)$  rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro  $x \in (-1, 1)$  je ale

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad \triangle$$

**Příklad:** Pro derivaci funkce  $\operatorname{arctg}$  platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat  $f = \operatorname{arctg}$  na  $I = \mathbb{R}$ , kde je spojitá a monotónní. Její inverzní funkce je  $f^{-1} = \operatorname{tg} \big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ . Pro každé  $x \in I$  platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} \neq 0,$$

protože  $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Navíc je

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

Velmi podobným způsobem bychom odvodili derivace zbývajících funkcí  $\arccos$  a  $\operatorname{arccotg}$ . Jejich derivace budou uvedeny níže v přehledné tabulce.

## 4.4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

Shrňme si přehledně doposud odvozené vztahy pro derivace. Uvádíme tabulku 4.1 zatím známých derivací.

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky
$x^n$	$nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n = -1, -2, \dots$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
$e^x$	$e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{f(x)}{f'(x)}$	$\frac{f'(x)}{f''(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 4.1: Tabulka doposud známých derivací elementárních funkcí.

**Příklad:** Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Přímým výpočtem získáváme

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)' + \operatorname{arctg}'(x) \stackrel{2}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{1 + x^2} \stackrel{3}{=} 0$$

V označených rovnostech jsme postupně použili

1. derivace součtu,

2. znalost derivace funkcí  $\arctg(x)$ ,  $x^{-1}$  a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy. △

**Příklad:** Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

V tomto případě postupujeme následovně

$$f'(x) \stackrel{1}{=} (e^{x \ln x})' \stackrel{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \stackrel{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \stackrel{4}{=} x^x (1 + \ln x).$$

Postupně jsme použili:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce  $e^x$ ,
3. derivace součinu a znalost derivace  $\ln x$ , resp.  $x$ ,
4. algebraické úpravy. △

Úprava použitá v předchozím příkladě, tedy přepis na exponenciálu se často používá právě u takovýchto druhů funkcí. Jako další příklad ještě uveďme

$$\begin{aligned} \left( (2 + \sin x)^{\cos x} \right)' &= \left( e^{\cos(x) \ln(2 + \sin x)} \right)' = \\ &= e^{\cos(x) \ln(2 + \sin x)} \cdot \left( -\sin(x) \ln(2 + \sin x) + \frac{\cos^2(x)}{2 + \sin x} \right). \end{aligned}$$

## 4.5 Další poznámky

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme malou poznámku k jednostranné derivaci a k derivacím vyšších řádů.

Lze definovat derivaci funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Příklad:** Uvažme funkci  $f(x) = |x|$ . Pro  $x \neq 0 = a$  platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale  $f'(0)$  neexistuje. △

Derivací funkce  $f$  dostáváme novou funkci  $f'$ , jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní  $D_f$ . Nyní můžeme znovu derivovat  $f'$ , tj. sestrojít  $f''$ . Rekursivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), \quad n \geq 1.$$

**Příklad:** Například pro  $f(x) = x^3 - 2x + 4$  máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad n \geq 4. \quad \triangle$$

**Poznámka (Mathematica):** K výpočtu derivace lze využít příkazu  $D[f, x]$ , zde  $f$  je derivovaná funkce (výraz) a  $x$  proměnná, podle které se derivuje. Derivaci vyššího řádu lze zapsat například takto  $D[f, \{x, n\}]$ .

## 4.6 Extrémy funkce

Řada praktických problémů může být formulována jako optimalizační (minimalizační či maximalizační) úloha. Ve své nejjednodušší podobě zní následovně: různé „případy“ jsou očíslovány parametrem  $x$  a hledáme takové řešení, které minimalizuje/maximalizuje jistou funkci  $f(x)$  (např. zisk). Uvedme několik jednoduchých příkladů.

- Pastevce má k dispozici 500 metrů ohradníku. Chce postavit pravoúhlou ohradu pro ovce na břehu řeky. Jaké délky stran má zvolit, aby výběh pro ovce byl co největší (tedy měl největší plochu)?
- Jsou zadána čtyři čísla  $a, b, c, d$ . Nalezněte  $x$ , které aproximuje tato čísla tak, že součet kvadrátů jeho odchylek od těchto čísel je nejmenší.
- Tuhost trámu je přímo úměrná jeho šířce a třetí mocnině jeho výšky. Jaké rozměry trámu máme zvolit, abychom z kmene o kruhovém průřezu poloměru  $r$  získali nejtužší trám?

Samozřejmě v realitě je často zapotřebí uvažovat ne jen jednu proměnnou  $x$ , ale dvě a nebo více. Řešením těchto otázek se zabývá teorie funkce více proměnných. Důležitou informací je, že hledání extrému postupuje v zásadě podle stejného scénáře jako v případě našich funkcí jedné proměnné.

Nejprve si přesně zavedme pojem minima a maxima funkce.

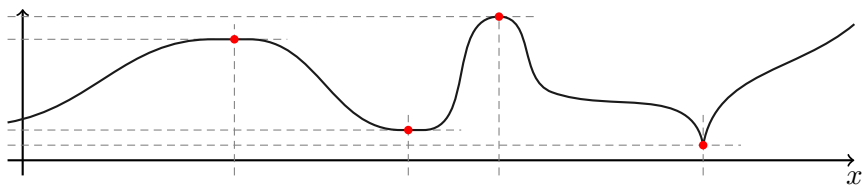
**Definice 87:** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné)  $H_a \subset D_f$  bodu  $a$  tak, že

1. pro všechna  $x \in H_a$  platí  $f(x) \leq f(a)$ ,
2. pro všechna  $x \in H_a$  platí  $f(x) \geq f(a)$ ,
3. pro všechna  $x \in H_a \setminus \{a\}$  platí  $f(x) < f(a)$ ,
4. pro všechna  $x \in H_a \setminus \{a\}$  platí  $f(x) > f(a)$ .

Lokální maximum a lokální minimum společně nazýváme **lokální extrém**. Následující věta dává nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému. Pro lepší představu a orientaci mezi těmito typy extrémů uvádíme obrázek 4.6.



Obrázek 4.6: K definici různých typů extrémů.

Nyní se můžeme snažit odpovědět na otázku, jak extrémy funkcí hledat. První výsledek je negativního charakteru, říká nám kde zcela jistě extrémy funkce nenastávají.

**Věta 88** (Nutná podmínka existence lokálního extrému): Nechť funkce  $f$  má v bodě  $a$  lokální extrém. Potom  $f'(a) = 0$ , nebo derivace v bodě  $a$  neexistuje.

*Důkaz.* Kdyby např.  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ , potom lze nalézt  $\varepsilon > 0$  tak, že pro všechna  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$  platí

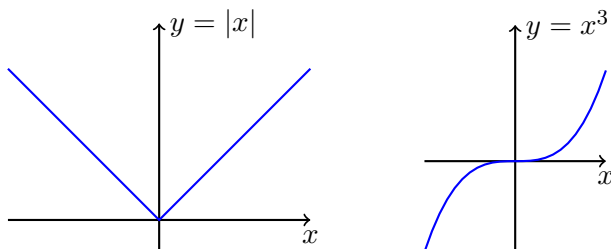
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Potom ale platí  $f(x) > f(a)$  pro  $x \in (a, a + \varepsilon)$  a  $f(x) < f(a)$  pro  $x \in (a - \varepsilon, a)$ . Funkce  $f$  tedy v bodě  $a$  nemá lokální extrém. Podobně lze postupovat v případě  $f'(a) < 0$ .  $\square$

**Příklad** (Extrém v bodě s neexistující derivací): Uvažme funkci  $f(x) := |x|$ . Funkce  $f$  má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.  $\triangle$

**Příklad** (Bod nulové derivace bez extrému): Funkce  $f(x) := x^3$  má v bodě 0 nulovou derivaci,  $f'(0) = 0$ , avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém  $\mathbb{R}$ . Jinak řečeno, k tomu aby funkce v bodě  $a$  měla extrém **nestačí** aby  $f'(a) = 0$ . Tento omyl je **častým zdrojem chyb**.  $\triangle$

Grafy funkcí z předchozích dvou příkladů jsou uvedeny na obrázku 4.7.



Obrázek 4.7: Graf absolutní hodnoty (v bodě 0, kde neexistuje derivace, nabývá minima) a funkce  $x^3$  (v bodě 0 sice má nulovou derivaci, ale v tomto bodě nenabývá extrému).

Obecně ani nevíme, jestli daná funkce vůbec extrém má. Jedná-li se ale o funkci spojitou na uzavřeném intervalu, pak je existence extrémů zaručena následující větou.

**Věta 89** (Extrém spojitě funkce na uzavřeném intervalu): Funkce  $f$  spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém

může být pouze v krajních<sup>2</sup> bodech  $a, b$  a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

*Důkaz.* Již víme, že je-li  $f$  spojitá, pak obrazem uzavřeného intervalu  $J = \langle a, b \rangle$  je opět uzavřený interval  $f(J)$ . Vzpomeňte na větu 78. Krajní body tohoto intervalu pak představují globální maximum, resp. minimum, příslušné funkce na příslušném intervalu.  $\square$

Tuto větu lze s výhodou použít, hledáme-li pouze největší a nejmenší hodnotu spojitě funkce  $f$  na uzavřeném intervalu  $J$  a nezajímají nás další detaily o průběhu funkce  $f$ . Stačí pouze porovnat funkční hodnoty v bodech podezřelých z extrému, tedy bodech kde je derivace funkce  $f$  nulová nebo neexistuje, nebo v krajních bodech intervalu.

**Příklad:** Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)$$

na intervalu  $\langle 0, 2 \rangle$ . Derivace je nulová v bodě  $\frac{3}{2}$ , porovnáním funkčních hodnot

$$f(0) = 2, \quad f(3/2) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globální maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě  $\frac{3}{2}$  s hodnotou  $-\frac{1}{4}$ . Graf uvažované funkce je na obrázku 4.8.  $\triangle$

**Příklad:** Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabíčku tak, že vystříhneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabíčka bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Vizte obrázek 4.9. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabíčky největší.

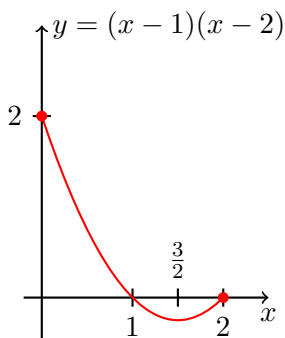
Označme stranu vystřižených čtverců symbolem  $x$ . Pro objem krabíčky  $O(x)$  platí

$$O(x) = x(8 - 2x)(3 - 2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

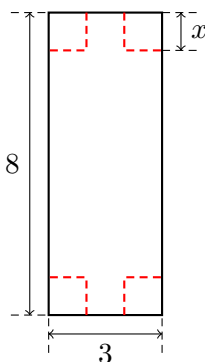
kde  $x \in \langle 0, 3/2 \rangle$ . Derivace  $O(x)$  je nula pouze v bodech 3 a  $2/3$ , ovšem pouze  $2/3 \in \langle 0, 3/2 \rangle$ . V tomto bodě nastává i maximum  $O(2/3) = 200/27 \text{ cm}^3$ , protože  $O(0) = O(3/2) = 0$ .  $\triangle$

---

<sup>2</sup>Krajní body také patří do kategorie bodů, kde derivace neexistuje, protože funkce není definována na celém jejich okolí a proto nemůže mít derivaci. Explicitně je ale uvádíme, aby na ně případný čtenář nezapomněl.



Obrázek 4.8: Ukázka globálních extrémů spojitě funkce na uzavřeném intervalu.



Obrázek 4.9: Konstrukce krabice z papíru tvaru obdélníka.

Na závěr této podkapitoly ještě poznamenejme, že uzavřenost intervalu v předchozí větě [89](#) je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

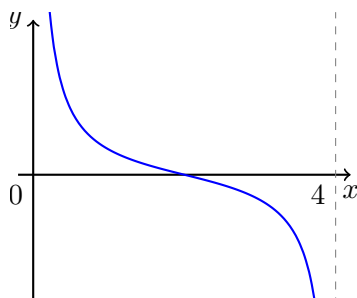
spojitou na otevřeném intervalu  $J = (0, 4)$ . Tato funkce nemá na  $J$  ani maximum ani minimum. Skutečně, platí totiž

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$

Graf této funkce je uveden na obrázku [4.10](#).

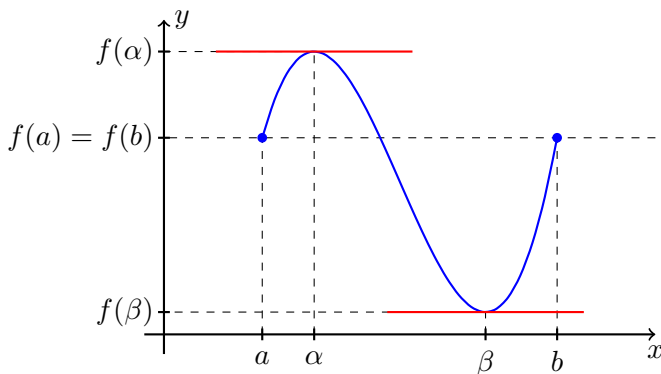




Obrázek 4.10: Funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí mít minimum ani maximum.

## 4.7 Věta o přírůstku funkce

Intuitivně (z geometrické interpretace derivace jako tečny) tušíme, že pokud je derivace funkce kladná na intervalu  $I$ , pak je funkce rostoucí na intervalu  $I$ . Pomocí Lagrangeovy věty, kterou zanedlouho zformulujeme, bude snadné správnost této intuice ověřit.



Obrázek 4.11: Demonstrace k Rolleově větě.

Pozorování: Pro „pěknou“ funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou  $x$ .

**Věta 90 (Rolleova):** Nechť funkce  $f$  splňuje podmínky

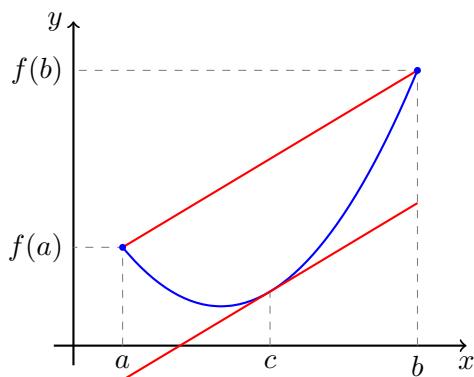
1.  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,
2.  $f$  má derivaci v každém bodě intervalu  $(a, b)$ ,
3.  $f(a) = f(b)$ .

Potom existuje  $c \in (a, b)$  tak, že  $f'(c) = 0$ .

*Důkaz.* Pokud je funkce  $f$  konstantní, lze za  $c$  volit libovolné číslo z intervalu  $(a, b)$ .

V případě, že  $f$  není konstantní, je  $f(\langle a, b \rangle) = \langle A, B \rangle$  uzavřený interval (to jak víme, plyne ze spojitosti  $f$ ). Existují tedy  $\alpha, \beta \in \langle a, b \rangle$  tak, že  $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$ .

Protože  $f(a) = f(b)$  leží alespoň jeden z bodů  $\alpha, \beta$  uvnitř  $(a, b)$ . Označme tento bod  $c$ . Funkce  $f$  má v bodě  $c$  lokální extrém, a proto  $f'(c) = 0$ . Skutečně, funkce  $f$  má totiž derivaci v každém bodě intervalu  $(a, b)$ .  $\square$



Obrázek 4.12: Demonstrace k Lagrangeově větě.

Přírůstek funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  je  $f(b) - f(a)$ . Lze ho odhadnout?

**Věta 91** (Lagrangeova, O přírůstku funkce): Necht funkce  $f$  splňuje podmínky

1.  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,
2.  $f$  má derivaci v každém bodě intervalu  $(a, b)$ .

Potom existuje bod  $c \in (a, b)$  tak, že  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

*Důkaz.* Položme  $g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ . Tato funkce je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , má derivaci v každém bodě intervalu  $(a, b)$  a navíc  $g(a) = g(b) = f(a)$ . Proto podle Rolleovy věty existuje  $c \in (a, b)$  tak, že

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

## 4.8 Důsledky pro vyšetřování průběhu funkce

Pomocí věty o přírůstku funkce 91 můžeme přesně zformulovat vztah mezi monotoní a první derivací funkce. Nejprve si zavedme vhodné značení.

**Definice 92:** Nechť  $J$  je interval s krajními body  $a$  a  $b$ . Potom **vnitřkem intervalu**  $J$  nazveme otevřený interval  $(a, b)$ . Značíme ho  $J^\circ = (a, b)$ .

**Věta 93:** Nechť  $f$  je spojitá na intervalu  $J$  a nechť pro každé  $x \in J^\circ$  existuje  $f'(x)$ . Potom platí následujících pět tvrzení,

1.  $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) \geq 0) \Rightarrow f$  je neklesající na  $J$ ,
2.  $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) \leq 0) \Rightarrow f$  je nerostoucí na  $J$ ,
3.  $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) > 0) \Rightarrow f$  je rostoucí na  $J$ ,
4.  $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) < 0) \Rightarrow f$  je klesající na  $J$ ,
5.  $(\forall x \in J^\circ)(f'(x) = 0) \Rightarrow f$  je konstantní na  $J$ .

*Důkaz 1. tvrzení, ostatní naprosto analogicky.* Budte  $x_1, x_2 \in J$  taková, že  $x_1 < x_2$ . Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce aplikované na interval  $\langle x_1, x_2 \rangle$  existuje  $c \in (x_1, x_2)$  tak, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Protože  $c \in J^\circ$ , je  $f'(c) \geq 0$ . Tudíž

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2). \quad \square$$

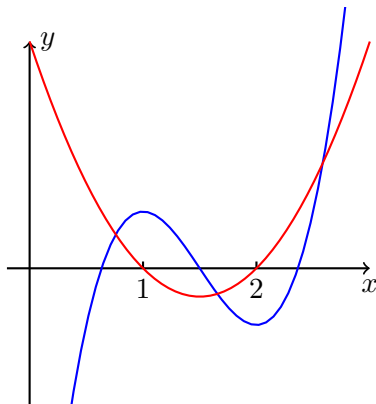
Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce  $f$  diferencovatelná, pak o tom zda roste či klesá rozhoduje znaménko její derivace. Pro lepší představu uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

pro jejíž derivaci platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Porovnejte funkci a její derivaci na obrázku 4.13.



Obrázek 4.13: Funkce a její derivace. Znaménko derivace rozhoduje o monotonii funkce.

Zjistili jsme, že první derivace funkce  $f$  souvisí s monotonií funkce  $f$ . Nyní ukážeme, že druhá derivace funkce  $f$  dále souvisí s tvarem grafu funkce  $f$ . Nejprve zavedme potřebné pojmy.

**Definice 94:** Necht funkce  $f$  má konečnou derivaci v bodě  $a \in D_f$ . Pokud existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  takové, že pro všechna  $x \in H_a \setminus \{a\}$  leží všechny body  $(x, f(x))$  nad (resp. pod) tečnou funkce  $f$  v bodě  $a$ ,

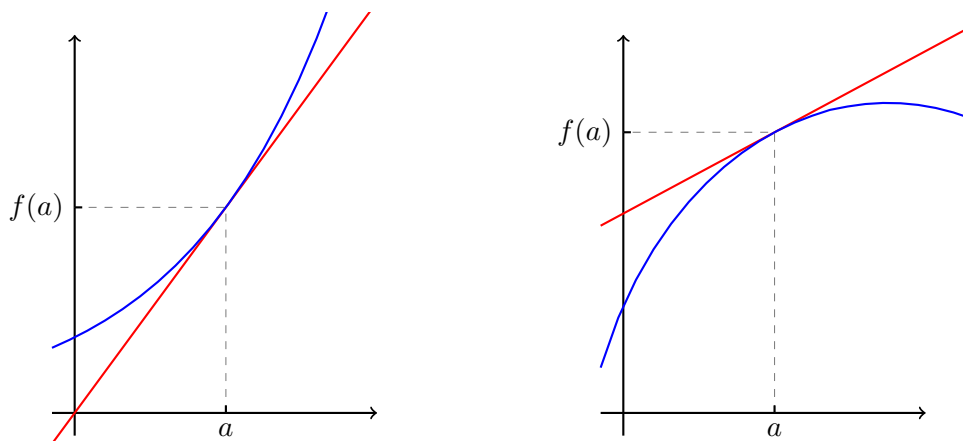
$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

pak  $f$  nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě  $a$** .

K osvětlení terminologie uvedme etymologický význam obou pojmů. *Convexum* má v latině význam údolí a *concavum* význam výdutě. Ukázka konvexní a konkávní funkce je dále uvedena na obrázku 4.14.

**Věta 95:** Necht funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $J$  a diferencovatelná na intervalu  $J^\circ$ .

- Pokud je  $f''$  kladná na  $J^\circ$ , pak je funkce  $f$  konvexní v každém bodě  $J^\circ$ .



Obrázek 4.14: Konvexní a konkávní funkce.

- Pokud je  $f''$  záporná na  $J^\circ$ , pak je funkce  $f$  konkávní v každém bodě  $J^\circ$ .

*Důkaz konvexního případu.* Podle předchozí věty 93 víme, že  $f'$  je rostoucí na  $J$ . Buď  $a \in J^\circ$  libovolný. Pokud  $x \in J$ ,  $x > a$ , potom podle Lagrangeovy věty 91 existuje  $c \in (a, x)$  takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pokud  $x \in J$ ,  $x < a$ , potom existuje  $c \in (x, a)$  takové, že

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) > f(a) + f'(a)(x - a),$$

protože nyní  $x - a < 0$  a  $f'(c) < f'(a)$ . □

**Definice 96:** Necht  $f$  je spojitá v bodě  $c$ . Bod  $c$  nazýváme **inflexním bodem** funkce  $f$ , právě když existuje  $\delta > 0$  takové, že  $f$  je konvexní na intervalu  $(c - \delta, c)$  a konkávní na intervalu  $(c, c + \delta)$ , nebo naopak.

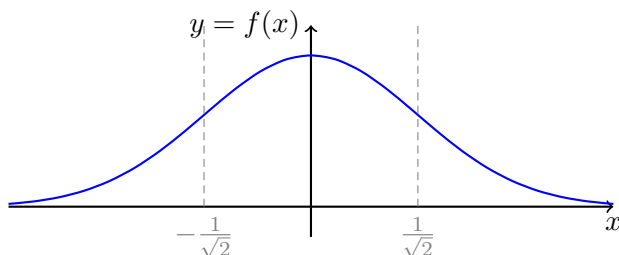
**Příklad:** Nalezněte inflexní body funkce  $f(x) = e^{-x^2}$ .

Je potřeba vypočíst druhou derivaci zadané funkce,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

Vidíme, že znaménko druhé derivace je kladné pro  $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$  a záporné pro  $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Funkce  $f$  je proto konvexní na  $(-\infty, -1/\sqrt{2})$  a  $(1/\sqrt{2}, +\infty)$  a konkávní na  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ . Inflexními body tedy jsou body  $1/\sqrt{2}$  a  $-1/\sqrt{2}$ . Funkce je znázorněna na obrázku 4.15.  $\triangle$



Obrázek 4.15: Inflexní body

**Definice 97:** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $a$  **asymptotu**  $x = a$ , právě když  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  nebo  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  existuje a je rovna  $+\infty$  nebo  $-\infty$ . Řekneme, že přímka  $y = kx + q$  je **asymptotou** funkce  $f$  v  $+\infty$ , resp. v  $-\infty$ , když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - q) = 0 \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0.$$

**Poznámka:** Má-li být přímka  $y = kx + q$  asymptotou funkce  $f$  v  $+\infty$ , pak nutně

$$1. \ 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - k \text{ a proto}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4.2)$$

2. Podobně

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx, \quad (4.3)$$

kde  $k$  jsem spočetli v předchozím bodu.

**Příklad:** Nalezněte asymptoty funkce  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{|x - 1|} + 1$ . Proberme postupně možné body, kde se může mít zadaná funkce asymptotu.

- Bod  $x = 1$  nepatří do  $D_f$  a  $\lim_{x \rightarrow 1_{\pm}} f(x) = +\infty$ . Tudíž přímka  $x = 1$  je asymptotou  $f$  v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v  $+\infty$ ,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - x} + \frac{1}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 1} + 1 - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + x}{x - 1} + 1 = 2.$$

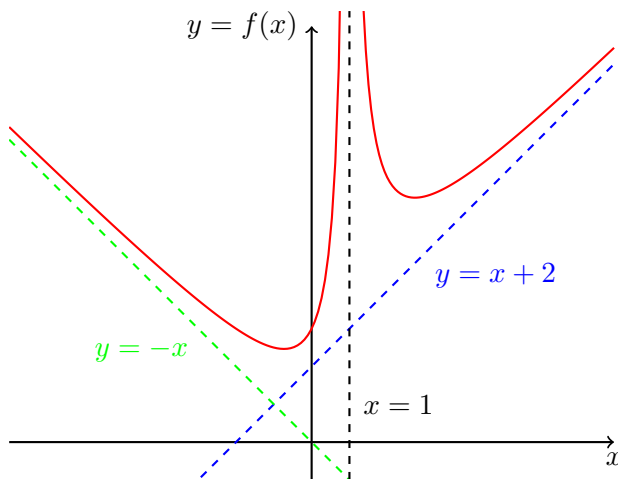
- Podobně, pro asymptotu v  $-\infty$  máme

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{-x^2 - x} + \frac{1}{x} = -1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{-x + 1} + 1 - (-1) \cdot x = 0.$$

Nalezené asymptoty jsou uvedeny na obrázku 4.16.

△



Obrázek 4.16: Asymptoty funkce.

Shrňme si vztah mezi funkcí a její první a druhou derivací na několika názorných ukázkách, vizte obrázek 4.17.

**Poznámka:** Na závěr této kapitoly poznamenejme co máme na mysli pod **vyšetřováním průběhu funkce**. Při vyšetřování průběhu funkce  $f$  zkoumáme:

1. definiční obor funkce  $f$ , průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech, resp. nekonečnách,
3. existenci derivace  $f'$ , monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace  $f''$ , konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce  $f$ .

## 4.9 l'Hospitalovo pravidlo

K výpočtu limit neurčitých výrazů se často hodí l'Hospitalovo pravidlo.

**Věta 98** (l'Hospitalovo pravidlo): Necht pro funkce  $f$  a  $g$  a bod  $a \in \mathbb{R}$  platí

1.  $\lim_a f = \lim_a g = 0$  nebo  $\lim_a |g| = +\infty$
2. existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  splňující  $H_a \setminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$ ,
3. existuje  $\lim_a \frac{f'}{g'}$ .

Potom existuje  $\lim_a \frac{f}{g}$  a platí  $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$ .

*Důkaz.* Důkaz vynecháváme. □

**Příklad:** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Použití l'Hospitalova pravidla je korektní. Jednalo se o limitu typu  $\frac{0}{0}$ , limita podílů derivací existuje, oba podíly jsou definovány na okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (podíl derivací dokonce definovaný i v 0). △



**Příklad:** Vypočtěte limitu  $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x)$ . Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Opět poznamenejme, že l'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Po vhodné úpravě se jedná o limitu typu  $\frac{\infty}{\infty}$ , limita podílu derivací existuje a oba podíly jsou definovány na pravém okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (např.  $(0, 1)$ ).

K tomuto příkladu ještě poznamenejme, že pokud bychom výraz upravili takto,

$$x \ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}},$$

tak bychom sice získali limitu typu  $\frac{0}{0}$ , ale limitu podílu derivací bychom vypočítat nedokázali. Dostali bychom se tedy do slepé uličky.  $\triangle$

**Příklad:** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Nyní je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

L'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Jedná se vždy o limitu typu  $\frac{\infty}{\infty}$ , podíly jsou definovány na okolí bodu  $+\infty$  a poslední z limit existuje, tudíž existují i všechny předchozí.  $\triangle$

**Poznámka:** Upozorníme na častý omyl vyskytující se u příkladů podobných předchozímu. Často se objevuje argument „limita je rovna  $+\infty$  protože exponenciála roste rychleji než polynom“. To je sice dobrá intuice, ale není dostatečně přesná. Jak rychleji musí růst čítec vůči jmenovateli, aby limita byla  $+\infty$ ? Na to intuice vůbec nestačí. Například v limitě

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+\sqrt{x}}$$

také čítec roste rychleji než jmenovatel, ale hodnota této limity je  $\frac{1}{2}$ .

Na předchozí příklad je nutné se dívat právě naopak. Vypočetli jsem (pomocí l'Hospitalova pravidla) limitu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

**Protože** tato limita vyšla  $+\infty$ , **můžeme tvrdit**, že exponenciála  $e^x$  roste rychleji než  $x^2$ . Všimněte si, že původní intuitivní úvaha jde přesně opačným směrem.

**Příklad** (Důležitost předpokladů): Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin(x)}{x + \sin(x)} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = 1.$$

Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.
2. Limita nalevo od  $\stackrel{2}{=}$  vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočítat bez l'Hospitalova pravidla,

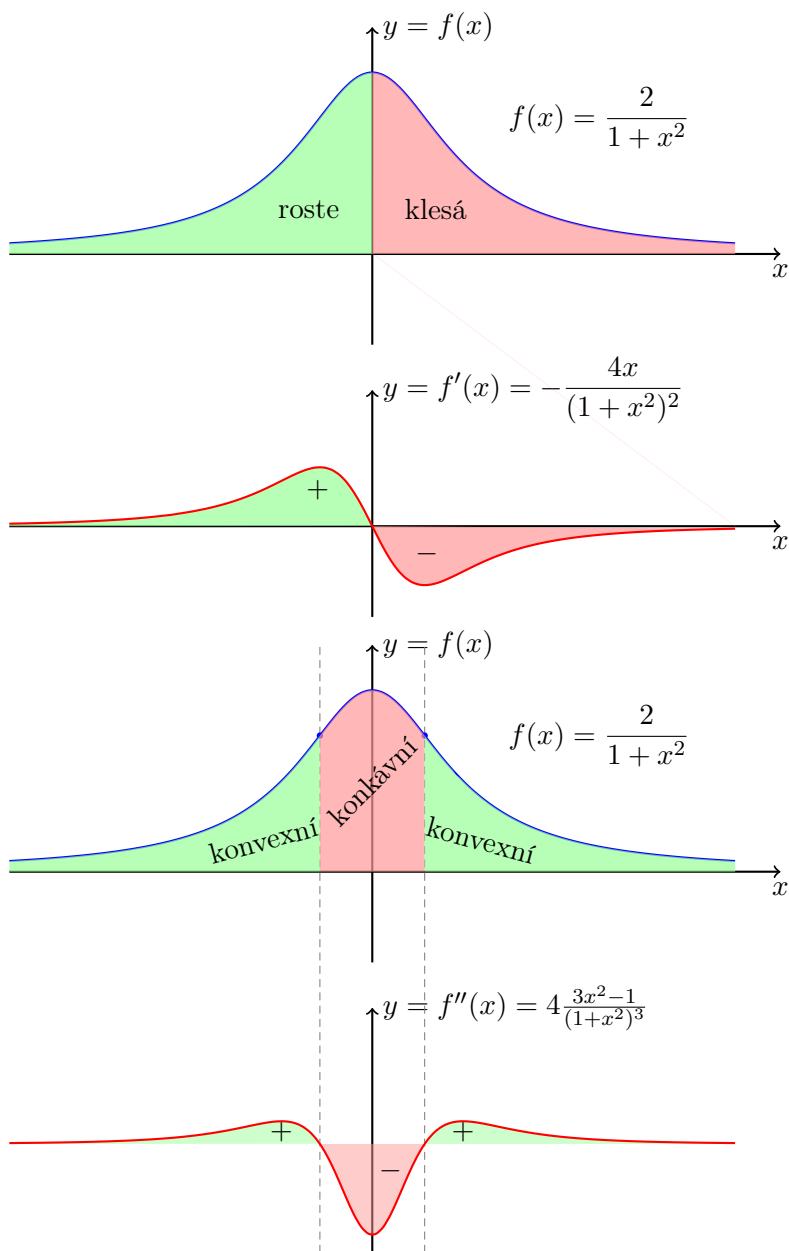
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin(x)}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\sin(x)}{x}}{1 + \frac{\sin(x)}{x}} = 2. \quad \triangle$$

**Příklad** (Bludný kruh): V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití l'Hospitalova pravidla nevede k cíli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali. Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1. \quad \triangle$$



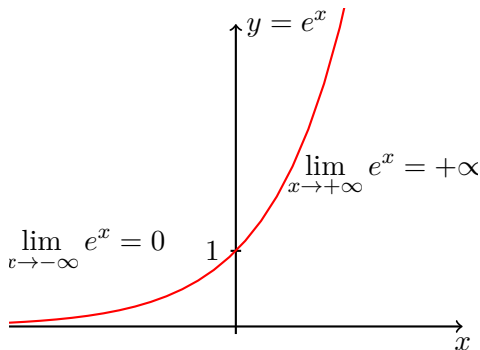
Obrázek 4.17: Vztah první derivace a monotonie funkce, druhé derivace a konvexnosti resp. konkávnosti.

## 4.10 Příklady

Nejprve si ukážeme vyšetřování průběhu na velmi jednoduchých příkladech.

**Příklad:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = e^x$ . Protože  $f'(x) = f''(x) > 0$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$  je funkce  $f(x)$  rostoucí a konvexní na celém  $\mathbb{R}$ . Asymptota funkce existuje pouze v  $-\infty$  a její přímkou je  $y = 0$ . Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 4.18.

△



Obrázek 4.18: Graf funkce  $e^x$ .

**Příklad:** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \ln x$ . Nyní  $D_f = (0, +\infty)$  a  $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$  a  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  pro každé  $x > 0$ . Tudíž  $f$  je rostoucí a konkávní, jedinou asymptotou je přímka  $x = 0$ . Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 4.19. △

**Příklad:** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}.$$

Odmocnina je lichá, tedy  $D_f = \mathbb{R}$ . Průsečík s osou  $y$  je  $f(0) = 0$ . Průsečíky s osou  $x$  jsou řešením rovnice

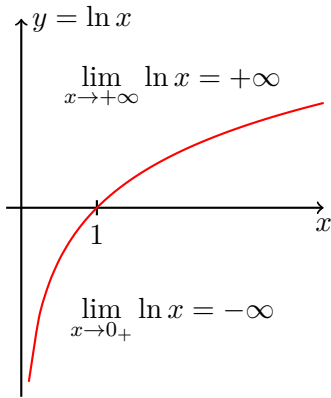
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i  $x = -3$ ).

Funkce je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ . Zkoumejme existenci asymptot v  $\pm\infty$ ,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1.$$



Obrázek 4.19: Grafu funkce  $\ln x$ .

Přímka  $y = -x + 1$  je tedy asymptotou v  $+\infty$  i  $-\infty$ .

Pro derivaci funkce  $f$  platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje,} & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0). Z první derivace podle znaménka určíme typ monotonie.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko $f'$	–	+	–	–
monotonie $f$	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém  $\mathbb{R}$  implikuje lokální minimum v bodě 0 ( $f(0) = 0$ ) a maximum v bodě 2 ( $f(2) = \sqrt[3]{4}$ ). Navíc ze spojitosti na  $\mathbb{R}$  a z limit  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$  plyne  $H_f = \mathbb{R}$ .

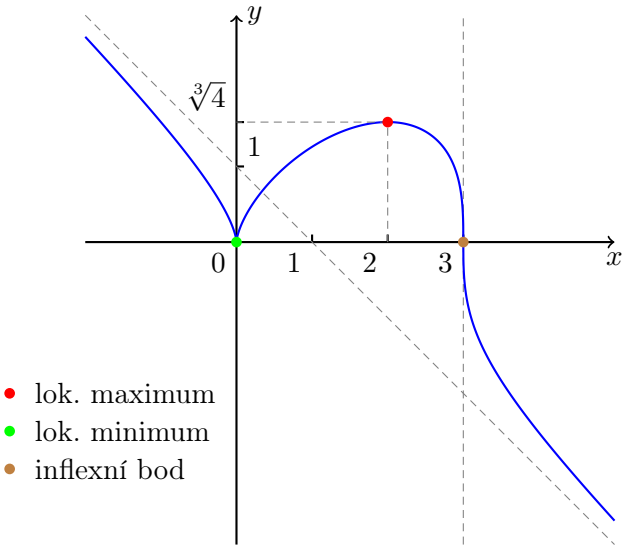
Pro druhou derivaci v bodech  $x \neq 0, 3$  dostáváme

$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{(x-3)^{5/3}}.$$

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko $f''$	–	–	+
	konkávní	konkávní	konvexní

Nyní můžeme načrtnout graf funkce  $f$ , vizte obrázek 4.20. △



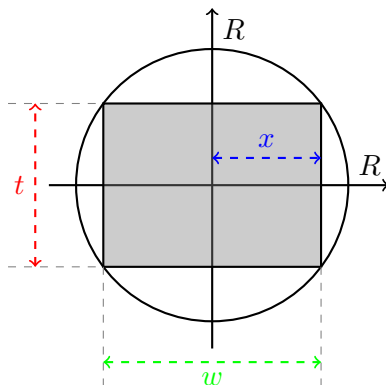
Obrázek 4.20: Průběh funkce  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ .

**Příklad:** Tuhost  $T$  trámu s obdélníkovým průřezem je úměrná součinu jeho šířky (horizontální rozměr)  $w$  a třetí mocnině tloušťky (vertikální rozměr)  $t$ . Při jakých rozměrech lze dosáhnout největší tuhosti trámu, máme-li k dispozici strom o kruhovém průřezu s poloměrem  $R$ ?

Parametrizujme trám pomocí parametru  $x$  podle obrázku 4.21. Tedy  $w = 2x$  a  $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ . Uvažujme  $2x = w \in \langle 0, 2R \rangle$ , resp.  $x \in \langle 0, R \rangle$ .

Tudíž,

$$T(x) = c \cdot w \cdot t^3 = 2^4 \cdot c \cdot x (R^2 - x^2)^{3/2}.$$



Obrázek 4.21: Parametrizace problému s trámem.

Hledáme extrém této funkce, derivací je

$$T'(x) = 2^4 \cdot c \cdot \left( (R^2 - x^2)^{3/2} - 3x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) = 2^4 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot (R^2 - 4x^2).$$

Nulovým bodě derivace je bod  $x_* = \frac{R}{2}$ . Funkci  $T$  vyšetřujeme pouze na intervalu  $J$ . Vidíme, že na intervalu  $(0, \frac{R}{2})$  funkce  $T$  roste na intervalu  $(\frac{R}{2}, R)$  klesá. V bodě  $x_*$  tudíž nastává lokální maximum. Pro extrémální rozměry trámu platí

$$w_* = 2x_* = R \quad \text{a} \quad t_* = 2\sqrt{R^2 - x_*^2} = \sqrt{3}R. \quad \triangle$$

**Příklad** (Elementární metoda nejmenších čtverců): Necht je zadáno  $n$  čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Nalezněte  $x \in \mathbb{R}$  tak, aby součet kvadrátů odchylek  $x$  od každého  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , byl minimální.

Označme

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2.$$

Pro derivaci platí (derivujeme součet)

$$f'(x) = \left( \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2 \right)' = \sum_{i=1}^n \left( (x - a_i)^2 \right)' = \sum_{i=1}^n 2(x - a_i)i.$$

Řešením rovnice  $f'(x) = 0$  je  $x_* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ . Protože  $f''(x) = 2n > 0$  nastává bodě  $x_*$  minimum funkce  $f$ .  $\triangle$

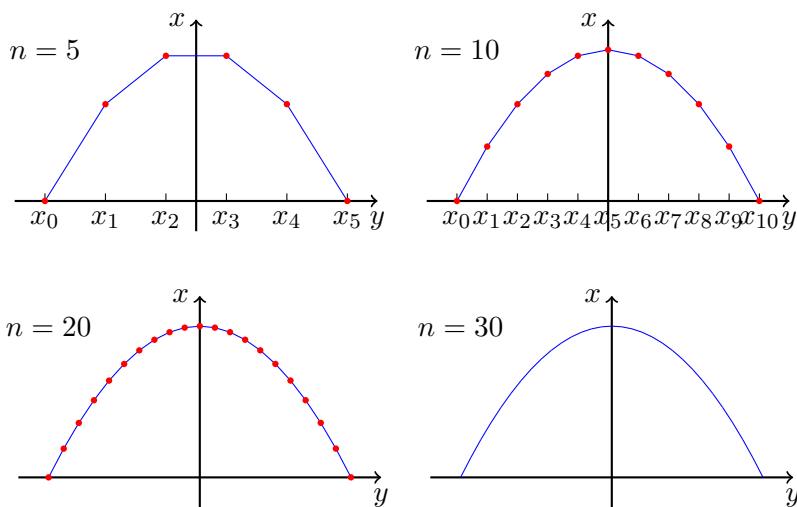
## 4.11 Interpolace: Splines

Jak v těchto prezentacích a handoutech vlastně vykreslujeme grafy funkcí? Nejjednodušším způsobem, a to tzv. **lineární interpolací**.

Postup je jednoduchý: pro vykreslení například funkce  $f(x) := 1 - x^2$  na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$

1. zvolme  $n + 1$  vzorkovacích bodů  $x_i = -1 + \frac{2}{n} \cdot i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , pro vhodně zvolené  $n$ ,
2. vypočtěme vzorky  $f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,
3. spojme sousední body  $(x_i, f(x_i))$  a  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , přímkou.

Pro oku lahodící výsledek je však nutné volit vzorkovací mřížku dostatečně hustou. Porovnejte různé výsledky na obrázku 4.22.

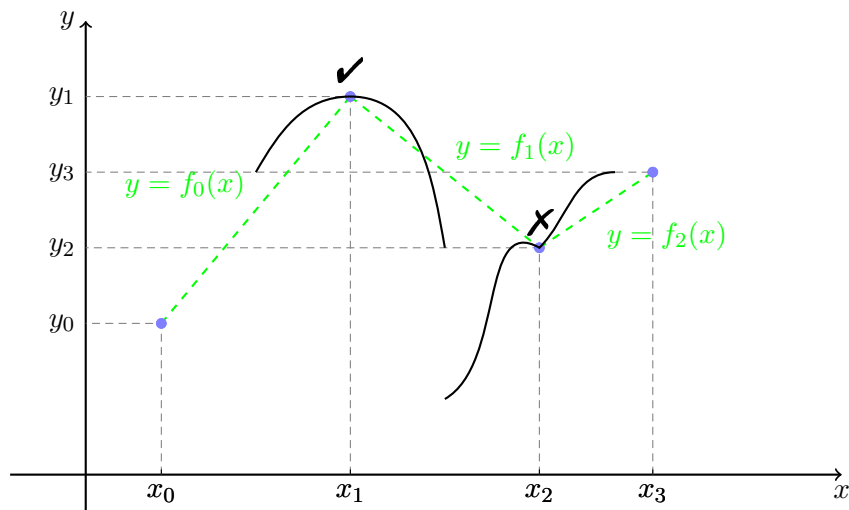


Obrázek 4.22: Lineární interpolace.

Spojit dva body v rovině přímkou je jednoduché. Přímka je totiž jednoznačně zadána dvěma body. Místo přímky (lineární funkce  $y = ax + b$ ) se často využívá polynomů třetího stupně,  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Polynom 3. stupně je, na rozdíl



od lineární funkce, jednoznačně zadán čtyřmi parametry. Jak je volit? Jako demonstrativní příklad si ukážeme způsob jak interpolovat křivku mezi čtyřmi předem zadanými body (které jsme mohli získat např. vzorkováním předem dané funkce).



Obrázek 4.23: Interpolace.

Nechť jsou zadány body  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ . Body spojíme třemi kubickými polynomy  $y = f_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0$  a podobně pro  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ . Tj. je třeba určit 12 neznámých. Chceme, aby křivka byla „co nejhladší“. Zřejmým požadavkem tedy je

$$f_0(x_0) = y_0, \quad f_0(x_1) = f_1(x_1) = y_1, \quad f_1(x_2) = f_2(x_2) = y_2 \text{ a } f_2(x_3) = y_3.$$

Dále požadujeme, aby na sebe křivky navazovaly se stejným sklonem, tj.

$$f'_0(x_1) = f'_1(x_1) \text{ a } f'_1(x_2) = f'_2(x_2),$$

a konvexitou/konkavitou]

$$f''_0(x_1) = f''_1(x_1) \text{ a } f''_1(x_2) = f''_2(x_2).$$

Tato situace je znázorněna na obrázku 4.23. Celkem jsme sestavili 10 rovnic pro 12 neznámých. Pokud dovolíme uživateli předepsat sklon křivky na krajích, tak získáme další dvě rovnice,  $f'_0(x_0) = \alpha$  a  $f'_2(x_3) = \beta$ , a celkem tak máme 12 rovnic pro 12 neznámých.

Takto získaná soustava je lineární a k jejímu řešení můžeme (budeme moci) využít metod Lineární algebry. Na EDUXu BI-ZMA si může zaujatý čtenář stáhnout interaktivní demonstraci v *Mathematica* a detailněji prozkoumat zde popsaný postup.

## 4.12 Separace kořenů

Pokud máme pro funkci  $f$  spojitou na intervalu  $J$  řešit rovnici

$$f(x) = 0,$$

pak máme k dispozici metodu půlení intervalu. Abychom ji ale mohli použít, musíme nalézt intervaly  $\langle a, b \rangle \subset J$  tak, že  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Metoda půlení intervalu pak vždy dá aspoň jeden kořen, v intervalu  $\langle a, b \rangle$  jich však může být více. Je proto vhodné kořeny **separovat**, čili vždy nalézt pro interval  $\langle a, b \rangle$  tak, že v něm leží právě jeden kořen.

**Příklad:** Určete počet reálných kořenů polynomu  $f(x) = x^5 - 5x + 2$  a separujte je.

Řešíme tedy rovnici

$$f(x) = x^5 - 5x + 2 = 0.$$

Definičním oborem funkce  $f$  je celé  $\mathbb{R}$ , funkce  $f$  je spojitá na  $\mathbb{R}$ . Limity v krajních bodech jsou

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left( 1 - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5} \right) = -\infty \cdot 1 = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= (\text{analogicky}) = +\infty. \end{aligned}$$

První derivací funkce  $f$  je

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Shrnujeme, že

- pro  $x \in (-\infty, -1)$  je  $f'(x) > 0$ , tudíž na tomto intervalu  $f$  **roste**,
- pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  je  $f'(x) < 0$ , tudíž na tomto intervalu  $f$  **klesá**,
- pro  $x \in (1, +\infty)$  je  $f'(x) > 0$ , tudíž  $f$  na tomto intervalu **roste**

Proto

- v bodě  $-1$  je lokální maximum s hodnotou  $f(-1) = 6$ ,
- v bodě  $1$  je lokální minimum s hodnotou  $f(1) = -2$ .

Jelikož  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  uzavíráme, že v každém z intervalů

$$(-\infty, -1), \quad \langle -1, 1 \rangle, \quad \langle 1, +\infty \rangle$$

leží **právě jeden kořen**. Rovnice má právě 3 kořeny. Protože navíc  $f(-2) < 0$  a  $f(2) > 0$ , lze pro metodu půlení intervalu použít intervaly

$$\langle -2, -1 \rangle, \quad \langle -1, 1 \rangle, \quad \langle 1, 2 \rangle. \quad \triangle$$

## 4.13 Newtonova metoda: Příklad

K numerickému řešení rovnic typu  $f(x) = 0$  existuje mnoho metod. My zatím známe jen metodu půlení intervalu. V této kapitole si ukážeme Newtonovu<sup>3</sup> metodu. Newtonův přístup podrobně prozkoumáme na následujícím příkladu.

Vypočítejte třetí odmocninu z kladného reálného čísla  $c$ .

Zamyslete se, jak tento problém vyřešit máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, odčítat, násobit a dělit čísla? Tedy operace, které může provádět i člověk s pomocí papíru. Tato otázka může vyvstat v praxi: máme-li zjistit jak velký má být poloměr kulového tankeru o daném objemu  $V$ , dostáváme  $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$ . Pro krychli dostaneme délku hrany rovnou  $a = \sqrt[3]{V}$ .

Buď  $c > 0$ . Označme hledanou třetí odmocninu symbolem  $x$ , tj.  $x = \sqrt[3]{c}$ . Ekvivalentně to znamená řešit rovnici  $x^3 = c$ . Označíme-li  $f(x) := x^3 - c$ , je námi hledané číslo  $x$  **řešením rovnice**

$$f(x) = 0.$$

Tuto bychom se mohli pokusit řešit nám již známou metodou půlení intervalu (jaké dva počáteční body by jste zvolili?). Nyní si však ukážeme další způsob, tzv. **Newtonovu metodu**.

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti  $(x_n)$  aproximující řešení rovnice  $f(x) = 0$ . Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno  $x_n$ .

<sup>3</sup>Sir Isaac Newton, anglický fyzik a matematik, 1642 – 1727.

2. Sestroj tečnu funkce  $f$  v bodě  $x_n$ ,

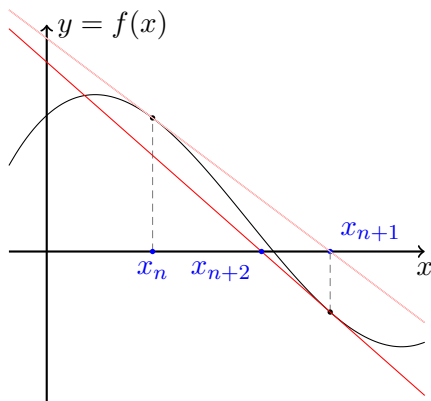
$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

3. Průsečík tečny s osou  $x$  nechť je další člen posloupnosti,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. Opakuj s  $x_{n+1}$  místo  $x_n$ .

Graficky je tento proces znázorněn na obrázku 4.24.



Obrázek 4.24: Dvě iterace Newtonovy metody.

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Ihned se však nabízí následující otázku:

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice  $f(x) = 0$  vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost  $(x_n)$ ?
- Co když  $f'(x_n) = 0$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$ ?

Odpovědi na tyto otázky se v obecném případě nebudeme zabývat. Vraťme se k našemu konkrétnímu případu s třetí odmocninou, kde uvidíme jak na některé z nich odpovědět.

Shrňme si dosavadní výsledky. Je dáno  $c > 0$  a funkce  $f(x) = x^3 - c$ . Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce  $f$  je prostá,  $f((0, +\infty)) = (-c, +\infty)$  a tudíž **existuje právě jedno** kladné řešení rovnice  $f(x) = 0$ . (Tj. vyšetřili jsme průběh funkce  $f$  a zjistili jsme, že rovnice má právě jedno řešení.)
- Konverguje-li posloupnost  $(x_n)$  ke konečné kladné limitě  $a$ , potom

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2} \right) = \frac{2}{3}a + \frac{c}{3a^2}.$$

Tudíž  $a$  je hledané řešení,

$$a^3 = c, \quad \text{nebo-li} \quad f(a) = 0.$$

Nyní je tedy otázkou, jestli naše posloupnost  $(x_n)$  skutečně konverguje.

**Věta 99** (Vlastnosti  $(x_n)$ ): Buď  $c > 0$  a  $(x_n)$  posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

*Důkaz.* Položme  $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$  pro  $x > 0$ . Vyšetřením průběhu zjistíme, že  $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$ , kde rovnost nastává právě tehdy, když  $x = \sqrt[3]{c}$ . Tudíž:

- Pokud  $x_1 = \sqrt[3]{c}$ , potom  $x_n = \sqrt[3]{c}$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .
- Pokud  $x_1 > \sqrt[3]{c}$ , potom  $x_n > \sqrt[3]{c}$  pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ . Navíc posloupnost  $(x_n)$  je klesající:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$

a zdola omezená číslem  $\sqrt[3]{c}$ . Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.

- Pokud  $0 < x_1 < \sqrt[3]{c}$ , pak  $x_2 > \sqrt[3]{c}$  a můžeme použít předchozí bod. □

Nyní víme, že posloupnost konverguje nezávisle na volbě první aproximace. To je dobré, ale k praktickému použití nestatečné. Kdy máme iteraci zastavit? Je potřeba odhadnout chybu mezi členy posloupnosti a skutečnou (neznámou) hodnotou hledané třetí odmocniny.

**Důsledek 100** (Odhad chyby): Buď  $(x_n)$  posloupnost popsaná v předešlé větě. Potom platí

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad \text{pro } n = 2, 3, \dots$$

*Důkaz.* Z předešlé věty víme, že pro  $n = 2, 3, \dots$  jistě platí  $\sqrt[3]{c} < x_{n+1} < x_n$ . Potom pro tato  $n$  platí i

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 3x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 2x_n + \underbrace{\frac{c}{x_n^2} - \sqrt[3]{c}}_{<0} < 2(x_n - x_{n+1}). \quad \square$$

**Poznámka:** Toto je pro praktické účely **velmi** důležitý výsledek. Pomocí dvou naposledy vypočtených členů posloupnosti můžeme odhadnout chybu mezi posledním členem a skutečnou hodnotou  $\sqrt[3]{c}$  (tu neznáme!) a tím **dodržet požadovanou přesnost**.

Shrňme si vlastnosti Newtonovy metody aplikované na problém hledání třetí odmocniny.

1. Posloupnost  $(x_n)$  zadaná rekurentně vztahem

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje pro libovolně zvolené  $x_1$  k číslu  $\sqrt[3]{c}$ .

2. Chybu mezi  $x_n$  a skutečnou hodnotou  $\sqrt[3]{c}$  lze odhadnout pomocí posledních dvou napočtených členů:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

Tato informace nám umožňuje výpočet zastavit po dosažení požadované přesnosti.

Jako ukázkou použití metody uvádíme tabulku 4.2 s výpočtem třetí odmocniny z čísla 7. Jako první iteraci volíme číslo 7 samotné. To není optimální volba.

Na výpočtu v tabulce 4.2 lze pozorovat, že od 6. iterace se počet správných cifer přibližně zdvojnásobuje. Tento efekt nazýváme **kvadratickou konvergencí** a přesně ho pro naši posloupnost formulujeme níže. Důkaz nyní již vynecháme.

Člen posloupnosti	Hodnota
$x_1$	7.0
$x_2$	4.71428571428571428571428571429
$x_3$	3.24784642966461148279330097511915694
$x_4$	2.38643130490037593935668895758001112
$x_5$	2.00066641679591817635777458039226767
$x_6$	1.91672239561208699369932626267864600
$x_7$	1.91293867672049370288664833049651171
$x_8$	1.91293118280174664702280424145842154
$x_9$	1.91293118277238910119956738659641893
$x_{10}$	1.91293118277238910119911683954876030
$\sqrt[3]{7}$	1.91293118277238910119911683954876028

Tabulka 4.2: Výpočet třetí odmocniny ze sedmi pomocí Newtonovy metody. Poslední řádek obsahuje přesnou hodnotu zaokrouhlenou na 36 desetinných míst.

**Věta 101:** Je-li  $c > 1$  a  $x_1 > \sqrt[3]{c}$ , pak pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq (x_n - \sqrt[3]{c})^2.$$

Je-li tedy chyba  $n$ -tého členu například  $10^{-5}$ , pak chyba dalšího členu je již pouze  $10^{-10}$ !

Newtonova metoda: záludnosti

Rekurentní posloupnost pocházející z Newtonovy metody se pro „špatně“ zvolenou počáteční podmínku může chovat neočekávaně. Například může oscilovat (tj. posloupnost vůbec nebude mít limitu), nebo může divergovat do nekonečna.

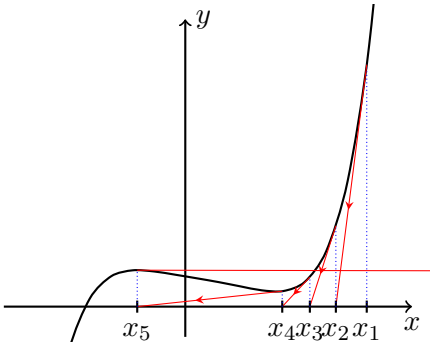
**Příklad:** Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na  $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$  s počátečním bodem  $x_1 = 2$ .

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

Na obrázku uvádíme prvních několik členů této rekurentní posloupnosti △

$n$	$x_n$
1	2.
2	1.6595744680851063
3	1.3729685700681316
4	1.0686067391904803
5	-0.5293373794223353
6	169.52057927559713
7	135.65665311569666



Obrázek 4.25: Patologické chování posloupnosti aproximací generovaných Newtonovou metodou. Problém zřejmě spočívá ve špatné volbě počáteční aproximace.

### 4.14 Diferenciální rovnice

V této podkapitole čtenáři nastíníme problematiku diferenciálních rovnic a jejich numerického řešení. Teorie diferenciálních rovnic je rozsáhlá a my se jí můžeme pouze letmo dotknout.

Doposud jsme se setkali s rovnicemi typu

$$f(x) = 0, \tag{4.4}$$

kde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je zadaná funkce a  $x$  je neznámé reálné **číslo**, které je třeba určit. Čtenář je také jistě seznámen se soustavami rovnic tohoto typu s více neznámými.

Diferenciální rovnice je rovnice typu

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, t) = 0, \tag{4.5}$$

kde  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  je zadaná funkce a  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je neznámá hledaná **funkce**. Tato funkce  $y$  je řešením rovnice (4.5), právě když

$$F(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y'(t), y(t), t) = 0, \quad \text{pro každé } t \in D_y.$$



Pomocí diferenciálních rovnic můžeme popisovat dynamické problémy, můžeme předpovídat vývoj různých systémů (populační modely, mechanické systémy, elektrické obvody, ...). Diferenciální rovnice tedy odpovídá „zákonu“, podle kterého se systém vyvíjí. Samozřejmě častěji narazíme na soustavy diferenciálních rovnic s více neznámými funkcemi (např. populace různých druhů, poloha a rychlost, napětí a proud, ...). Pokud „číselná“ rovnice (4.4) není speciálního tvaru, tak její řešení (pokud existuje) nemusí být možné analyticky vyjádřit, ale je možné ho nalézt přibližně numericky. Vzpomeňte na metodu půlení intervalu a Newtonovu metodu. Podobně řešení diferenciální rovnice (4.5) můžeme v analytickém tvaru nalézt pouze pro několik speciálních typů rovnic, na zbylé je potřeba použít numerických metod (např. `NDSolve` v *Mathematica*).

V této kapitole si ukážeme několik příkladů nejjednodušších diferenciálních rovnic a metod jejich numerického řešení.

**Příklad:** Pokud okamžitá změna veličiny  $y$  přímo úměrně závisí na aktuální hodnotě veličiny  $y$ , pak její vývoj je popsán rovnicí

$$y'(t) = \gamma y(t), \quad y(0) = y_0, \quad (4.6)$$

kde  $\gamma$  je konstanta úměrnosti a  $y_0$  počáteční hodnota. △

**Lemma 102:** Jediným řešením úlohy z předchozího příkladu je  $y'(t) = y_0 e^{\gamma t}$ .

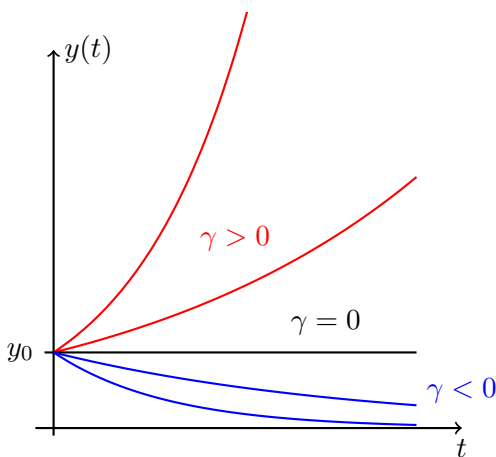
*Důkaz.* Všimněte si, že

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \gamma \quad \Rightarrow \quad (\ln y(t))' = \gamma \quad \Rightarrow \quad \ln y(t) = \gamma t + k.$$

Tudíž  $y(t) = e^{\gamma t + k} = K \cdot e^{\gamma t}$ , kde konstantu  $K$  je třeba dopočítat z počáteční podmínky. □

Poznamenejme, že kdybychom nepředepsali počáteční podmínku ( $y(0) = y_0$ ), pak by rovnice  $y' = \gamma y$  měla nekonečně mnoho řešení. Každá funkce tvaru  $y(t) = ce^{\gamma t}$  s libovolnou konstantou  $c \in \mathbb{R}$  byla řešením této rovnice. Díky počáteční podmínce má proto úloha jednoznačné řešení. To je fyzikálně pochopitelné, pokud chceme modelovat jistý systém, pak musíme zadat v jakém stavu se nachází v počátečním okamžiku.

V závislosti na hodnotě reálného parametru  $\gamma$  mohou nastat tři kvalitativně rozdílné případy:



Obrázek 4.26: Řešení rovnice (4.6) pro různé hodnoty parametrů.

**Příklad:** Poloha tělesa o hmotnosti  $m > 0$ , které je připevněno k pružině o tuhosti  $k > 0$ , v čase je popsána funkcí  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jež splňuje

$$mx''(t) = -kx(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0. \quad (4.7)$$

(tzv. Newtonův pohybový zákon). △

**Lemma 103:** Řešení úlohy (4.7), tedy

$$mx''(t) = -kx(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$

je právě jedno,

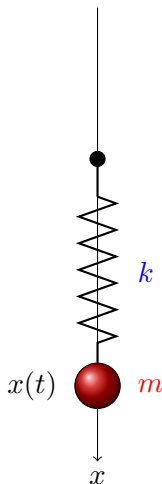
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

*Důkaz.* Zkoumanou rovnicí lze přepsat do tvaru

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Dosazením a využitím znalosti derivací funkcí  $\sin$  a  $\cos$  snadno ověříme, že udané  $x(t)$  skutečně tuto rovnici řeší. Lze ověřit, že toto řešení je pro dané  $x_0$  a  $v_0$  jediné možné. □



Obrázek 4.27: Těleso na pružině v homogenním tíhovém poli.

Povšimněme si, že pokud funkce  $f$  splňuje  $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , pak je funkce

$$E(t) := \frac{1}{2} f'(t)^2 + \frac{\omega^2}{2} f(t)^2$$

konstantní. Skutečně,

$$E'(t) = f'(t)f''(t) + \omega^2 f(t)f'(t) \stackrel{f''(t) = -\omega^2 f(t)}{=} -\omega^2 f'(t)f(t) + \omega f(t)f'(t) = 0.$$

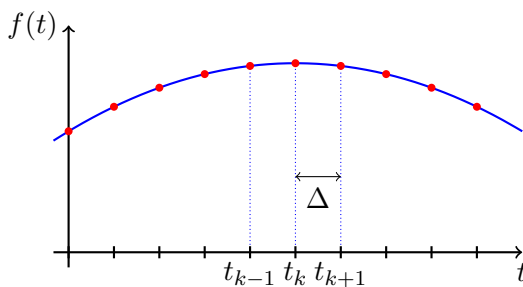
Tudíž  $E(t) = E(0)$  platí pro každé  $t \in \mathbb{R}$ . Právě jsme odvodili zákon zachování energie na základě znalosti Newtonova pohybového zákona v konkrétním příkladě (4.7).

Přistupme nyní k problému numerického řešení diferenciálních rovnic. Prvním aproximačním krokem je diskretizace nezávisle proměnné. Pro  $\Delta > 0$  položíme  $t_k := \Delta \cdot k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Podobně označme funkční hodnoty  $f_k = f(t_k)$ .

Přibližné vyjádření derivace funkce  $f$  v bodě  $t_k$  pak získáme tak, že tečnu v bodě  $t_k$  nahradíme sečnou procházející body  $t_{k+1}$  a  $t_k$ .

$$f'(t_k) \approx \frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta}.$$

K dispozici máme i další možnosti. Očekáváme, že pokud bude  $\Delta$  malé, pak i chyba vzniknuvší touto záměnou bude malá.



Obrázek 4.28: Diskretizace nezávisle proměnné.

Pokusme se najít způsob, jak numericky řešit diferenciální rovnici

$$y'(t) = f(y(t)), y(0) = y_0.$$

Zvolme parametr  $\Delta > 0$ . Ukážeme si dvě metody:

1. **(Eulerova)** Přibližným vyjádřením derivace a použitím  $f(y_k)$  místo  $f(y(t))$  na pravé straně diferenciální rovnice dostaneme

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} = f(y_k), \quad \text{tedy} \quad y_{k+1} = y_k + \Delta \cdot f(y_k).$$

Neboť je  $y_0 = y(0)$  dáno, můžeme nyní rekurentně vypočítat všechna následující  $y_k$ . Pro malá  $\Delta$  lze očekávat, že aspoň první členy budou blízko skutečného řešení.

2. **(Centrální Eulerova)** Od Eulerovy metody se liší pouze úpravou pravé strany rovnice:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} = f\left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right).$$

Pozor! Tato rovnice „implicitně zadává“  $y_{k+1}$  pomocí  $y_k$ . V obecném případě nemusí jít explicitně vyřešit, ale může vyžadovat další numerické řešení, ovšem už číselné rovnice. I to často stojí za námahu (vizte příklady níže v této kapitole).

Numerických metod je velmi mnoho. Každá může na daném problému dávat různě přesné výsledky. Sofistikovanější metody např. i mění velikost  $\Delta$  v každém „kroku“.

**Příklad:** Porovnejte numerické řešení (pomocí Eulerovy metody) úlohy

$$y'(t) = 2 \cdot y(t), \quad y(0) = 1,$$

se skutečným řešením  $y(t) = e^{2t}$ . △

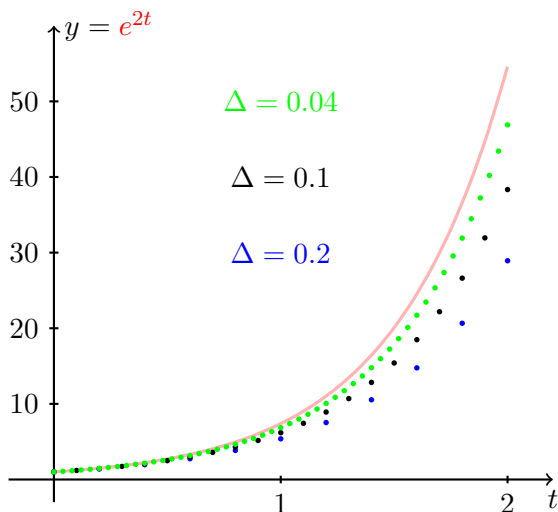
Odvození rekurentního vztahu je v tomto případě snadné,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta} = 2 \cdot y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = 1,$$

čili

$$y_{k+1} = y_k + 2\Delta y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = 1.$$

Výsledek tohoto numerického experimentu je na obrázku



Obrázek 4.29: Přesné řešení a numerické řešení získané pomocí Eulerovy metody pro rovnici  $y' = 2y$ ,  $y(0) = 1$  a různé hodnoty diskretizačního parametru  $\Delta$ .

**Příklad:** Porovnejte numerické řešení úlohy

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad (4.8)$$

se skutečným řešením  $y(t) = \cos(t) + \sin(t)$ . △

Nejprve musíme úlohu upravit do tvaru kdy lze aplikovat naše dvě metody. Zavedme  $x(t)$  tak, že  $x(t) = y'(t)$ . Potom úloha zní

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t), & y(0) &= 1, \\ x'(t) &= -y(t), & x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Jedná se tedy o soustavu dvou diferenciálních rovnic pro dvě neznámé funkce. Pro  $\Delta > 0$  je nyní potřeba konstruovat souběžně **dvě** posloupnosti  $(x_n)$  a  $(y_n)$ .

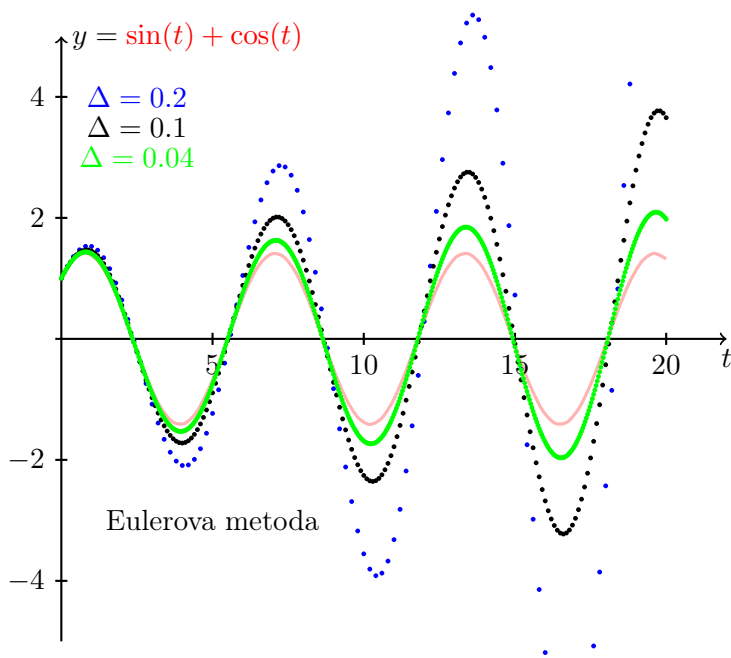
Eulerova metoda nám dává rekurentní vztah:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \Delta \cdot y_k, & x_0 &= 1, \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta \cdot x_k, & y_0 &= 1. \end{aligned}$$

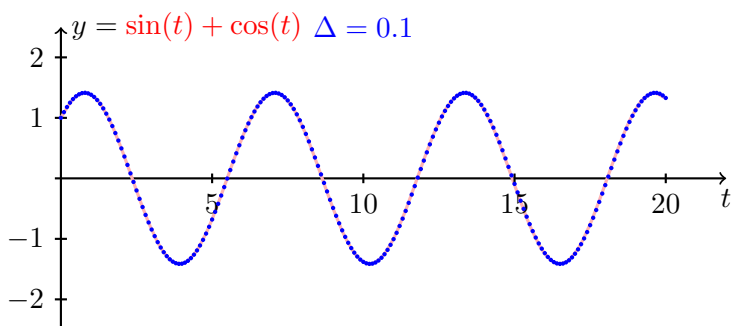
Po chvíli počítání z centrální Eulerovy metody získáme explicitní rekurenci

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2}{4}} \left( \left( 1 - \frac{\Delta^2}{4} \right) x_k - \Delta y_k \right), & x_0 &= 1 \\ y_{k+1} &= \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2}{4}} \left( \Delta x_k + \left( 1 - \frac{\Delta^2}{4} \right) y_k \right), & y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Na obrázcích 4.30 a 4.31 uvádíme výsledky numerických přibližných řešení rovnice(4.8) pomocí Eulerovy a centrální Eulerovy metody. Vidíte, že i když centrální Eulerova metoda v tomto případě dává dramaticky lepší výsledky než metoda Eulerova.



Obrázek 4.30: Eulerova metoda aplikovaná na diferenciální rovnici (4.8) pro různé volby diskretizačního parametru  $\Delta$ .



Obrázek 4.31: Centrální Eulerova metoda aplikovaná na diferenciální rovnici (4.8). Porovnejte přesnost výpočtu s obyčejnou Eulerovou metodou 4.30.

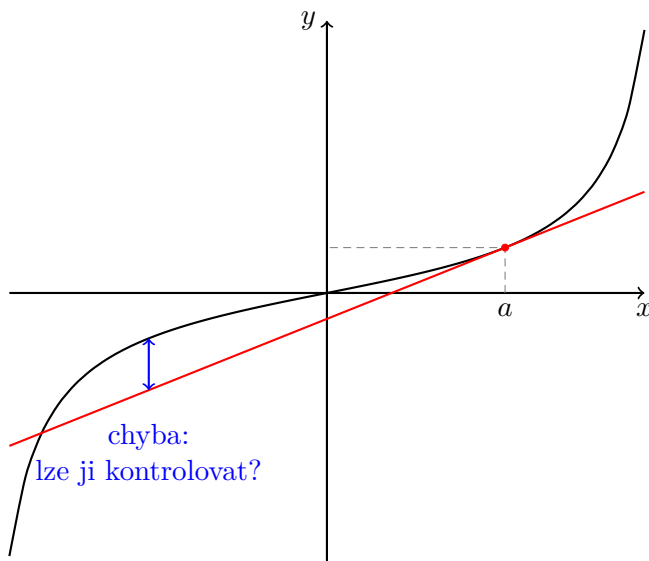
# Kapitola č. 5

## Taylorovy polynomy

Polynom; Taylorův polynom; Taylorův vzorec; zbytek v Taylorově vzorci; Peanův tvar zbytku; Lagrangeův tvar zbytku; přibližné výpočty; mocninná řada; poloměr konvergence.

### 5.1 Aproximace funkcí pomocí polynomů

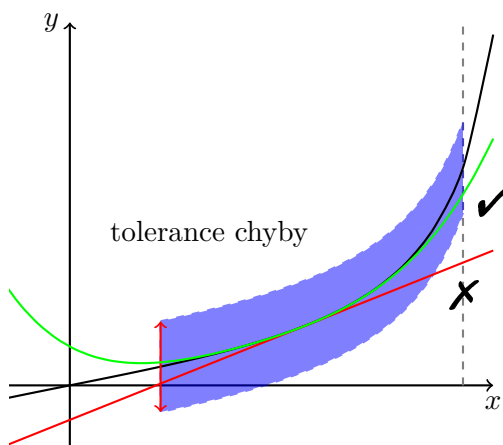
Tečna funkce  $f$  v bodě  $a$  představuje tzv. lineární aproximaci funkce  $f$  v bodě  $a$ . V blízkosti bodu  $a$  dobře vystihuje chování funkce  $f$ . Graf funkce a její tečny je uveden na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Tečna jakožto lineární aproximace funkce. Lze očekávat, že souhlas je dobrý na malém okolí bodu, kde uvažujeme tečnu. Jak odhadnout chybu mezi funkcí a aproximací?



Pokud chceme funkce aproximovat i na větších intervalech, zřejmě nevystačíme pouze s přímkami, vizte obrázek 5.2. Nabízí se uvažovat místo polynomů prvního stupně (přímky) polynomy vyšších stupňů. V této kapitole se budeme zabývat problémem, jak tyto aproximační polynomy zkonstruovat. S pomocí derivací vyšších stupňů se naučíme sestavit tzv. Taylorovy polynomy, které představují v jistém smyslu nejlepší možnou aproximaci k dané funkci.



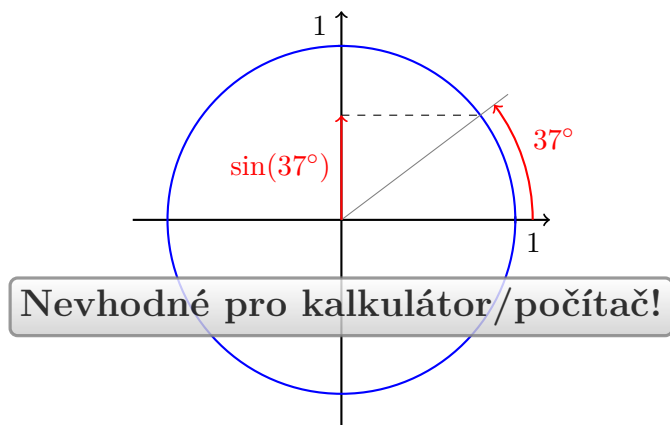
Obrázek 5.2: Aproximace zadané funkce (černá křivka) pomocí polynomu na zadaném intervalu se zadanou přesností.

Typickým využitím Taylorových polynomů je úloha vypočíst hodnotu dané funkce s předem zadanou přesností pouze pomocí algebraických operací sčítání a násobení (dělení). Tedy například: Jak určit hodnotu  $\sin(37^\circ)$ ?

Podle známe geometrické definice funkce  $\sin$  k odpovědi na tuto otázku potřebujeme použít pravítko, kružítko a úhloměr. Přesnost „výpočtu“ je pak dána přesností našich nástrojů. Vizte obrázek 5.3.

## 5.2 Aproximace funkcí pomocí polynomů

Nejprve si připomeňme pojem polynomu, který bude v celé této kapitole hrát centrální roli.



Obrázek 5.3: Geometrická definice funkce  $\sin$  pomocí jednotkové kružnice je nevhodná pro výpočetní aplikace.

**Definice 104** (Polynom): Reálnou funkci reálné proměnné  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo  $n \in \mathbb{N}$  a reálná čísla  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

platí pro všechna reálná  $x \in \mathbb{R}$ .

Je-li  $a_n \neq 0$ , nazýváme číslo  $n$  **stupněm polynomu**  $p$ . Jsou-li všechny koeficienty  $a_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  nulové, nazýváme  $p$  **nulovým polynomem** a jeho stupeň nedefinujeme.

Podstatnou výhodou polynomů je fakt, že k vyhodnocení funkční hodnoty polynomu stačí operace sčítání (odčítání) a násobení. Navíc polynom stupně  $n$  je zadán  $n + 1$  konstantami.

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce  $f(x) = ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$  parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně<sup>1</sup>.
2. **Kvadratická** funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  parametry) je polynomem druhého stupně.

<sup>1</sup>Slovíčko „lineární“ výše používáme ke zdůraznění, že grafem dané funkce je přímka, lineární objekt. Nejedná se o lineární zobrazení ve smyslu Lineární algebry.

Pokusme se nyní podívat na tečnu z jiného úhlu. Je-li funkce  $f$  diferencovatelná v bodě  $a \in \mathbb{R}$ , pak rovnice její **tečny v bodě**  $a$  má tvar

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Je to přímka nejvíce připomínající funkci  $f$  v okolí bodu  $a$ . Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce

$$g(x) := f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pro funkce  $f$  a  $g$  platí

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$

Tj. **funkce**  $f$  a její **tečna v bodě**  $a$  mají stejnou 0. a 1. derivaci v bodě  $a$ .

Přirozeně se nabízí otázka proč neuvažovat polynom vyššího stupně s podobnou vlastností? Necht funkce  $f$  má derivace v bodě  $a$  až do řádu  $n \in \mathbb{N}$  včetně. Lze nalézt polynom  $p$  takový, že  $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  pro všechna  $k = 0, 1, \dots, n$ ?

Odpověď je **kladná**. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k.$$

Je potřeba určit konstanty  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  tak, aby derivace polynomu a funkce v bodě  $a$  až do řádu  $n$  včetně byly shodné. Pro funkční hodnoty derivací polynomu  $p$  v bodě  $a$  platí

$$\begin{aligned} f(a) = p(a) &\implies a_0 = f(a) \\ f'(a) = p'(a) = a_1 &\implies a_1 = f'(a) \\ f''(a) = p''(a) = 2a_2 &\implies a_2 = \frac{1}{2}f''(a) \\ f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!a_k &\implies a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Uzavíráme, že hledaný polynom  $p$  požadovaných vlastností je tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Shrňme si toto pozorování do následující věty.

**Věta 105:** Necht reálná funkce reálné proměnné  $f$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}$  konečnou  $n$ -tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom  $T_{n,a}$  stupně nejvýše  $n$  takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \dots, n.$$

Tento polynom má tvar

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

a nazýváme ho  **$n$ -tým Taylorovým polynomem funkce  $f$  v bodě  $a$** .

*Důkaz.* Existenci i jednoznačnost jsme dokázali v předchozích odstavcích. □

**Příklad:** Nalezněme Taylorův polynom funkce  $f(x) = e^x$  stupně  $n \in \mathbb{N}_0$  v bodě 0.

Pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$  platí  $f^{(k)}(x) = e^x$  a proto  $f^{(k)}(0) = 1$ . Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k. \quad \triangle$$

**Poznámka (Značení):** Pokud  $a = 0$ , budeme pro jednoduchost místo  $T_{n,0}$  psát pouze  $T_n$ .

**Příklad:** Nalezněme Taylorův polynom funkce  $f(x) = \sin(x)$  stupně  $n \in \mathbb{N}_0$  v bodě 0.

Derivace funkce  $f$  se cyklicky opakují, v závislosti na  $k \in \mathbb{N}_0$  platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

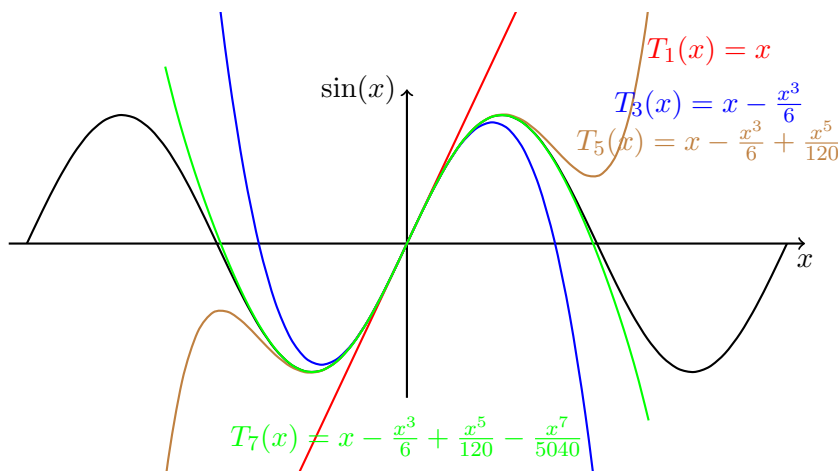
Proto

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Taylorův polynom stupně  $n = 2\ell$  je stejný jako Taylorův polynom stupně  $n = 2\ell - 1$  a platí

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Speciálně tedy platí  $T_{2n} = T_{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a ještě speciálněji třeba  $T_{40} = T_{39}$ . Ukázka několika Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 je uvedena na obrázku 5.4. △



Obrázek 5.4: Příklady Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 malých stupňů.

### 5.3 Chyba aproximace

V této podkapitole se budeme zabývat chybou mezi původní funkcí a Taylorovým polynomem. Kdybychom tuto chybu nebyli schopni alespoň odhadnout, pak by aproximace byla nepoužitelná. Definujme si nejprve jasně chybu (zbytek), který zkoumáme.

**Definice 106:** Nechtě funkce  $f$  má v bodě  $a$  konečnou  $n$ -tou derivaci. Pro všechna přípustná  $x$  položme  $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$ . Potom vztah

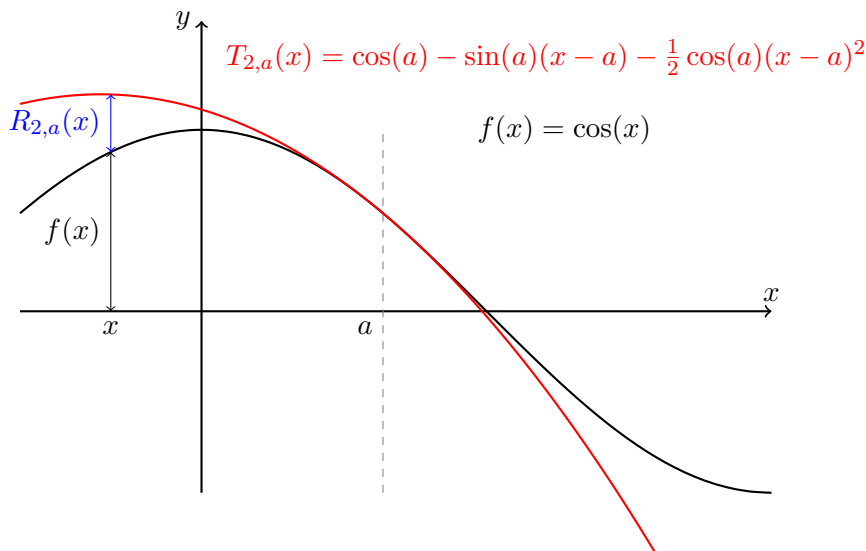
$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a  $R_{n,a}$  nazýváme  **$n$ -tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

**Poznámka** (Značení): V případě, že mluvíme o Taylorově polynomu v bodě  $a = 0$  píšeme pro jednoduchost  $T_n$  místo  $T_{n,0}$ . Podobně v případě zbytku  $R_n = R_{n,0}$  a Peanova zbytku (zaveden dále)  $\omega_n = \omega_{n,0}$ . Taylorův polynom pro  $a = 0$  se také někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.

První informaci o zbytku v Taylorově vzorci nám dává následující věta. Hrubě řečeno, když  $x \rightarrow a$ , pak zbytek v Taylorově vzorci jde k nule rychleji, než poslední člen  $n$ -tého Taylorova polynomu.

**Věta 107:** Nechtě funkce  $f$  má v jistém okolí  $H_a$  bodu  $a$  spojitou  $n$ -tou derivaci.



Obrázek 5.5: Grafické znázornění Taylorova vzorce, tedy vztahem mezi funkční hodnotou funkce  $f$ , Taylorova polynomu  $T_{n,a}$  a zbytku  $R_{n,a}$ .

Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $a = 0$ . Z definice zbytku a vlastností Taylorova polynomu plyne

$$R_n(0) = R'_n(0) = \dots = R_n^{(n-1)}(0) = R_n^{(n)}(0) = 0.$$

Pro výpočet limity lze použít l'Hospitalovo pravidlo (zdůvodněte proč!). Potom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R'_n(x)}{nx^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n! \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0. \quad \square$$

**Důsledek 108:** Za stejných předpokladů jako v předchozí větě. Taylorův vzorec lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n,$$

kde  $\lim_{x \rightarrow 0} \omega_n(x) = 0$ . Výraz  $\omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n$  se nazývá **Peanův tvar** zbytku.

*Důkaz.* Stačí položit  $\omega_{n,a}(x) := \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$  a použít předchozí věty. □

**Příklad:** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Protože  $\sin x = x + \omega_{1,0}(x) \cdot x$ , kde  $\lim_{x \rightarrow 0} \omega_{1,0}(x) = 0$  dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \omega_{1,0}(x)) = 1 + 0 = 1. \quad \triangle$$

$n$ -tý Taylorův polynom je nejlepší aproximace mezi všemi polynomy stupně  $n$ . Přesný smysl tohoto výroku je obsažen v následující větě.

**Věta 109** (O nejlepší aproximaci): Nechť funkce  $f$  má v jistém okolí bodu 0 konečnou  $n$ -tou derivaci a nechť  $Q$  je polynom stupně nejvýše  $n$ , různý od Taylorova polynomu  $T_n$  funkce  $f$  v bodě 0. Potom existuje okolí  $H_0$  bodu 0 takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \setminus \{0\}.$$

*Důkaz.* Vynecháváme. □

Výraz  $|f(x) - Q(x)|$  představuje absolutní velikost chyby při aproximaci funkce  $f$  pomocí polynomu  $Q$  v bodě  $x$ . Pokud  $T_{n-1} \neq T_n$ , pak pro jisté okolí  $H_0$  podle předchozí věty platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - T_{n-1}(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \setminus \{0\}.$$

Tedy, každý další Taylorův polynom aproximuje funkci  $f$  lépe než předchozí (pokud není shodný s předchozím).

Jak ukazuje následující příklad, mohou existovat i patologické příklady, kdy aproximace pomocí Taylorových polynomů nedává dobře použitelné výsledky.

**Příklad:** Zkoumejte Taylorovy polynomy funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

v bodě  $a = 0$ . Pomocí indukce lze dokázat, že pro každé  $k \in \mathbb{N}_0$  platí

$$f^{(k)}(0) = 0.$$

Pro libovolný  $n$ -tý Taylorův polynom funkce  $f$  v bodě 0 proto platí

$$T_n(x) = 0.$$

Každý je tedy nulovým polynomem! Při zvyšování stupně se přesnost aproximace nijak nezlepšuje.  $\triangle$

**Věta 110** (Taylorova): Necht existuje okolí  $H_0$  bodu 0 takové, že funkce  $f$  v něm má konečnou  $(n+1)$ -ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$  lze pro každé  $x \in H_0$  zapsat ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde číslo  $\xi$  závisí na  $x$  a  $n$  a leží uvnitř intervalu s krajními body  $x$  a 0. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

*Důkaz.* Vynecháváme.  $\square$

**Poznámka:** Pro číslo  $\xi$  z předchozí věty tedy platí  $0 < |\xi| < |x|$ .

Tato věta nám dává velmi důležitou informaci o zbytku v Taylorově vzorci. Umožňuje **odhadovat** chybu mezi původní funkcí a jejím Taylorovým polynomem.

**Příklad:** Určete, jaké chyby se dopustíme, když pro výpočet čísla  $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$  použijeme hodnotu Taylorova polynomu funkce  $e^x$  třetího stupně v bodě 0 vyhodnoceného v bodě  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Dosazením dostaneme funkční hodnotu Taylorova polynomu v  $x = \frac{1}{2}$ :

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48} = 1.6458\bar{3}.$$

Toto číslo nám samo o sobě nic neříká. Je nutné odhadnout chybu.

Podle Taylorovy věty 110 platí ( $f(x) = e^x$ ) rovnost

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right),$$

kde zbytek je tvaru

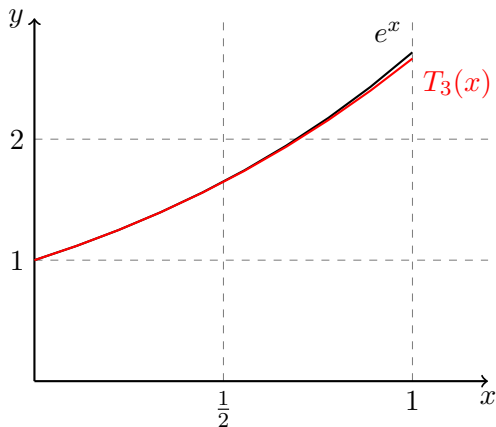
$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\xi}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

O čísle  $\xi$  pouze víme, že leží v intervalu  $(0, \frac{1}{2})$ . Navíc umíme odhadnout velikost čísla  $e$ , platí nerovnost  $e < 4$  (zdůvodněte!). Celkem tedy

$$0 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{4^{1/2}}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192} = 0.005208\bar{3}.$$



Číslo  $\sqrt{e}$  leží v intervalu  $(1.6458\bar{3}, 1.651041\bar{6})$ . Vizte ilustrační obrázek 5.6. △



Obrázek 5.6: Graf exponenciály a 3. Taylorova polynomu exponenciály v bodě 0 použitého k přibližnému výpočtu  $e^{\frac{1}{2}}$ .

## 5.4 Funkce jako limita Taylorových polynomů

Již jsme spočetli, že pro každé reálné  $x$  a přirozené  $n$  platí

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Dále známe tvar zbytku, lze ho vyjádřit jako

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_{n,x}}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde  $\xi_{n,x}$  leží mezi 0 a  $x$ , tudíž  $\xi_{n,x} < |x|$ . Z monotonie  $e^x$  pak plyne odhad

$$0 < e^{\xi_{n,x}} < e^{|x|}.$$

Horní odhad tedy nezávisí na  $n$  (v tomto případě)!

Pro dané pevné  $x \in \mathbb{R}$  tedy platí

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{e^x}{(n+1)!} |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Věta o limitě sevřené posloupnosti 39 zaručuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Pro libovolné reálné  $x$  tedy platí

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Podařilo se nám vyjádřit funkční hodnoty exponenciály jakožto součty jisté číselné řady závislé na reálném parametru  $x$ . Jak za chvíli uvidíme, tuto vlastnost mají i další elementární funkce.

**Definice 111:** Nechť je dána posloupnost  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  a číslo  $c \in \mathbb{R}$ . Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k,$$

závisející na reálném parametru  $x$ , nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě  $c$** .

**Poznámka:** Uvažme pro jednoduchost  $c = 0$ .

- Je-li například  $x = 2$ , pak máme číselnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k$ ,
- je-li  $x = \frac{1}{3}$ , pak máme číselnou řadu  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ .

Tímto způsobem je definována jistá funkce, která každému reálnému  $x$  přiřadí součet zadané číselné řady, pokud existuje. Jaký je definiční obor této funkce?

**Věta 112:** Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocnnná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$$

konverguje absolutně pro  $x \in (c - R, c + R)$  a diverguje pro  $|c - x| > R$ .

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme  $c = 0$ . Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  dostáváme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrneme, že pokud

- $|x| \cdot L < 1$ , tedy  $|x| < R$ , pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x| \cdot L > 1$ , tedy  $|x| > R$ , pak pod podílového kritéria je  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k x^k| = +\infty$ . Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0$ ).  $\square$

Uvedme dále několik základních vlastností týkajících se mocnnné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad R = \frac{1}{L}. \quad (5.1)$$

Číslo  $R$  nazýváme **poloměrem konvergence** mocnnné řady (5.1). Předchozí věta říká, že tato mocnnná řada (5.1) konverguje pro  $|x| < R$  a diverguje pro  $|x| > R$ . **Neříká nic** o konvergenci pro  $x = R$  a  $x = -R$ . Každá mocnnná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

**Věta 113** (Cauchy-Hadamard): Ke každé mocnnné řadě tvaru (5.1) existuje  $R \in \langle 0, +\infty \rangle$  takové, že řada absolutně konverguje pro  $|x| < R$  a diverguje pro  $|x| > R$ .

*Důkaz.* Vynecháváme.  $\square$

Poloměr konvergence ale vždy **nemusí** jít spočítat pomocí limity podílů uvedených ve větě 112. Tato limita nemusí existovat.

**Příklad:** Uvažte mocnnnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k) x^k.$$

Limita

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin(k+1)}{\sin(k)} \right|$$

neexistuje, ale podle srovnávacího kritéria mocninná řada jistě konverguje pro  $x \in (-1, 1)$ . Skutečně,

$$|\sin(k) x^k| \leq |x|^k$$

a  $\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k$  konverguje pro  $|x| < 1$ . △

**Definice 114:** Jestliže  $f$  je funkce mající v bodě  $c$  derivace všech řádů, potom mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k,$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce  $f$  v bodě  $c$** .

**Příklad:** Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  a její Taylorovy řady v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Platí  $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ ,  $x \neq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Proto  $f^{(k)}(0) = k!$ . Zadání je tedy v pořádku, tato řada je skutečně Taylorovou řadou příslušné funkce v bodě 0. Pro poloměr konvergence máme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

Dále pro  $x = \pm 1$  jsou řady  $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$  divergentní. Řada konverguje absolutně pro  $x \in (-1, 1)$  a diverguje pro všechna ostatní  $x$ . Rovnost

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

platí pro  $x \in (-1, 1)$ . Řadu v tomto případě umíme přímo sečíst, není potřeba vyšetřovat zbytek v Taylorově vzorci. △

Na závěr této podkapitoly uvádíme Taylorovy řady dalších elementárních funkcí a jejich obory konvergence.

$e^x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$=$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$x \in (-1, 1)$
$\arctg x$	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1 \rangle$

Tabulka 5.1: Některé elementární funkce a jejich Taylorovy řady a příslušnými poloměry konvergence.

## 5.5 Další příklady

Tuto kapitolu uzavřeme několika řešenými příklady.

**Příklad:** Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce  $\sin$  pro všechna reálná  $x$  s přesností  $10^{-7}$ .

Díky periodicitě a tvaru<sup>2</sup> funkce  $f = \sin$  stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro  $x$  z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Podle Taylorovy věty pro Taylorův polynom stupně  $2n+2$  se středem v 0 platí

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\frac{f^{(2n+3)}(\xi_{n,x})}{(2n+3)!} x^{2k+3}}_{R_{2n+2}(x)}.$$

Indexy u symbolu  $\xi_{n,x}$  nám připomínají, že tento závisí na  $x$  a  $n$ .

Protože derivace lichého řádu funkce  $\sin$  je – až na střídající se znaménko – funkce  $\cos$ , můžeme zbytek pro  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  odhadnout:

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!} |x|^{2n+3} < \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

Hodnoty  $a_n$  jsou uvedeny v tabulce 5.2.

<sup>2</sup>Stačí umět počítat funkční hodnotu v prvním kvadrantu.

$n$	$a_n$
1	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2	$4.7 \cdot 10^{-3}$
3	$1.6 \cdot 10^{-4}$
4	$3.6 \cdot 10^{-6}$
5	$5.7 \cdot 10^{-8}$
6	$6.7 \cdot 10^{-10}$

Tabulka 5.2: K příkladu aproximace funkce sinus.

Vidíme, že pro  $n = 5$  je  $a_n$  poprvé menší než  $10^{-7}$ . Tudíž můžeme uzavřít, že se pro každé  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  hodnota  $\sin(x)$  liší od výrazu

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

nejvýše o  $10^{-7}$ .

△

Kapesní kalkulátory většinou přímo nepoužívají mocninné rozvoje pro výpočet hodnot trigonometrických funkcí (sin, cos, tan, atd.).

**Poznámka:** **CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputer **A**lgorithmus k výpočtu např. funkce sin rafinovaně využívá

1. součtové vzorce pro trigonometrické funkce,
2. vzorky, tj. hodnoty funkce sin **předem napočtené** (například pomocí Taylova polynomu) pro jistou množinu úhlů.

První implementace: 1959, navigační počítač bombardéru B-58.

# Kapitola č. 6

## Primitivní funkce

Primitivní funkce; vlastnosti primitivní funkce; neurčitý integrál; primitivní funkce elementárních funkcí; linearita neurčitého integrálu; integrace per partes; integrace substitucí; integrace racionálních lomených funkcí a rozklad na parciální zlomky; doplnění na čtverec.

### 6.1 Neurčitý integrál

Nejprve zavedeme pojem primitivní funkce. Jak uvidíme, jedná se v jistém smyslu o inverzní pojem k pojmu derivace funkce. Význam primitivních funkcí rozebereme podrobně v následujících kapitolách.

**Definice 115:** Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $(a, b)$ , kde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Funkci  $F$  splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ .

Ohned z definice plyne, že  $F$  je diferencovatelná v každém bodě intervalu  $(a, b)$  a tedy je i spojitá na  $(a, b)$ . K nahlédnutí tohoto faktu si stačí vzpomenout na větu č. 81.

**Příklad:** Funkce  $F(x) = x^3$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x) = 3x^2$  na libovolném intervalu  $(a, b)$ .  $\triangle$

Kolik primitivních funkcí k zadané funkci  $f$  může existovat? Jak se od sebe případně liší? Na tyto otázky odpovídá následující tvrzení.

**Věta 116:** Nechť  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$ . Pak  $G$  je primitivní funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $(a, b)$  právě tehdy, když existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$  taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

*Důkaz.* Pokud jsou funkce  $F$  a  $G$  primitivní k  $f$  na intervalu  $(a, b)$ , potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce  $F - G$  je proto podle věty č. 93 konstantní na intervalu  $(a, b)$ .

Naopak, je-li  $G(x) = F(x) + c$ , pro libovolné  $x \in (a, b)$ , pak  $G'(x) = F'(x)$ .  $\square$

Proto je přirozené zavést značení pro množinu všech primitivních funkcí k zadané funkci  $f$ .

**Definice 117:** Necht k funkci  $f$  existuje primitivní funkce na intervalu  $(a, b)$ . Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  na  $(a, b)$  nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej  $\int f$  nebo  $\int f(x) dx$ .

**Poznámka** (Terminologie): Najdeme-li k  $f$  primitivní funkci  $F$  na intervalu  $(a, b)$ , zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Funkci  $f$  nazýváme **integrovanou funkcí**,  $x$  **integrační proměnnou** a  $c$  **integrační konstantou**. Úkolu určit  $\int f(x) dx$  říkáme „najít primitivní funkci k  $f$ “, nebo „vypočítat integrál z  $f$ “, nebo „integrovat  $f$ “.

Důvod pro tuto notaci bude odhalen v následujících kapitolách. Zde aspoň poznamenejme, že symbol  $\int$  je stylizované  $S$ .

**Poznámka** (*Mathematica*): K hledání primitivní funkce pomocí *Mathematica* lze použít příkaz `Integrate[f, x]`, kde  $f$  je integrovaná funkce (výraz) a  $x$  je integrační proměnná.

Slibovaný inverzní vztah mezi derivací a neurčitým integrálem (primitivní funkcí) můžeme vyjádřit následovně:

- Je-li funkce  $g$  diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$ , pak přímo z definice č. 115 plyne

$$\int g'(x) dx = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

- Má-li funkce  $f$  primitivní funkci na intervalu  $(a, b)$ , potom opět přímo z definice č. 115 plyne

$$\left( \int f \right)'(x) = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (6.1)$$



vzorec	interval, parametry
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty), \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ a } a \neq 1$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$	$x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 6.1: Základní primitivní funkce.

Zatím jsme neodpověděli na otázku, zda k zadané funkci  $f$  vůbec primitivní funkce existuje. Nemusí tomu tak být vždy. Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce je obsažena v následující větě.

**Věta 118** (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce): Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $(a, b)$ . Pak funkce  $f$  má na tomto intervalu primitivní funkci.

*Důkaz.* Vynecháváme. □

Protože umíme derivovat celou řadu elementárních funkcí (viz např. tabulku č. 4.1) známe i primitivní funkce k některým elementárním funkcím. Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku č. 6.1 primitivních funkcí.

K výpočtu primitivní funkcí komplikovanějších funkcí potřebujeme využít vlastností neurčitěho integrálu, které odvodíme v následujících odstavcích.

**Věta 119:** Nechť  $F$ , resp.  $G$ , je primitivní funkce k funkci  $f$ , resp.  $g$ , na intervalu  $(a, b)$  a necht'  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

- $F + G$  je primitivní funkcí k funkci  $f + g$  na intervalu  $(a, b)$ ,
- $\alpha F$  je primitivní funkcí k funkci  $\alpha f$  na intervalu  $(a, b)$ .

*Důkaz.* Stačí si uvědomit, že derivace součtu funkcí je součet derivací funkcí a že derivace konstantního násobku funkce je ten samý konstantní násobek derivace funkce.  $\square$

Znění předchozí věty symbolicky zapisujeme takto,

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f,$$

a mluvíme o linearitě neurčitěho integrálu.

**Příklad:** Vypočtete

$$\int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$$

Dle předchozí věty ihned dostáváme výsledek

$$\begin{aligned} \int \left( 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx &= 4 \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2/3} dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln |x| + \frac{x^{1/3}}{1/3} = \frac{4}{3}x^3 - \ln |x| + 3x^{1/3} + C, \end{aligned}$$

který platí na libovolném otevřeném intervalu, který je podmnožinou  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $\triangle$

**Příklad:** Vypočtete

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

Nejprve provedeme jednoduchou algebraickou úpravu integrandu a následně využijeme předchozí větu čímž dostáváme výsledek,

$$\begin{aligned} \int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 6^x dx + \int 9^x dx = \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C. \end{aligned}$$

$\triangle$

## 6.2 Integrace per partes

V předchozí kapitole jsme zjistili jak hledat primitivní funkci k součtu dvou funkcí a konstantnímu násobku funkce. Nyní se pokusíme hledat primitivní funkci k součinu dvou funkcí. S výhodou nyní využijeme větu č. 83 o derivaci součinu dvou funkcí.

**Věta 120** (Per partes): Nechť funkce  $f$  je diferencovatelná na intervalu  $(a, b)$  a  $G$  je primitivní funkce k funkci  $g$  na intervalu  $(a, b)$  a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci  $f'G$ . Potom existuje primitivní funkce k funkci  $fg$  a platí

$$\int fg = fG - \int f'G. \quad (6.2)$$

*Důkaz.* Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním. Podle rovnice (6.1) platí

$$\left(fG - \int f'G\right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg. \quad \square$$

Poznamenejme, že metoda integrace per partes může být úspěšná pouze pokud budeme schopni dále pracovat s novým integrálem na pravé straně rovnice (6.2), který je stále ve tvaru součinu. Latinský výraz „per partes“ v češtině znamená „po částech“. Důvod k tomuto označení je zřejmý.

K zapamatování formulky (6.2) lze použít následujícího schématu.

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ \downarrow & \downarrow \\ f' & G \end{array} \right| = fG - \int f'G.$$

**Příklad:** Vypočtete neurčitý integrál  $\int x \sin x \, dx$ .

Pomocí integrace per partes dostáváme

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{cc} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Na tomto místě je dobré si uvědomit, že správnost výsledku integrace můžeme vždy snadno ověřit pomocí definice č. 115, tedy derivováním:

$$(-x \cos x + \sin x + C)' = -\cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtete neurčitý integrál  $\int x^2 e^x dx$ . Nyní je potřeba per partes použít dvakrát. Dostáváme

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{cc} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= \left| \begin{array}{cc} x & e^x \\ 1 & e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \end{aligned} \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtete neurčitý integrál  $\int \operatorname{arctg} x dx$ . Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= \int \mathbf{1} \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{arctg} x & \mathbf{1} \\ \frac{1}{1+x^2} & x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned} \quad \triangle$$

### 6.3 Věty o substituci v neurčitém integrálu

Metoda integrace per partes byla založena na znalosti derivace součinu dvou funkcí. Ze znalosti derivace složené funkce nyní odvodíme metodu integrace pomocí substituce.

**Věta 121** (O substituci I): Necht pro funkce  $f$  a  $\varphi$  platí

1.  $f$  má primitivní funkci  $F$  na intervalu  $(a, b)$ ,
2.  $\varphi$  je na intervalu  $(\alpha, \beta)$  diferencovatelná,
3.  $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$ .

Pak funkce  $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$  má primitivní funkci na intervalu  $(\alpha, \beta)$  a platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)).$$

*Důkaz.*  $F$  je primitivní funkcí k funkci  $f$ , tj.  $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in (a, b)$ . Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé  $x \in (\alpha, \beta)$ . □

**Příklad:** Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Použijeme substituci  $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ . Potom  $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} dx = - \int \sin y dy = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C.$$

Čímž je výpočet dokončen. Výsledek platí na libovolném otevřeném podintervalu  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . △

**Příklad:** Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

Výpočet provedeme na intervalu  $(0, +\infty)$  což je největší interval, na kterém je integrand definován. Pro substituci použijeme  $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$ , pro jejíž derivaci platí  $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Tudíž,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy = \\ &= 2 \operatorname{arctg} y + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Výsledek platí na  $(0, +\infty)$ , protože  $\operatorname{arctg} y$  je primitivní funkcí k  $\frac{1}{1+y^2}$  na  $\varphi((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ . △

**Příklad:** Nalezněte primitivní funkci k funkci  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  na intervalu  $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Funkce  $f$  je na intervalu  $J$  spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) dx.$$

Použijeme větu o substituci (č. 121), kde zvolíme  $f(y) = \frac{1}{y}$  a  $y = \varphi(x) = \cos(x)$ . Funkce  $\varphi$  zobrazuje interval  $J$  na interval  $(-1, 0)$  kde má  $f$  primitivní funkci  $F(y) = \ln(-y)$ . Navíc  $\varphi'(x) = -\sin(x)$ . Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln(-\cos(x)) + C, \quad x \in J.$$

Často se též substitute zapisuje jako  $y = \cos x$ ,  $dy = -\sin x \, dx$  a

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{1}{y} \, dy = -\ln|y| + C = -\ln(-\cos(x)) + C. \quad \triangle$$

V předchozí větě č. 121 byla stará integrační proměnná  $x$  s novou integrační proměnnou  $y$  svázána předpisem typu  $y = \varphi(x)$ . V následující větě naopak klademe  $x = \varphi(y)$ , čili  $y = \varphi^{-1}(x)$ . Tato varianta substitute budete tedy zřejmě založena na schopnosti derivovat inverzní funkci (viz větu č. 86).

**Věta 122** (O substituci II): Nechť  $f$  je definována na intervalu  $(a, b)$  a nechť  $\varphi$  je bijekce intervalu  $(\alpha, \beta)$  na  $(a, b)$  s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = G(t) + C \implies \int f(x) \, dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

*Důkaz.* Pomocí věty o derivaci složené funkce (č. 84) a věty derivaci inverzní funkce (č. 86) ověříme správnost tvrzení. Platí

$$\begin{aligned} \left(G(\varphi^{-1}(x))\right)' &= G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x). \end{aligned} \quad \square$$

**Příklad:** Pomocí předchozí věty vypočtete (již známý) integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu  $(a, b) = (-1, 1)$ . Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položíme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha, \beta) := (-\pi/2, \pi/2).$$

Funkce  $\sin$  je na intervalu  $(\alpha, \beta)$  rostoucí s nenulovou derivací  $\varphi'(t) = \cos t$ . Dále

$$\begin{aligned} G(t) &= \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cos t dt = \\ &= \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int 1 dt = t + C. \end{aligned}$$

Protože  $t = \arcsin(x)$  uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin(x) + C. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Podobně jako v předchozím případě se lze zbavit odmocniny. Nyní je však integrand definován na  $\mathbb{R}$ . Zvolíme-li

$$\varphi(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

pak

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(t)^2 &= 1 + \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Protože  $\varphi'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  dostáváme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi(t)^2}} \varphi'(t) dt = \int 1 dt = t + C$$

Funkce  $\varphi$  zobrazuje  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$  a je monotónně rostoucí s nenulovou derivací. K dokončení příkladu je nutné nalézt její inverzi. Pokud  $x = \varphi(t)$ , pak

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0.$$

Odtud

$$e^t = \frac{1}{2} \left( 2x \pm \sqrt{4x^2 + 4} \right) = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Smysl v našem případě má pouze znaménko plus. Tudíž,

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Uzavíráme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C. \quad \triangle$$

Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) z elementárních funkcí. Jako příklad uveďme<sup>1</sup>

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci.

Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje **cvik a zkušenost**. Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

**Příklad:** Vypočtěte  $\int x e^{x^2} dx$  a výsledek ověřte.

Pomocí substituce  $y = x^2$ ,

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Ověření,

$$\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{2} (e^{x^2})' + 0 = \frac{1}{2} \cdot 2x e^{x^2} = x e^{x^2}. \quad \triangle$$

## 6.4 Integrace racionálních funkcí

Jak již bylo řečeno, proces integrace libovolné funkce není jednoduché algoritmizovat (někdy ani nemusí existovat symbolický výsledek). Pokud se ale omezíme na

<sup>1</sup>Nejde o nepodstatné funkce. Například primitivní funkce k  $e^{-x^2}$  se vyskytuje v praktických aplikacích. V pravděpodobnostních a statistických tabulkách byste ji našli pod jménem **Erf** (*error function*)



racionální funkce, pak lze pro jejich integraci dát podrobný postup. Tím se budeme zabývat v této podkapitole. Nejprve začneme zavedením pojmů.

**Definice 123:** Funkci  $r$ , kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kde  $p$  a  $q$  jsou polynomy s reálnými koeficienty, nazýváme **racionální funkcí**.

Přirozeným definičním oborem racionální funkce z předchozí definice je zřejmě množina všech reálných čísel pro něž je jmenovatel  $q$  nenulový.

Nyní se budeme stručně zabývat otázkou jak nalézt primitivní funkci k racionální funkci, tedy výpočtem integrálu

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx.$$

### První krok: dělení polynomu polynomem

Stačí uvažovat případ kdy stupeň polynomu  $p$  je ostře menší než stupeň polynomu  $q$ . Pokud tomu totiž tak není (tj. stupeň  $p$  je větší nebo rovno stupni  $q$ ), pak lze polynom  $p$  vyjádřit ve tvaru

$$p(x) = u(x)q(x) + v(x),$$

kde  $u$  a  $v$  jsou polynomy a stupeň  $v$  je ostře menší než stupeň  $q$ . Tento rozklad lze získat dělením polynomu  $p$  polynomem  $q$ . Potom

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int u(x) dx + \int \frac{v(x)}{q(x)} dx.$$

První integrál lze nalézt velmi snadno (primitivní funkce k polynomu) a druhý integrál už je námi požadovaného typu.

**Příklad:** Jako příklad uvažme racionální funkci

$$r(x) = \frac{-x^4 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

V tomto případě  $p(x) = -x^4 + x + 1$  a  $q(x) = x^2 + 1$ . Stupeň polynomu  $p$  je ostře větší než stupeň  $q$ , skutečně  $4 > 2$ . Dělením polynomu polynomem dostáváme

$$(-x^4 + x + 1) : (x^2 + 1) = -x^2 + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Takže

$$\begin{aligned}\int r(x) dx &= -\int x^2 dx + \int 1 dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\ &= -\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.\end{aligned}\quad \triangle$$

## Druhý krok: rozklad na kořenové činitele

Nyní upravíme jmenovatel do tvaru součinu kořenových činitelů. Pro polynomy s reálnými koeficienty platí následující věta.

**Věta 124:** Polynom  $q$  s reálnými koeficienty a s koeficientem  $a$  u největší mocniny lze rozložit do tvaru

$$q(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{\ell_1} \cdots (x^2 + \beta_r x + \gamma_r)^{\ell_r},$$

kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  jsou *různé* reálné kořeny,  $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$  pro  $i = 1, \dots, r$  jsou různé kvadratické výrazy se záporným diskriminantem a kde  $k_1, \dots, k_s, \ell_1, \dots, \ell_r$  jsou přirozená čísla.

*Důkaz.* Vynecháváme. Plyne například z Gaussovy fundamentální věty algebry tvrdící, že libovolný (i komplexní) polynom stupně  $n$  má nejvýše  $n$  komplexních kořenů.  $\square$

**Poznámka:** Připomeňme, že diskriminant kvadratického výrazu  $ax^2 + bx + c$  je číslo  $D = b^2 - 4ac$ . Pokud má tento polynom reálné koeficienty, pak má dva různé reálné kořeny pokud  $D > 0$ , jeden dvojnásobný kořen pokud  $D = 0$  a dva komplexní kořeny pokud  $D < 0$ .

**Příklad:** Polynom  $q(x) = x^4 - 1$  lze rozložit takto:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

Diskriminant posledního kvadratického výrazu je  $D = -4$ .

Porovnejte náš výsledek s větou č. 124, kde v tomto případě máme  $s = 2$ ,  $r = 1$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $\ell_1 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$  a  $\gamma_1 = 1$ .  $\triangle$

**Příklad:** Polynom  $q(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$  má kořeny 1,  $-1$  a 2. Postupným vytýkáním kořenových činitelů dostáváme

$$\begin{aligned}x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 &= (x - 1)(x^3 - 3x - 2) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)^2.\end{aligned}\quad \triangle$$

### Třetí krok: rozklad na parciální zlomky

Nyní se náš zlomek pokusíme vyjádřit jako součet „jednodušších“ zlomků. Platí totiž následující věta.

**Věta 125:** Necht  $p$  a  $q$  jsou nenulové polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň  $p$  je ostře menší než stupeň  $q$  a  $q$  má rozklad jako v předchozí větě. Potom zlomek  $\frac{p(x)}{q(x)}$  lze vyjádřit jako součet zlomků tvaru (nazývaných **parciální**, tj. částečné)

$$\frac{A_{i,k}}{(x - \alpha_i)^k} \quad \text{a} \quad \frac{B_{i,\ell}x + C_{i,\ell}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^\ell},$$

kde  $1 \leq k \leq k_i$  a  $1 \leq \ell \leq \ell_i$

*Důkaz.* K důkazu je potřeba využít znalostí o řešení lineárních soustav rovnic, které v tento okamžik nemáme k dispozici a budete se jimi zabývat v předmětu BI-LIN. V následujících příkladech vždy tvrzení této věty ověříme (potřebujeme najít hodnoty zmiňovaných konstant, o kterých podle věty pouze víme, že existují).  $\square$

**Příklad:** Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3 - 1}.$$

Jediným kořenem jmenovatele je  $x = 1$ ,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Podle věty č. 125 hledáme  $A$ ,  $B$  a  $C$  tak, aby pro všechna přípustná  $x$  platilo

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{(\textcolor{red}{A} + \textcolor{red}{B})x^2 + (\textcolor{red}{A} - \textcolor{blue}{B} + \textcolor{blue}{C})x + \textcolor{green}{A} - \textcolor{green}{C}}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}.$$

Odtud  $\textcolor{red}{A} + \textcolor{red}{B} = 0$ ,  $\textcolor{red}{A} - \textcolor{blue}{B} + \textcolor{blue}{C} = 0$  a  $\textcolor{green}{A} - \textcolor{green}{C} = 1$ . Řešením je

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}. \quad \triangle$$

**Příklad:** Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x^3}{x^4 - 1}.$$

Rozklad jmenovatele na kořenové činitele již známe. Hledaný rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+1}.$$

Požadujeme platnost pro všechna přípustná  $x$ . Vynásobíme-li poslední rovnost jmenovatelem, dostaneme

$$\begin{aligned} x^3 &= A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (B_1x + C_1)(x-1)(x+1) = \\ &= A_1(x^3 + x^2 + x + 1) + A_2(x^3 - x^2 + x - 1) + B_1(x^3 - x) + C_1(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Dva polynomy se rovnají právě když se rovnají jejich koeficienty. Porovnáním dostáváme

mocnina $x$	koeficient
$x^3$	$1 = A_1 + A_2 + B_1$
$x^2$	$0 = A_1 - A_2 + C_1$
$x^1$	$0 = A_1 + A_2 - B_1$
$x^0$	$0 = A_1 - A_2 - C_1$

Jedná se o soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé, jejím řešením je  $A_1 = A_2 = \frac{1}{4}$ ,  $B_1 = \frac{1}{2}$  a  $C_1 = 0$ . Celkem

$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}. \quad \triangle$$

**Příklad:** Rozložte na parciální zlomky výraz

$$\frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

Pro jmenovatel platí  $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$  a proto podle věty č. 125 hledáme rozklad ve tvaru

$$\frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}.$$

Odtud opět dostáváme rovnici

$$x^3 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D.$$

Porovnáním koeficientů ihned dostáváme  $A = 1$ ,  $B = 0$  a tudíž  $C = -1$  a  $D = 0$ .  $\triangle$

**Poznámka (Mathematica):** K rozkladu na parciální zlomky lze v *Mathematica* použít příkaz `Apart[expr]`.

## Čtvrtý krok: integrace parciálních zlomků

Po rozkladu na parciální zlomky stačí umět integrovat výrazy typu

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx \quad \text{a} \quad \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^\ell} dx.$$

- První integrál vede buď na racionální funkci nebo logaritmus.
- U druhého lze kvadratický člen ve jmenovateli doplnit na čtverec, použít substituci a využít známých integrálů

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) + C \quad \text{a} \quad \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C.$$

Podrobněji si tento poslední krok ukážeme na konkrétních příkladech.

**Poznámka** (Doplnění na čtverec): Úpravu kvadratického polynomu

$$ax^2 + bx + c = a(x + A)^2 + B,$$

nazýváme „doplněním na čtverec“. Z nového tvaru lze také snadno vyčíst souřadnice vrcholu paraboly.

**Příklad:** Následuje několik demonstrativních úprav na čtverec.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 5 &= x^2 + 2x + 1 - 6 = (x + 1)^2 - 6, \\ 2x^2 + 2x + 3 &= 2(x^2 + x) + 3 = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3 = \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Všimněte si, že po úpravě se vždy daná proměnná vyskytuje pouze v kvadrátu a nikde jinde! △

## 6.5 Příklady

Na závěr této kapitoly uvedeme několik řešených příkladů.

**Příklad:** Vypočtěte

$$\int \frac{x^3}{x^4 - 1} dx$$

na intervalu  $(1, +\infty)$ .

V předcházejícím příkladě jsme odvodili rozklad integrandu na parciální zlomky. Rovnou tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^4 - 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x - 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x}{1 + x^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln(x - 1) + \frac{1}{4} \ln(x + 1) + \frac{1}{4} \ln(1 + x^2) + C. \end{aligned} \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Kvadratický polynom ve jmenovateli dále rozložit nelze, neboť  $D = -16$ . Jmenovatel upravíme na čtverec a vytkneme konstantu,

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4 \cdot \left( \left( \frac{x + 1}{2} \right)^2 + 1 \right),$$

a zavedeme substituci  $y = \frac{x+1}{2}$ . Tím dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x + 1}{2} \right) + C. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Integrand se od minulého příkladu liší pouze čitatelem. Nyní nejprve v čitateli „vyrobíme“ derivaci jmenovatele

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx. \end{aligned}$$

V prvním integrálu provedeme substituci  $y = x^2 + 2x + 5$  a druhý už známe z předchozího příkladu (vede na arctg doplněním na čtverec). Celkem

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x + 1}{2} \right) + C. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Na výraz tohoto typu můžeme také narazit po rozkladu na parciální zlomky. Výpočet tohoto integrálu je následující

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int x \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{cc} x & \frac{x}{(x^2+1)^2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right| = \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \arctg x = \\ &= \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + C, \end{aligned} \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx.$$

Můžeme rovnou začít úpravou na parciální zlomky. Rozklad hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{1+x^2}.$$

Po úpravě

$$(A+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + C = 1.$$

Okamžitě dostáváme  $B = 0$  a  $C = 1$ , a poté  $A = -1$ ,  $E = 0$  a  $D = 1$ . Takže

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx &= \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c. \end{aligned} \quad \triangle$$

# Kapitola č. 7

## Riemannův integrál

Maximum a minimum; supremum a infimum; dělení intervalu; dolní součet a horní součet; horní a dolní integrál; Riemannův integrál; integrální součet; postačující podmínka existence Riemannova integrálu; Newtonova formule.

### 7.1 Supremum a infimum

Připomeňme pojem maxima a minima množiny. Buď  $M \subset \mathbb{R}$ . Číslo  $\alpha \in M$  nazýváme

- **maximem** množiny  $M$ , právě když pro všechna  $x \in M$  platí  $x \leq \alpha$ ,
- **minimem** množiny  $M$ , právě když pro všechna  $x \in M$  platí  $\alpha \leq x$ .

Některé množiny  $M \subset \mathbb{R}$  nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval  $M = (0, 1)$ . Čísla 0 a 1 nejsou minimem ani maximem, neboť  $0, 1 \notin M$ . Každá konečná množina ovšem má minimum i maximum.

Abychom tento problém odstranili, zavádíme pojem infima a suprema množiny.

**Definice 126:** Buď  $A$  neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo  $\alpha \in \mathbb{R}$  nazveme **infimem** množiny  $A$ , značíme  $\inf A$ , právě když

1. pro každé  $x \in A$  platí  $\alpha \leq x$ , ( $\alpha$  je **dolní závora**  $A$ )
2. pokud  $\beta \in \mathbb{R}$  také splňuje předchozí bod, pak  $\beta \leq \alpha$ .  
( $\alpha$  je největší dolní závora  $A$ )

Pokud množina  $A$  není zdola omezená, pak klademe  $\inf A := -\infty$ . Pro prázdnou množinu klademe  $\inf \emptyset := +\infty$ .

**Definice 127:** Buď  $A$  neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo  $\alpha \in \mathbb{R}$  nazveme **supremem** množiny  $A$ , značíme  $\sup A$ , právě když

1. pro každé  $x \in A$  platí  $x \leq \alpha$ , ( $\alpha$  je **horní závora**  $A$ )



2. pokud  $\beta \in \mathbb{R}$  také splňuje předchozí bod, pak  $\alpha \leq \beta$ .  
( $\alpha$  je nejmenší dolní závora  $A$ )

Pokud množina  $A$  není shora omezená, pak klademe  $\sup A := +\infty$ . Pro prázdnou množinu klademe  $\sup \emptyset := -\infty$ .

**Věta 128:** Buď  $A$  podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ( $\inf A$ ) a supremum ( $\sup A$ ).

*Důkaz.* Vynecháváme, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel. □

**Příklad:** Pro interval  $J = (-2, 1)$  platí

$$\max J = 1, \quad \sup J = 1, \quad \min J \text{ neexistuje,} \quad \inf J = -2. \quad \triangle$$

V dalším textu nás budou zajímat hodnoty funkce nabývané na různých množinách. Zavádíme proto následující značení. Pro  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a množině  $M \subset D_f$  klademe

$$\begin{aligned} \inf_M f &= \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \sup_M f &= \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Buď  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá funkce a  $M \subset D_f$  uzavřený omezený interval. Potom klademe

$$\begin{aligned} \max_M f &= \max_{x \in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \min_M f &= \min_{x \in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

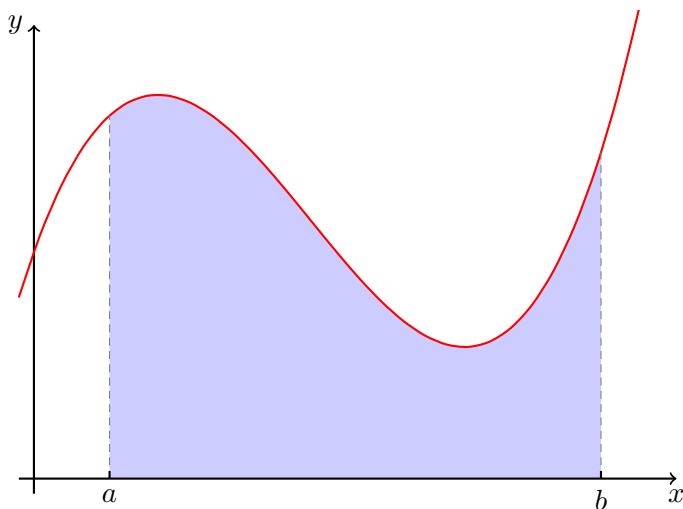
Připomeňme, že tato  $\min$  a  $\max$  existují díky spojitosti  $f$  a uzavřenosti  $M$ .

## 7.2 Konstrukce Riemannova integrálu

Nejjednodušší geometrickou motivací určitého (Riemannova<sup>1</sup>) integrálu je výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce a osou nezávisle proměnné. Na obrázku č. 7.1 je tato plocha znázorněna světle modrou barvou.

Celá konstrukce Riemannova integrálu vychází ze znalosti obsahu obdélníka. Danou plochu pod grafem funkce budeme postupně aproximovat plochou sestavenou z mnoha obdélníků. Ukazuje se, že pro spojitou funkci tento limitní proces dává dobrý výsledek. Nejprve definujme základní pojmy.

<sup>1</sup>Bernhard Riemann, německý matematik, 1826 – 1866.



Obrázek 7.1: Plocha pod grafem funkce.

**Definice 129:** Buď dán interval  $\langle a, b \rangle$ . Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

nazýváme **dělení intervalu**  $\langle a, b \rangle$ . Bodům  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , říkáme **dělicí body intervalu**  $\langle a, b \rangle$ . Intervalu  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$  říkáme **částečný interval** intervalu  $\langle a, b \rangle$  při dělení  $\sigma$ . Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

nazýváme **normou dělení**  $\sigma$ .

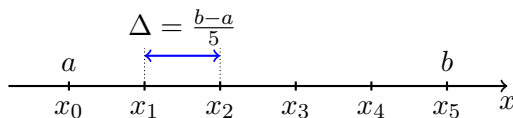
**Příklad** (Ekvidistantní dělení): Pro interval  $\langle a, b \rangle$  a  $n \in \mathbb{N}$  položme  $\Delta := \frac{b-a}{n}$  a

$$x_i := a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \{a, a + \Delta, a + 2\Delta, \dots, a + (n-1)\Delta, a + n\Delta = b\}.$$

V případě  $n = 5$  si lze ekvidistantní dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  představit jako na následujícím obrázku č. 7.2.  $\triangle$



Obrázek 7.2: Příklad ekvidistantního dělení intervalu.

Buďte funkce  $f$  definovaná a omezená na intervalu  $J = \langle a, b \rangle$  a  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dělení intervalu  $J$ . Označme

$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f.$$

pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ . Potom součty

$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n M_i(\sigma, f) \Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^n m_i(\sigma, f) \Delta_i$$

nazýváme **horním** a **dolním součtem funkce  $f$**  při dělení  $\sigma$ .

Dolní, resp. horní, součty představují obsah plochy tvořené obdélníky pod, resp. nad, grafem funkce s podstavami tvořenými částečnými dělicími intervaly. Následující obrázky č. 7.3 a 7.4 jsou ilustrativní.

Pro funkci  $f$  definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu  $J = \langle a, b \rangle$  definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx := \inf \{ S(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J \} \quad \text{a} \quad \underline{\int_a^b} f(x) dx := \sup \{ s(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J \}.$$

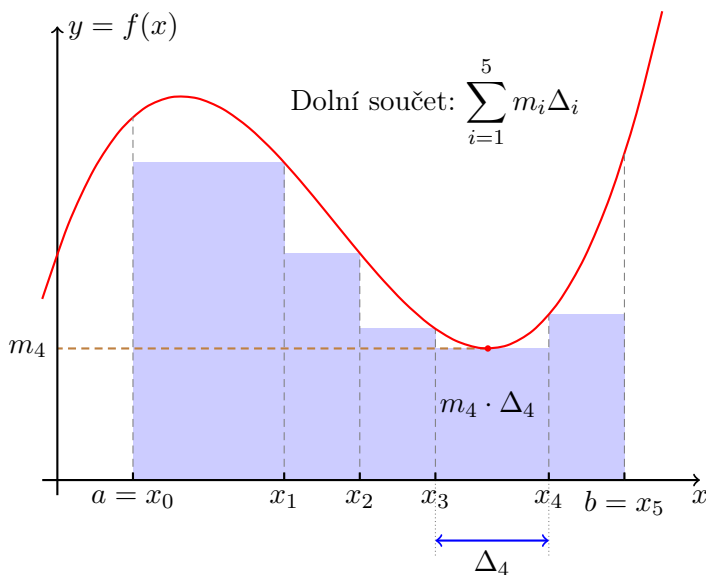
a nazýváme **horním**, resp. **dolním, integrálem** funkce  $f$  na intervalu  $J$ .

**Definice 130:** Pokud pro funkci  $f$  definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu  $J$  platí

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce  $f$  na intervalu  $J$**  a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Obrázek 7.3: Dolní součet funkce  $f$  při dělení  $\sigma$ .

Posloupnost dělení  $\sigma_n$  nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

**Věta 131** (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu): Buď  $f$  spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Pokud je navíc  $(\sigma_n)$  normální posloupnost dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  potom limity

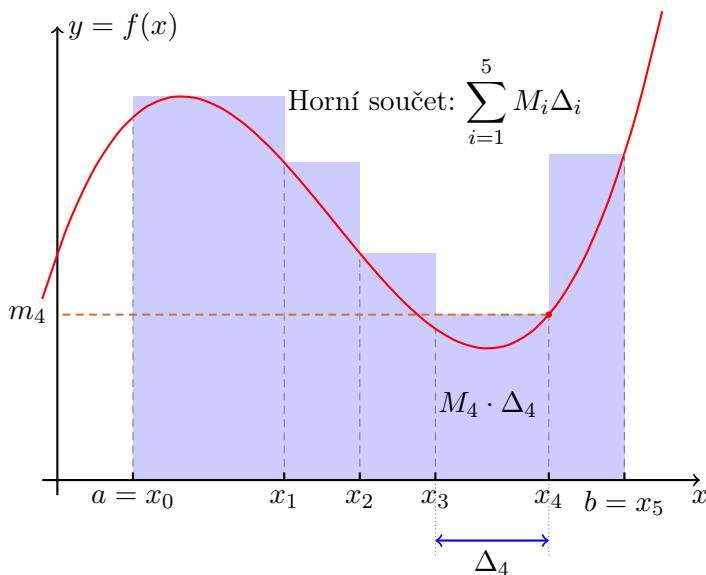
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

*Důkaz.* Vynecháváme. □

**Definice 132:** Pro funkci  $f$  spojitou na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  a dělení  $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce  $f$  při dělení  $\sigma$**  předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma, f) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i,$$

Obrázek 7.4: Horní součet funkce  $f$  při dělení  $\sigma$ .

kde  $\alpha_i$  patří do intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce  $f$  při dělení  $\sigma$  je dán nerovnostmi

$$s(\sigma, f) \leq \mathcal{J}(\sigma, f) \leq S(\sigma, f).$$

Riemannův integrál funkce  $f$  spojitě na intervalu  $\langle a, b \rangle$  lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f), \quad (7.1)$$

kde  $(\sigma_n)$  je libovolná normální posloupnost dělení.

**Příklad:** Vypočítejte integrál z konstantní funkce  $f(x) = c$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Pro libovolné dělení  $\sigma$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  platí

$$s(\sigma, f) = S(\sigma, f) = \mathcal{J}(\sigma, f) = c(b - a).$$

Takže pro libovolnou normální posloupnost  $(\sigma_n)$  dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  dostáváme

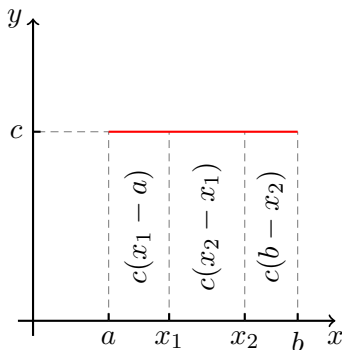
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f) = c(b - a).$$

Riemannův integrál funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  je pak

$$\int_a^b f = c(b - a).$$

Viz obrázek č. 7.5.

△



Obrázek 7.5: Riemannův integrál z konstantní funkce.

**Příklad:** Pomocí definice vypočtete Riemannův integrál funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $J = \langle 0, 1 \rangle$ .

Zvolme normální posloupnost  $(\sigma_n)$  ekvidistantních dělení intervalu  $J$ .

$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení  $\sigma_n$  dostáváme

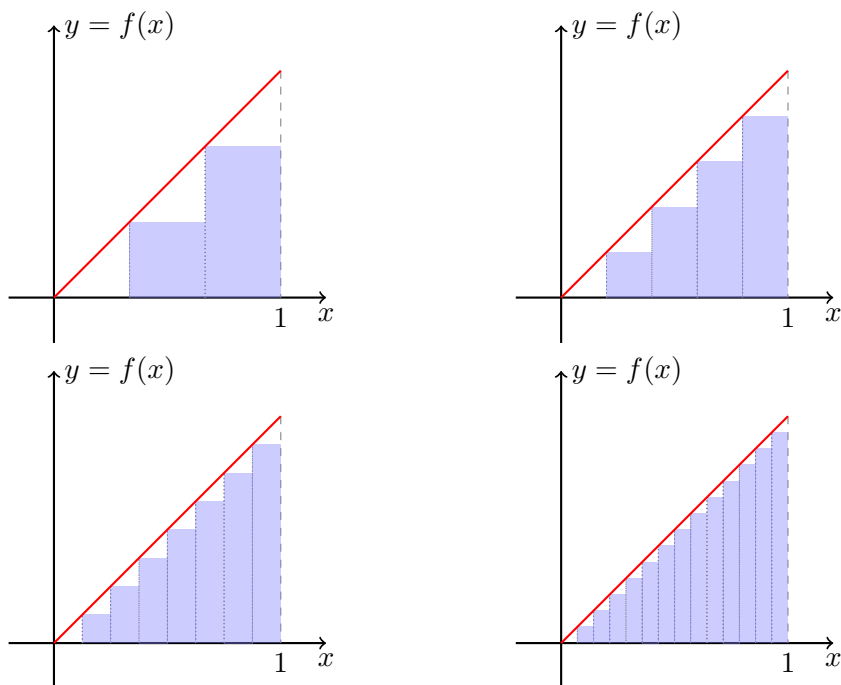
$$s(\sigma_n, f) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f) = \frac{1}{2}.$$

△

**Poznámka** (*Mathematica*): Určitý integrál lze v *Mathematica* počítat pomocí příkazu `Integrate[f, {x, a, b}]`, kde  $f$  je integrovaná funkce (výraz),  $x$  integrační proměnná a  $a$  dolní a  $b$  horní mez.



Obrázek 7.6: K výpočtu Riemannova integrálu funkce  $f(x) = x$ .

**Poznámka** (Numerický výpočet integrálu): V následující podkapitole si ukážeme jak v některých případech lze počítat Riemannův integrál symbolicky. Na tomto místě je ale vhodné poznamenat, že konstrukce (definice) uvedená v této kapitole přímo nabádá k numerickému výpočtu pomocí počítače. Nejvhodnější k tomuto účelu použít integrálních součtů, vizte rovnici (7.1). Výhodou oproti horním a dolním součtům je, že není potřeba složitě hledat infima ani suprema dané funkce na dělicích intervalech.

Na tomto místě zmiňme aspoň jeden sofistikovanější způsob známý jako **Simpsonovo pravidlo**. Jeho myšlenka opět spočívá v konstrukci dělení  $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ . V předchozích odstavcích jsme nad dělicími intervaly  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  nahradili původní funkci  $f$  konstantní funkcí (supremem, infimem nebo libovolnou hodnotou funkce  $f$ ). Nyní nahradíme funkci  $f$  nad intervalem  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  kvadratickou interpolací.

Hledáme kvadratickou funkci  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  splňující

$$\begin{aligned}\alpha x_{i-1}^2 + \beta x_{i-1} + \gamma &= f(x_{i-1}), \\ \alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma &= f(x_i), \\ \alpha \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)^2 + \beta \frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \gamma &= f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right).\end{aligned}$$

Tyto tři lineární rovnice pro tři neznámé  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  lze vyřešit (explicitní vzorečky pro ně lze nalézt v **bi-zma-m-integrace.nb** notebooku na EDUXových stránkách BI-ZMA). Příspěvek k integrálu na intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  pak nahradíme skutečným integrálem z této kvadratické funkce (vizte Newtonovu formuli [137](#) dále),

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha x^2 + \beta x + \gamma \, dx = \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1}) \left( f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right).$$

Tudíž podle Simpsonova pravidla je přibližnou hodnotou integrálu

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

hodnota součtu

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1}) \left( f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right),$$

kde  $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  je dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

## 7.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

V dalším textu se pro jednoduchost omezíme na spojitě omezené funkce, pro něž Riemannův integrál existuje. Následující vlastnosti lze odvodit přímo z definice Riemannova integrálu (resp. pomocí integrálních součtů a normálních posloupností dělení). První dvě věty velmi zjednodušují praktické výpočty.

**Věta 133** (Aditivita integrálu): Nechť  $f$  a  $g$  jsou spojitě funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom pro Riemannův integrál funkce  $f + g$  (která je také automaticky spojitá na  $\langle a, b \rangle$ ) platí

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$



**Věta 134** (Multiplikativita integrálu): Nechť  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a  $c \in \mathbb{R}$  je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce  $cf$  platí

$$\int_a^b (cf)(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

Předchozí dvě věty často vyjadřujeme konstantním, že Riemannův (určitý) integrál je lineární. Riemannův integrál je aditivní i vůči mezím, platí totiž:

**Věta 135** (Aditivita v mezích): Nechť  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a  $c \in (a, b)$  je konstanta, pak

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Konečně z nerovností mezi funkcemi lze usuzovat na nerovnost mezi jejich určitými integrály. Tuto vlastnost lze často využít při odhadování integrálů (např. při výpočtu rychlosti růstu, k této problematice se dostaneme později).

**Věta 136** (Nerovnosti mezi integrály): Nechť jsou  $f$  a  $g$  spojitě funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a necht' platí nerovnost  $f(x) \leq g(x)$  pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$ . Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožňuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

**Věta 137** (Newtonova formule): Nechť  $f$  je funkce spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  s primitivní funkcí  $F$ . Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b.$$

*Důkaz.* Uvažme  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Použijeme Lagrangeovu větu (věta č. 91) o přírůstku funkce na funkci  $F$  a intervaly  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  postupně pro  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n \left( F(x_i) - F(x_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^n F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta_i, \end{aligned}$$

kde  $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Takže

$$F(b) - F(a) = \mathcal{J}(\sigma, f).$$

Uvážíme-li nyní libovolnou normální posloupnost dělení  $(\sigma_n)$  pak

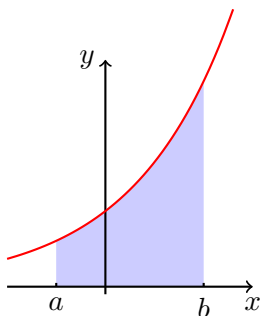
$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

**Příklad:** Pro  $a < b$  vypočtěte integrál

$$\int_a^b e^x dx.$$

Primitivní funkcí k  $e^x$  je funkce  $e^x$ . Pak

$$\int_a^b e^x dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a. \quad \triangle$$



Obrázek 7.7: Plocha pod grafem exponenciální funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

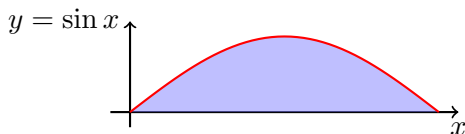
**Příklad:** Spočítejte integrál

$$\int_0^\pi \sin x dx.$$

Primitivní funkcí k funkci  $\sin x$  je funkce  $-\cos x$ . Proto

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce  $\sin$  je tedy 2 (v daných jednotkách plochy).  $\triangle$

Obrázek 7.8: Plocha pod grafem funkce  $\sin$  na intervalu  $(0, \pi)$ .

## 7.4 Per partes a substitute pro určitý integrál

Díky Newtonově formuli (věta č. 137) můžeme nyní relativně snadno přeformulovat metodu integrace pomocí per partes a substitute i pro určitý integrál.

**Věta 138:** Necht  $f$  a  $g$  jsou funkce spojité na  $\langle a, b \rangle$ ,  $f$  má spojitou derivaci na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a necht  $G$  je primitivní funkce k funkci  $g$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx.$$

*Důkaz.* Funkce  $fG$  je primitivní funkcí k funkci  $f'G + fg$  na intervalu  $(a, b)$  a spojitá na  $\langle a, b \rangle$ . Předpoklady spojitosti na intervalu  $\langle a, b \rangle$  zaručují existenci integrálů  $\int_a^b f'G$  a  $\int_a^b fg$ . Požijeme-li linearitu integrálu a Newtonovu formuli dostáváme

$$\int_a^b f'(x)G(x) dx + \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b (fG)'(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b. \quad \square$$

**Příklad:** Vypočtete

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

Derivujeme  $\ln(1+x)$  a integrujeme 1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \\ &= \ln(2) - [x - \ln|1+x|]_0^1 = 2\ln(2) - 1. \quad \triangle \end{aligned}$$

Zavádíme následující značení

- $\int_a^a f := 0$ ,
- pro  $a > b$  klademe  $\int_a^b f := -\int_b^a f$ .

**Věta 139** (O substituci): Nechť pro funkce  $f$  a  $\varphi$  platí

1.  $\varphi$  a její derivace  $\varphi'$  jsou spojité na  $\langle \alpha, \beta \rangle$ ,
2.  $f$  je spojitá na  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ .

Potom

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Podobně lze formulovat i druhou větu o substituci pro určitý integrál.

**Příklad:** Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx.$$

Použijeme substituci  $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$ . Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx = - \int_{3/2}^1 \frac{1}{y} dy = \left[ \ln |y| \right]_1^{3/2} = \ln \frac{3}{2}. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx.$$

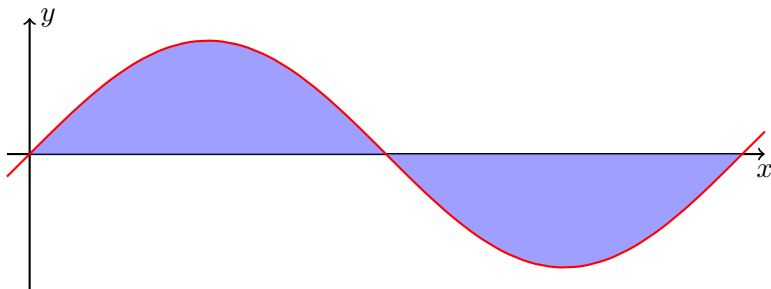
Pomocí substituce  $y = x^4$ ,  $dy = 4x^3 dx$ , ihned dostáváme

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{4} \left[ \arctg y \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}. \quad \triangle$$

## 7.5 Poznámky

**Poznámka:** Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou  $x$ . Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx = -2.$$



**Poznámka:** Pokud je funkce  $f$  definována na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , avšak není na něm spojitá, stále může mít Riemannův integrál. Nejjednodušším případem je situace s jedním bodem skokové nespojitosti:

- existuje  $c \in (a, b)$  tak, že  $f$  je spojitá na  $\langle a, c \rangle$  a  $(c, b)$ ,
- existují konečné jednostranné limity v bodě  $c$ .

Potom platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Integrály na pravé straně rovnosti jsou již ze spojitých funkcí na uzavřených intervalech. Podobně lze postupovat má-li příslušná funkce konečný počet bodů nespojitosti tohoto typu (s konečnými jednostrannými limitami).

**Příklad:** Vypočtěte integrál  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ , kde  $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$ .

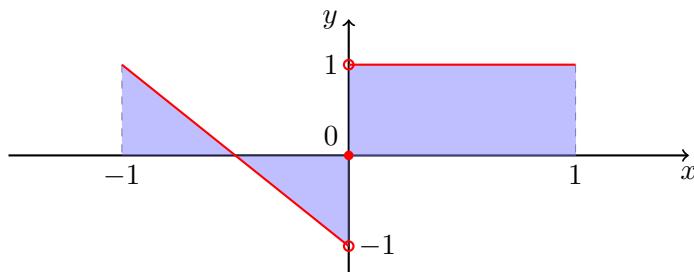
Funkce  $f$  není spojitá v bodě 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1.$$

Pro podrobnější představu vizte obrázek č. 7.9. Takže

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-2x - 1) dx + \int_0^1 1 dx = -\left[x^2 + x\right]_{-1}^0 + 1 = 1. \quad \triangle$$

Riemannův integrál jsem konstruovali pro funkce omezené na omezených intervalech. Často je však potřeba integrovat funkce na neomezených množinách případně integrovat neomezené funkce. Zavádíme proto pojem **zobecněného Riemannova integrálu**. V následujících poznámkách nastíníme způsob jeho konstrukce.

Obrázek 7.9: Graf funkce  $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$ .

**Poznámka** (Zobecnění na neomezený interval): Pro spojitou reálnou funkci  $f$  na  $\mathbb{R}$  zkoumejme limitu

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) \, dx.$$

Pokud tato limita existuje, je konečná a nezávisí na volbě  $c \in \mathbb{R}$ , pak ji nazýváme zobecněným Riemannovým integrálem a značíme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx.$$

Pokud tento Riemannův integrál existuje, pak o něm také z očividných důvodů říkáme, že **konverguje**.

**Příklad:** Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

Snadno ověříme, že

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c \frac{1}{1+x^2} \, dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \arctg x \right]_a^c + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \arctg x \right]_c^b = \\ &= \arctg(c) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctg(c) = \pi. \end{aligned}$$

△

Integrační množinou nemusí být celé  $\mathbb{R}$ .

**Příklad:** Vypočtěte integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx.$$

$$\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}, \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1. \quad \triangle$$

V případě, že zkoumáme funkci neomezenou na zadaném intervalu, například  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  na  $(0, 1)$ , stále můžeme integraci limitně rozšířit na celou množinu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Klademe

$$\int_0^1 f(x) dx := \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 x^{-1/2} dx = 2 \lim_{a \rightarrow 0+} \left[ x^{1/2} \right]_a^1 = 2(1 - 0) = 2.$$

Při integraci lze často využít symetrie integrované funkce. Následující věta mluví o integraci sudých či lichých intervalů na symetrických intervalech a o integraci periodických funkcí.

**Věta 140:** Necht  $f$  je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li  $f$  sudá funkce na  $\langle -a, a \rangle$ , pak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2. Je-li  $f$  lichá funkce na  $\langle -a, a \rangle$ , pak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

3. Je-li  $f$  periodická na  $\mathbb{R}$  s periodou  $T$ , pak pro každé  $a, b \in \mathbb{R}$  platí

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

*Důkaz.* 1. Pomocí substituce  $y = -x$  dostáváme

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-y)(-1) dy = \int_0^a f(y) dy.$$

2. Stejným způsobem jako v prvním bodě odvodíme

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx.$$

3. Pomocí substituce  $y = x + T$  a periodicity  $f$  snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{a+T} f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx + \int_b^{a+T} f(x) dx = \\ &= \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx + \int_b^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx. \quad \square\end{aligned}$$

**Příklad:** Vypočítejte integrály

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 - x) dx, \quad \int_{-1}^1 x e^{x^2} dx, \quad \int_0^{2\pi} |\sin x| dx.$$

Postupně vypočteme všechny integrály a použijeme předchozí větu.

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 - x) dx = 3 \cdot 2 \int_0^2 x^2 dx = 3 \cdot 2 \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 16.$$

Pro druhý integrál ihned můžeme psát

$$\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou  $\pi$  a navíc sudá, proto

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \left[ -\cos x \right]_0^{\pi} = 4. \quad \triangle$$

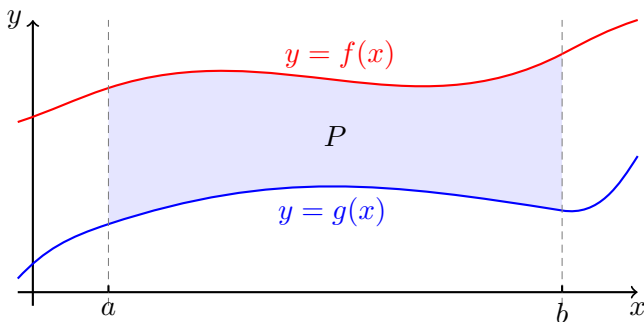
## 7.6 Výpočet obsahů plošných útvarů

Z geometrické interpretace Riemannova integrálu ihned plyne následující tvrzení umožňující počítat obsahy různých zakřivených rovinných útvarů. Pro ilustraci uvádíme i obrázek č. 7.10.

**Věta 141:** Necht  $f$  a  $g$  jsou funkce spojitě na  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $f(x) \geq g(x)$  pro každé  $x \in \langle a, b \rangle$ . Pak obsah plochy  $P$  ohraničené přímkami  $x = a$  a  $x = b$  a grafy funkcí  $f$  a  $g$  je rovna

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$





Obrázek 7.10: Obsah plochy ohraničené dvěma grafy funkcí.

**Příklad:** Vypočtěte obsah  $S$  elipsy s hlavní poloosou  $a$  a vedlejší poloosou  $b$ .

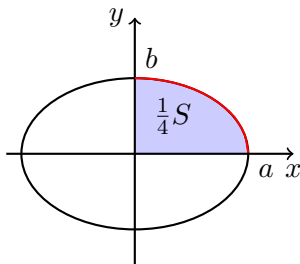
Rovnice elipsy je  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Vzhledem k osovým symetriím stačí spočítat čtvrtinu obsahu (vizte obrázek č. 7.11). Vrchní oblouk elipsy v patřící do prvního kvadrantu je popsán funkcí  $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ ,  $D_f = \langle 0, a \rangle$ .

Tudíž, použijeme-li substituci  $x = a \sin t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_0^a f(x) dx = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a \cos(t) dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4}ab. \end{aligned}$$

Pro celkovou plochu tak dostáváme  $S = \pi ab$ .

△



Obrázek 7.11: K výpočtu plošného obsahu elipsy.

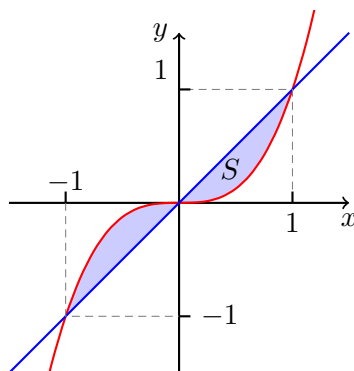
**Příklad:** Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami  $y = x^3$  a  $y = x$ . Tato plocha je vyobrazena na obrázku č. 7.12.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice  $x^3 = x$  jsou  $x = -1$ ,  $x = 1$  a  $x = 0$ . Dostáváme proto průsečíky

$$(-1, 1), (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$

Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}. \quad \triangle$$



Obrázek 7.12: Plocha ohraničená křivkami  $y = x^3$  a  $y = x$ .

**Příklad:** Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

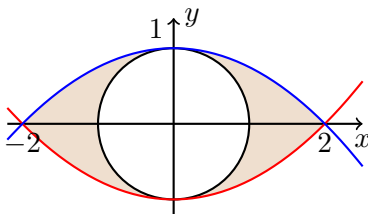
která je vyobrazena na obrázku č. 7.13.

Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je

$$\int_{-2}^2 \left( 1 - \frac{1}{4}x^2 \right) - \left( \frac{1}{4}x^2 - 1 \right) dx = 2 \int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 dx = 2 \left[ 2x - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi. \quad \triangle$$



Obrázek 7.13: Sauronovo oko.

## 7.7 Objem a obsah pláště rotačního tělesa

V této kapitole se budeme zabývat vlastnostmi rotačních těles, tedy těles vzniklých rotací grafu (resp. plochy pod grafem) funkce kolem osy  $x$ .

**Věta 142:** Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pak objem  $V$  rotačního tělesa vzniklého rotací plochy pod grafem funkce  $f$  kolem osy  $x$  je

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

*Důkaz.* Uvažujme dělení  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Použijeme stejné značení jako při definici Riemannova integrálu:

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad M_i = \max_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \quad \text{a} \quad m_i = \min_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f.$$

Pro objem platí

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \Delta_i \leq V \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \Delta_i.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že  $f$  je nezáporná, protože rotací grafu funkce  $f$  a  $|f|$  kolem osy  $x$  vznikne stejné těleso. Pro nezápornou funkci platí

$$M_i^2 = \max_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f^2 \quad \text{a} \quad m_i^2 = \min_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f^2.$$

Celkem pro objem platí nerovnosti

$$\pi s(\sigma, f^2) \leq V \leq \pi S(\sigma, f^2),$$

kde  $s(\sigma, f^2)$  a  $S(\sigma, f^2)$  jsou dolní a horní součet funkce  $f^2$  při dělení  $\sigma$ . Zvolíme-li libovolnou posloupnost normálních dělení  $(\sigma_n)$ , pak ze spojitosti  $f$  a věty o sevřené posloupnosti plyne

$$V = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} s(\sigma_n, f^2) = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} S(\sigma_n, f^2) = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad \square$$

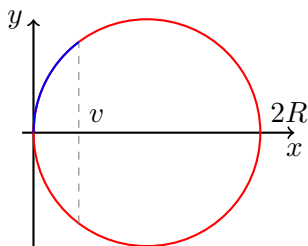
**Příklad:** Vypočtete objem kulového vrchlíku o výšce  $0 < v < R$  useknutého z koule o poloměru  $R$ .

Vrchlík získáme rotací grafu funkce

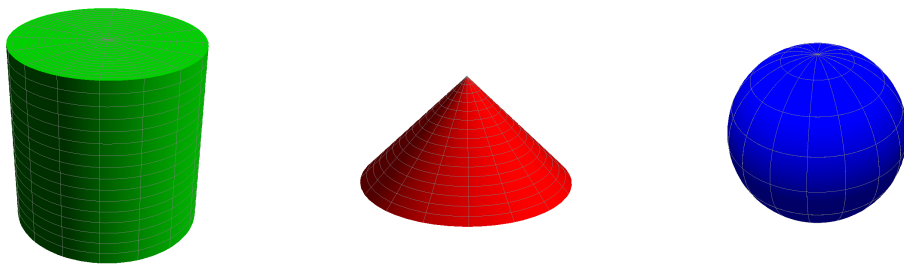
$$f(x) = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{2xR - x^2}$$

na intervalu  $\langle 0, v \rangle$ . Viz obrázek č. 7.14. Proto

$$V = \pi \int_0^v (2xR - x^2) dx = \pi \left[ x^2 R - \frac{x^3}{3} \right]_0^v = \pi v^2 \left( R - \frac{v}{3} \right). \quad \triangle$$



Obrázek 7.14: K výpočtu objemu kulového vrchlíku o výšce  $v$ .



Obrázek 7.15: Další známá rotační tělesa: válec ( $V = \pi v r^2$ ), kužel ( $V = \frac{\pi}{3} r^2 v$ ) a koule ( $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ).

**Příklad:** Vypočtete objem koule o poloměru  $r > 0$ .

Za  $f$  volíme

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad D_f = \langle -r, r \rangle.$$

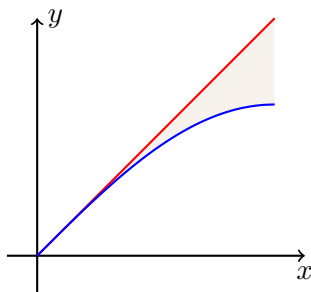
Potom podle vzorce

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[ r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací oblasti mezi grafy funkcí  $f(x) = x$  a  $g(x) = \sin(x)$  na intervalu  $\langle 0, \pi/2 \rangle$ .

Rotovaná plocha je pro názornost uvedena na obrázku č. 7.16. Celkový objem získáme jako rozdíl dvou objemů

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/2} x^2 dx - \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \\ &= \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right). \end{aligned} \quad \triangle$$



Obrázek 7.16: K výpočtu tělesa vzniklého rotací mezi grafy  $f(x) = x$  a  $g(x) = \sin(x)$  na intervalu  $\langle 0, \pi/2 \rangle$ .

Dále se podíváme jak počítat obsah pláště rotačního tělesa.

**Věta 143:** Necht funkce  $f$  je diferencovatelná na  $\langle a, b \rangle$  a necht  $f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$  je funkce spojitá na tomto intervalu. Pak obsah pláště  $P$  rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce  $f$  kolem osy  $x$  je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

*Důkaz.* Při důkazu se postupuje obdobně jako v předchozí větě o výpočtu objemu. Důkaz však pro jeho technickou náročnost vynecháme.  $\square$

**Příklad:** Vypočteme povrch koule o poloměru  $r$ .

Použijeme stejnou funkci  $f$  jako při výpočtu objemu,  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Její derivace,

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Sice není omezená na  $\langle -r, r \rangle$ , ale

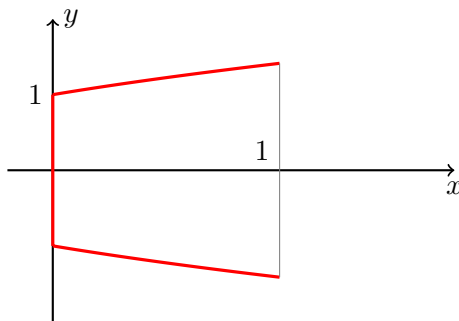
$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = r.$$

Povrch koule tedy je

$$P = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 4\pi r^2.$$

△

**Příklad:** Vypočtete povrch rotačně symetrické nádoby s průřezem



kde stěna je udána grafem funkce  $f(x) = \sqrt{x+1}$  nad intervalem  $\langle 0, 1 \rangle$ .  
Nezapomeňme započítat i podstavu

$$S = \pi + 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4(x+1)}} dx.$$

Integrand lze po několika přímočarých operacích zjednodušit na

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{5+4x} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} \frac{1}{4} (5+4x)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{12} (27 - 5^{3/2}).$$

Takže povrch nádoby je

$$S = \pi + \frac{\pi}{6} (27 - 5^{3/2}).$$

△

## 7.8 Délka křivky

V této podkapitole se budeme zabývat křivkou a její délkou. Konkrétně se budeme zajímat křivkou v rovině, intuitivní představu křivky formalizuje následující definice.

**Definice 144:** Buďte  $f$  a  $g$  dvě spojité funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom zobrazení  $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisem

$$F(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

nazýváme křivkou v  $\mathbb{R}^2$ .

**Poznámka:** Připomeňme, že kulaté závorky v předchozí definici představují uspořádanou dvojici dvou reálných čísel (bod v  $\mathbb{R}^2$ ). Zobrazení  $F$  tedy každému  $t \in \langle a, b \rangle$  přiřadí  $F(t)$ , bod v rovině  $\mathbb{R}^2$ .

Spojitosť složek  $f$  a  $g$  pak přesně vyjadřuje požadavek, aby křivka byla „nakreslitelná jedním tahem“. Bez požadavku spojitosti by výsledné množina bodů v rovině vůbec nemusela připomínat to, co normálně nazýváme křivkou.

**Příklad:** Jako příklad křivky uvažme parametrizaci kružnice. Za interval volíme  $\langle a, b \rangle = \langle 0, 2\pi \rangle$  a klademe  $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Při této volbě kružnici obíháme proti směru hodinových ručiček.  $\triangle$

Jak vypočítat délku křivky? Umíme snadno počítat délku úseček spojující dva body (pomocí Euklidovské vzdálenosti dvou bodů v rovině). Proto se nabízí možnost aproximovat křivku pomocí lomené čáry (viz obrázek č. 7.17), jejíž délku snadno vypočteme. Postupný zjemňováním lomené čáry se pak limitně budeme blížit k délce původní křivky (pokud to půjde).

**Definice 145:** Pro křivku  $F$  v  $\mathbb{R}^2$  a dělení  $\sigma = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  položíme

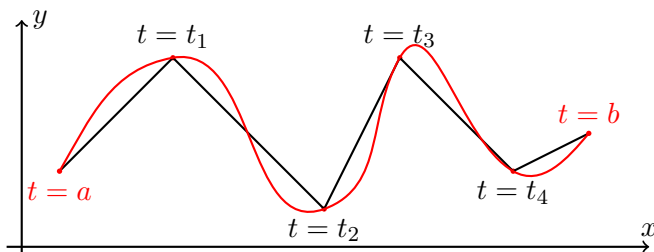
$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.$$

Toto číslo nazýváme **délkou lomené čáry** aproximující křivku  $F$  při dělení  $\sigma$ .

**Věta 146:** Je-li  $F$  křivka v  $\mathbb{R}^2$ ,  $F(t) = (f(t), g(t))$  a funkce  $f$  a  $g$  jsou spojitě diferencovatelné na  $\langle a, b \rangle$ , pak pro libovolnou normální posloupnost dělení  $\sigma$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  existuje konečná limita

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\sigma_n) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

Číslo  $L$  nazýváme **délkou křivky**  $F$ .



Obrázek 7.17: Aproximace křivky pomocí lomené čáry.

*Důkaz — náčrtek.* Všimněme si, že  $\ell(\sigma)$  lze upravit následovně:

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Použijeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku funkce (viz větu č. 91) postupně na funkce  $f$  a  $g$  na intervalech  $\langle t_i, t_{i-1} \rangle$ , pak

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(\alpha_i)^2 + g'(\beta_i)^2} \cdot \Delta_i,$$

kde  $\alpha_i, \beta_i \in \langle t_i, t_{i-1} \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Kdyby  $\alpha_i = \beta_i$ , pak by se jednalo o integrální součet funkce  $f(x) = \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2}$  při dělení  $\sigma$ . Pro normální posloupnost dělení bychom pak v limitě dostali integrál z dané funkce.

Složitějšími manipulacemi lze ukázat, že při různých  $\alpha_i$  a  $\beta_i$  se  $\ell(\sigma)$  málo liší od integrálního součtu.  $\square$

**Poznámka** (Délka grafu funkce): Graf funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definované na intervalu  $\langle a, b \rangle$  lze chápat jako křivku

$$F(x) = (x, f(x)), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Je-li  $f$  diferencovatelná, pak pro **délku grafu funkce**  $f$  platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$



**Příklad:** Vypočtete délku úseku paraboly  $y = x^2$  mezi body  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

Jedná se o délku grafu funkce  $f(x) = x^2$  definované na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Takže pomocí per partes odvodíme

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \left[ x\sqrt{1 + 4x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = \\ &= \sqrt{5} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx. \end{aligned}$$

Po vyjádření  $L$  a substituci dostáváme

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} dy = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}),$$

kde jsme dále použili již vypočtený neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C. \quad \triangle$$

**Příklad:** Vypočtete délku křivky

$$F(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t)), \quad t \in \langle 0, 4\pi \rangle.$$

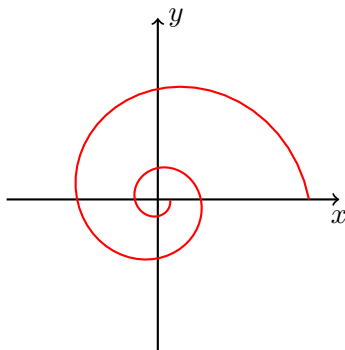
Podle vzorce platí

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{4\pi} \left[ (-e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t))^2 + (-e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t))^2 \right]^{1/2} dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2e^{-2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} e^{-t} dt = \sqrt{2} [-e^{-t}]_0^{4\pi} = \sqrt{2}(1 - e^{-4\pi}). \end{aligned} \quad \triangle$$

## 7.9 Celková změna a okamžitá změna

Uvažme funkci  $f$  diferencovatelnou na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Derivaci  $f'(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$ , interpretujeme jako **okamžitou změnu**  $f$  v čase  $t$ . **Celková změna**  $f$  mezi okamžiky  $t = a$  a  $t = b$  je dána

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$



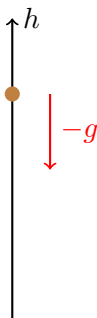
Obrázek 7.18: Spirála z předchozího příkladu.

**Příklad:** Označuje-li  $x(t)$  polohu bodu pohybujícího se po přímce v čase  $t \in \mathbb{R}$ , pak  $x'(t)$  představuje jeho okamžitou rychlost v čase  $t$  a změna polohy mezi časy 0 a 1 je

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 x'(t) dt.$$

Okamžitá změna rychlosti,  $x''(t)$ , se nazývá zrychlení. △

**Příklad:** Z mostu nad řekou upustíme kámen a za 5.6 sekundy uslyšíme jak dopadne do vody. Jaká je výška mostu?



Označme vertikální polohu kamene v čase  $t$  jako  $h(t)$ , hladině odpovídá  $h = 0$ . Při volném pádu je kámen urychlován pouze tíhovou silou, tedy

$$h''(t) = -g$$

Počáteční polohou je neznámá výška mostu  $h(0) = H > 0$  a počáteční rychlostí je

$h'(0) = 0$ . Rychlost v okamžiku  $t$  je tedy

$$h'(t) = h'(0) + \int_0^t h''(s)ds = 0 + [-gs]_0^t = -gt.$$

Poloha kamene v čase  $t$  je pak

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s)ds = H - g\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Mezi okamžikem dopadu a okamžikem kdy dopad uslyšíme uplyne čas  $\frac{H}{v_z}$ , kde  $v_z \approx 343.2m/s$  je rychlost zvuku. Dopadl-li kámen v čase  $T$ , pak  $h(T) = 0$ , tedy  $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ . Celkem

$$T + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad H + v_z \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{H} - 5.6 \cdot v_z = 0$$

a proto  $H = 133.2m$ . △

**Příklad:** Necht v nádobě je 1 litr vody v okamžiku  $t = 0$  a je poté napouštěna rychlostí  $3t^2 - 2t + 3$  litrů vody za minutu. Voda z nádoby vytéká trhlinou rychlostí 2 litry za minutu. Kolik je v nádobě vody po třech minutách?

Označme objem vody v nádobě v čase  $t$  symbolem  $V(t)$ . Podle zadání je  $V(0) = 1$  litr. Změna množství vody je

$$V'(t) = 3t^2 - 2t + 3 - 2 = 3t^2 - 2t + 1.$$

Takže množství vody v nádobě po třech minutách je

$$\begin{aligned} V(3) &= V(0) + \int_0^3 (3t^2 - 2t + 1)dt = 1 + \left[t^3 - t^2 + t\right]_0^3 = \\ &= 1 + 27 - 9 + 3 = 22 \text{ litrů.} \end{aligned} \quad \triangle$$

## 7.10 Gaussovský rozmazání, vyhlazování

**Definice 147:** Graf funkce

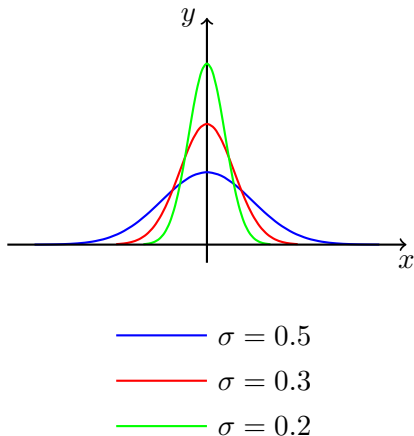
$$g_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad D_{g_\sigma} = \mathbb{R},$$

kde  $\sigma$  je kladný parametr, nazýváme **Gaussovou křivkou**.

**Poznámka:** Numerické faktory jsou zvoleny tak, aby

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma}(x) dx = 1.$$

Tj. plochy všech Gaussových křivek jsou stejné.



Obrázek 7.19: Gaussovy křivky.

**Definice 148:** Buď dána  $f$  reálná funkce reálné proměnné. Položme

$$(\mathcal{G}_{\sigma}f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g_{\sigma}(x-y) dy$$

pro všechna  $x$  pro která integrál konverguje.

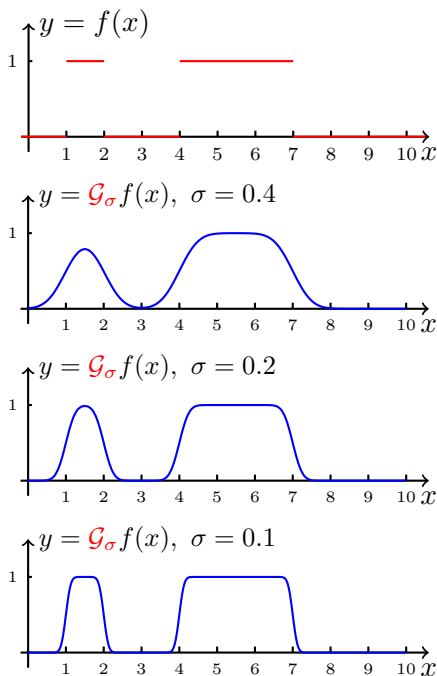
$\mathcal{G}_{\sigma}$  chápeme jako zobrazení přiřazující funkci  $f$  novou funkci  $\mathcal{G}_{\sigma}f$ .  $\mathcal{G}_{\sigma}$  budeme nazývat **Gaussovským filtrem**.

Předchozí definice a úvahy jsou poněkud vágní. Bylo by vhodné blíže specifikovat jaké funkce můžeme uvažovat (tj. definiční obor  $\mathcal{G}_{\sigma}$ ). Touto otázkou se však nebudeme zabývat. Poznamenejme pouze, že je-li  $f$  po částech spojitá a v nekonečnech neroste rychleji než polynomiálně, pak je  $(\mathcal{G}_{\sigma}f)(x)$  definováno pro každé  $x \in \mathbb{R}$  a  $\mathcal{G}_{\sigma}f$  je spojitá funkce na  $\mathbb{R}$ .

Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2) \cup (4, 7), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

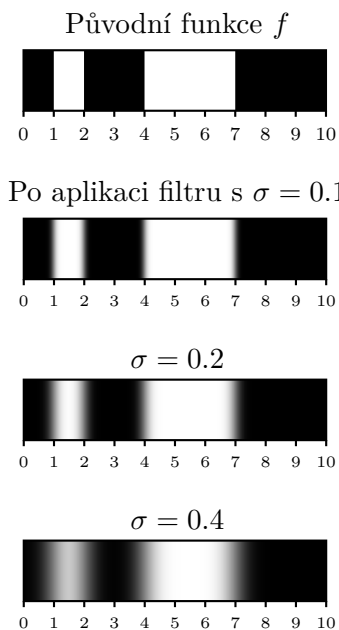
Na obrázku č. 7.20 vykreslíme původní funkci a výsledky  $\mathcal{G}_\sigma f$  pro  $\sigma \in \{0.4, 0.2, 0.1\}$ . Zřejmě je patrné, proč mluvíme o „rozmazávání“.



Obrázek 7.20: Výsledek aplikace filtru s různými hodnotami  $\sigma$ .

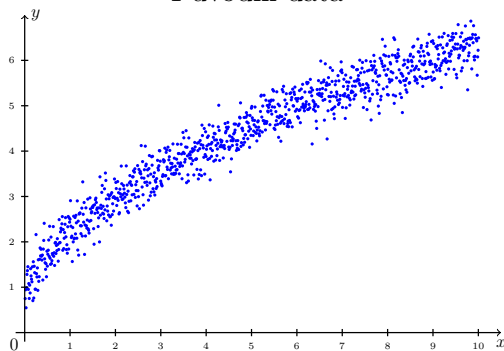
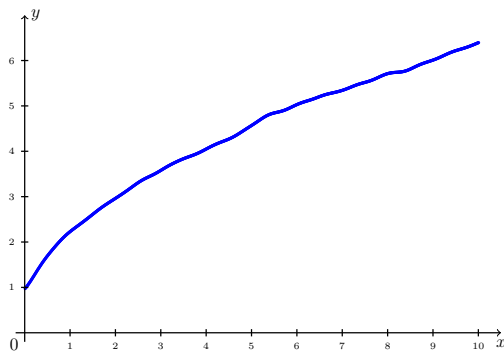
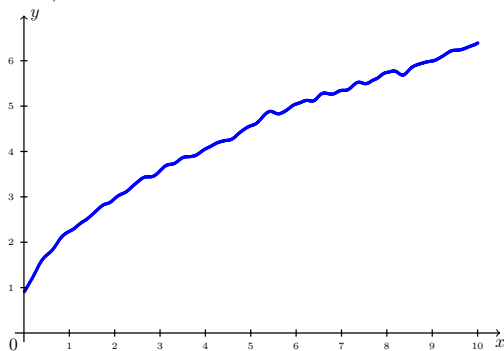
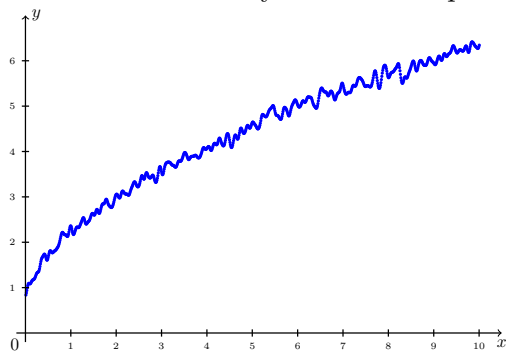
Interpretujme čísla z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  jako **odstíny šedi** (nebo jako jeden z kanálů RGB). Nechť 0 představuje černou a 1 bílou barvu. Potom naši funkci  $f$  lze na intervalu  $\langle 0, 10 \rangle$  znázornit pomocí černobílého pásku. Vizte obrázek č. 7.21.

Druhou možnou aplikací Gaussova filtru je vyhlazování různých dat zatížených šumem (např. pro uživatelskou oku lahodící prezentaci grafů). Poznamenejme, že k efektivní implementaci Gaussova filtru se využívá rychlé Fourierovy transformace (FFT).



Obrázek 7.21: *Gaussian blur* v jednom rozměru. Porovnejte s předchozím obrázkem č. 7.20.

Původní data

Vyhlazená data pro  $\sigma = 3$ ,  $\sigma = 10$  a  $\sigma = 20$ 

Obrázek 7.22: Vyhlažování dat.

# Kapitola č. 8

## Rychlost růstu posloupností

Sčítání členů posloupností; rychlost růstu posloupností; Landauova notace; odhady částečných součtů posloupností pomocí integrálů; integrální kritérium konvergence řad.

### 8.1 Sčítání členů posloupností

V této kapitole se vrátíme k posloupnostem, resp. částečným součtům posloupností, a budeme zkoumat jejich asymptotické chování (tj. chování pro „vysokou“ hodnotu indexu). Nejprve si ale připomeňme, jaké posloupnosti umíme explicitně sčítat a ukažme si jeden nový způsob sčítání pomocí diferenciálního počtu.

Nejznámější posloupnosti, jejichž členy umíme zatím sečíst jsou

1. **aritmetická posloupnost**  $(a_n)$ , tj.  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 + d \sum_{k=1}^n (k - 1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

2. **geometrická posloupnost**  $(a_n)$ , tj.  $a_n = a_1 q^{n-1}$ ,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Připomeňme, že číslo  $d$  se nazývá **diference** a  $q$  **kvocient**.

Dále umíme sčítat některé částečné součty pocházející z Taylorových rozvojų. Z tabulky č. 5.1 například ihned plyne, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$$

nebo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^k}{(2k + 1)!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \sqrt{\pi}.$$



Pokud se tedy podaří danou číselnou řadu vyjádřit pomocí číselné řady pocházející z jistého Taylorova rozvoje známé funkce a příslušný argument patří do jejího poloměru konvergence, pak se nám může podařit tuto řadu explicitně sečíst.

Ukažme si nyní několik příkladů jak lze diferenciálního počtu využít ke sčítání některých dalších sum.

**Příklad:** Sečtěte

$$\sum_{k=1}^n k 2^k.$$

Jedná se o částečný součet řady, která není ani aritmetická ani geometrická. Nelze ji ani jednoduše převést do tvaru některé z řad v tabulce č. 5.1. Označme

$$f(x) := \sum_{k=1}^n x^k = x \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad (8.1)$$

Výraz za prvním „=“ představuje polynom stupně  $n$ . Pro derivaci funkce  $f$  platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \left( \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} \right)' = \\ &= \frac{((n+1)x^n - 1)(x - 1) - (x^{n+1} - x)}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Tento vztah platí pro  $x \neq 1$ . Dosazením ze  $x = 2 \neq 1$  dostáváme

$$\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 = (n-1)2^n + 1.$$

Takže pro hledaný součet ze zadání platí (poslední rovnost stačí vynásobit číslem 2)

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2. \quad \triangle$$

**Poznámka:** Při výpočtu jsme odvodili rovnost

$$\sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

platnou pro každé  $x \neq 1$ . Avšak limita pro  $x \rightarrow 1$  obou výrazů existuje a proto pomocí l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)}{2(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Odvodili jsme tedy součet aritmetické posloupnosti pomocí znalosti součtu geometrické posloupnosti.

Uvedme ještě jeden příklad.

**Příklad:** Sečtěte  $\sum_{k=1}^n k^2 2^k$ .

Všimněte si, že když definiční vztah v předchozím příkladě (rovnice (8.1)),

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

zderivujeme ne jednou, ale dvakrát, dostaneme

$$f''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2} = \frac{(n+1)nx^{n-1}(x-1)^2 - 2nx^{n+1} + 2(n+1)x^n - 2}{(x-1)^3}.$$

Pozor na změnu „spodní meze“,  $k = 2$ ! Dosazením  $x = 2 \neq 1$  do vztahu pro druhou derivaci  $f$  nahlédneme, že

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)2^{k-2} = 2^{n-1}(n^2 - 3n + 4) - 2.$$

Čili

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 2^k &= \sum_{k=1}^n k(k-1)2^k + \sum_{k=1}^n k 2^k = 4 \sum_{k=2}^n k(k-1)2^{k-2} + \sum_{k=1}^n k 2^k = \\ &= 2^{n+1}(n^2 - 3n + 4) - 8 + (n-1)2^{n+1} + 2 = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6. \triangle \end{aligned}$$

**Poznámka:** Podobně jako u předchozího příkladu lze limitním přechodem  $x \rightarrow 1$  odvodit

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) \text{ a pak } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

**Poznámka** (Derivování a integrování mocninných řad): Postup uvedený v předchozím příkladu je obecný a není vázaný pouze na tento konkrétní příklad. Obecně platí, že mocninou řadu<sup>1</sup>

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

s nenulovým poloměrem konvergence  $R > 0$  lze derivovat a integrovat „člen po členu“. Přesněji, pro derivaci  $f'$  a primitivní funkci  $F$  funkce  $f$  platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad F(x) = c + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

pro všechna  $|x| < R$ . Důkaz tohoto užitečného tvrzení v této přednášce podán nebude.

Jak vidíme, sčítání členů posloupnosti je obecně komplikovaná úloha. Často však není potřeba součet najít explicitně, ale zajímá nás pouze jak se daný součet chová pro velká  $n$ . K vyjádření této rychlosti se používá notace, kterou se budeme zabývat v následující podkapitole.

## 8.2 Úvod do Landauovy symboliky

K vyjádření rychlosti růstu posloupnosti, či porovnání rychlosti růstu dvou posloupností se často zapisuje pomocí Landauovy<sup>2</sup> symboliky (též známé pod označením  $\mathcal{O}$ -notace).

**Definice 149:** Necht  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$ , když existuje posloupnost  $(\alpha_n)$  taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ , když existuje konstanta  $c > 0$  a  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že

$$|a_n| \leq c |b_n| \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Jestliže  $a_n \sim b_n$ , pak se pro velká  $n$  obě posloupnosti „chovají stejně“, jsou tzv. asymptoticky ekvivalentní. Podmínka  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  naopak říká, že  $(a_n)$  neroste rychleji než  $(b_n)$  pro velká  $n$ .

<sup>1</sup>Podobné tvrzení přirozeně platí i pro mocninné řady s jiným středem než v bodě 0.

<sup>2</sup>Edmund Landau, německý matematik, 1877 – 1938.

Pokud  $b_n > 0$  pak lze definici přeformulovat následovně

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \Leftrightarrow \text{posloupnost } \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \text{ je omezená.}$$

**Příklad:** Například platí

$$\begin{aligned} n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\ 2n &= \mathcal{O}(n^2), \\ n &= \mathcal{O}(n^2), \\ 4n^2 &= \mathcal{O}(n^2). \end{aligned} \quad \triangle$$

Zápis  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$  není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu  $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$ . Historicky se však ujal a používá se. Například pokud  $a_n = \mathcal{O}(n)$  a současně  $b_n = \mathcal{O}(n)$ , neplyne odtud, že  $a_n = b_n$ .

Zavádí se ještě další symboly, např. pokud máme  $(a_n)$  a  $(b_n)$ ,  $b_n > 0$  pak (podrobněji se touto notací budete zabývat v předmětu BI-ZDM)

$$a_n = o(b_n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

**Příklad:** Pro posloupnosti z této kapitoly můžeme výsledky příkladů zapsat ve tvaru (zajímá-li nás pouze rychlost růstu, chování pro velké  $n$ ).

$$\sum_{k=1}^n k^2 \sim \frac{1}{3}n^3, \quad \sum_{k=1}^n k^2 2^k \sim 2^{n+1}n^2. \quad \triangle$$

## 8.3 Odhadování rychlosti růstu různých součtů

**Věta 150:** Nechť  $f$  je spojitá funkce na  $\langle 1, +\infty \rangle$  a  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Je-li  $f$  klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) \, dx.$$

2. Je-li  $f$  rostoucí, pak

$$f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x) dx.$$

*Důkaz pro  $f$  klesající.* Buď  $k \in \mathbb{N}$ , pak pro každé  $x \in \langle k, k+1 \rangle$  platí  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ .

Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

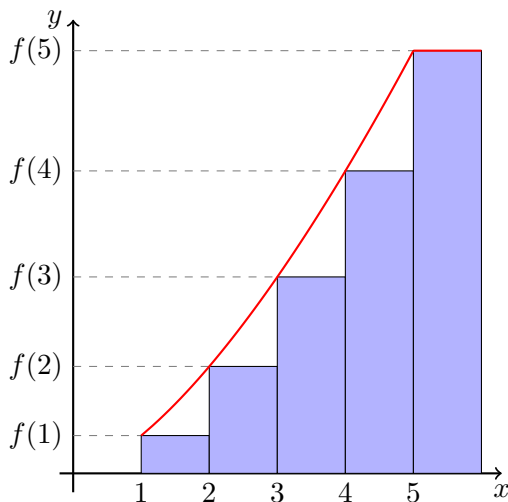
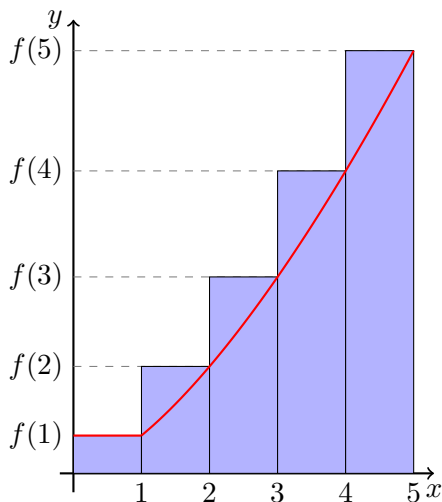
$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k).$$

Sečtením nerovností pro  $k = 1, 2, \dots, n-1$  dostaneme

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odtud

$$f(n) + \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx. \quad \square$$



**Příklad:** Pomocí odhadu (tj. aniž bychom součet počítali jako dříve) zjistěte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní  $f(x) = x^2$  je rostoucí na  $\langle 1, +\infty \rangle$  a proto pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$1 + \int_1^n x^2 dx \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^2 + \int_1^n x^2 dx.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká  $n$  je největším členem  $\frac{1}{3}n^3$ , přesněji, z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1. \quad \triangle$$

**Příklad:** Určete rychlost růstu posloupnosti  $(n!)_{n=1}^\infty$ .

Využijme šikovní úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

Funkce  $f(x) = \ln x$  je rostoucí na  $\langle 1, +\infty \rangle$  a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x) dx.$$

Primitivní funkcí  $F$  k funkci  $f$  je funkce  $F(x) = x \ln(x) - x + C$ , tudíž

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \ln(n) + n \ln(n) - n + 1.$$

Odlogaritmováním (monotonie  $e^x$ ) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n \ln(n) - n + 1} \leq n! \leq e^{\ln(n) + n \ln(n) - n + 1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \triangle$$

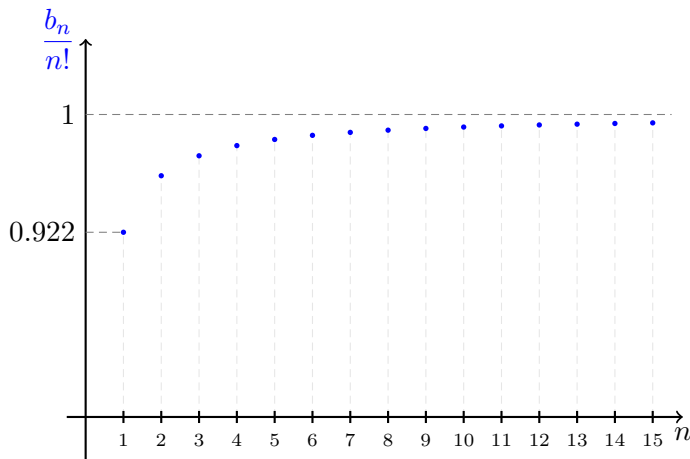
**Poznámka:** Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že na rozdíl od předchozího příkladu nám nyní nedává posloupnost  $(b_n)$  takovou, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti  $(b_n)$  vyžaduje další práci. Pro úplnost uveďme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Poměr tohoto  $b_n$  ku  $n!$  je vyneseno na obrázku 8.1.



Obrázek 8.1: K Stirlingově formuli.

**Příklad:** Již víme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  blíží k nekonečnu s rostoucím  $n$ .

Podle předchozí věty, pro  $f(x) = \frac{1}{x}$  klesající na  $\langle 1, +\infty \rangle$  dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n), \quad \text{nebo} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \mathcal{O}(n).$$

Opět tedy máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$  lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu. Tato limita se označuje  $\gamma$  a nazývá se **Eulerova-Mascheroniová konstanta**. Její přibližná hodnota je  $\gamma = 0.577218\dots$   $\triangle$

**Věta 151** (Integrální kritérium): Buď  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  číselná řada s kladnými členy taková, že existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na  $(0, +\infty)$  taková, že  $f(n) = a_n$  pro každé  $n$ . Potom

- Pokud integrál  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konverguje, pak číselná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.
- Pokud integrál  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  diverguje, pak číselná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

**Příklad:** Řada  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$  konverguje pro  $\alpha < -1$  a diverguje pro  $\alpha \geq -1$ .

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha} dx = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1, \quad \text{a} \quad \int_1^n x^{-1} dx = \ln n$$

platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x^{\alpha} dx &= \frac{1}{-1-\alpha}, \quad \alpha < -1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x^{\alpha} dx &= +\infty, \quad \alpha \geq -1. \end{aligned}$$

$\triangle$



# Kapitola č. 9

## Složitost algoritmů

Složitost algoritmů; bublinkové třídění; Quick sort

### 9.1 Uspořádání

**Definice 152:** Relaci  $\mathcal{R}$  na množině  $M$  splňující

1. (reflexivita): pro každé  $x \in M$  platí  $x\mathcal{R}x$ ,
2. (antisymetrie): pro každé  $x, y \in M$  platí, že pokud  $x\mathcal{R}y$  a  $y\mathcal{R}x$  pak i  $x = y$ ,
3. (tranzitivita): pokud pro  $x, y, z \in M$  platí  $x\mathcal{R}y$  a  $y\mathcal{R}z$ , pak platí  $x\mathcal{R}z$ ,

nazýváme **uspořádáním** na množině  $\mathcal{R}$ .

Relaci  $\mathcal{R}$ , jež je uspořádáním, většinou značíme symbolem  $\leq$ .

**Příklad:** Je-li  $M$  množina reálných čísel a  $x\mathcal{R}y$  znamená „ $x$  je menší nebo rovno  $y$ “, pak  $\mathcal{R}$  představuje uspořádání na množině  $\mathbb{R}$ .  $\triangle$

Toto uspořádání je tzv. **úplné**. Pro každé  $x, y \in M$  platí  $x\mathcal{R}y$  nebo  $y\mathcal{R}x$ .

**Příklad:** Uvažme množinu kladných přirozených čísel  $M = \{1, 2, 3, \dots\}$  a necht  $m\mathcal{R}n$  právě když  $m$  dělí  $n$ . Tato relace  $\mathcal{R}$  na  $M$  je uspořádáním.

Ověřme potřebné vlastnosti

1. (reflexivita): Pro každé  $n \in M$  platí, že  $n$  dělí  $n$ , tedy  $n\mathcal{R}n$ .
2. (antisymetrie): Uvažme  $n, m \in M$  tak, že  $n$  dělí  $m$  a  $m$  dělí  $n$ , pak existují  $k, \ell \in M$  splňující

$$m = k \cdot n \quad \text{a} \quad n = \ell \cdot m.$$

Tudíž  $m = (k\ell) \cdot m$ , což může nastat pouze v případě  $k = \ell = 1$ . Proto  $m = n$ .

3. (tranzitivita): Podobně, pokud  $n$  dělí  $m$  a  $m$  dělí  $k$ , pak  $n$  dělí  $k$ .  $\triangle$

## 9.2 Složitost jednoduchých třídících algoritmů

- **Vstup:** množina  $\{x_1, \dots, x_n\}$  a úplné uspořádání  $\leq$  mezi jejími prvky. Velikostí vstupu rozumíme jednoduše počet prvků vstupu.
- **Výstup:** uspořádaná  $n$ -tice  $(x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$ , kde  $(k_1, \dots, k_n)$  je permutace množiny  $\{1, \dots, n\}$  a  $x_{k_1} \leq \dots \leq x_{k_n}$ .
- **Elementární operace:** porovnání dvou prvků.

### Bublinkový algoritmus (*Bubble sort*)

Pro připomenutí uvádíme kompletní algoritmus, zřejmě čtenáři známý z předmětu BI-PA1.

```

procedure bubbleSort(A : array of length n)
  for k in n-1 to 1 do
    sorted = true
    for i in 1 to k do
      if A[i] > A[i+1] then
        swap( A[i], A[i+1] )
        sorted = false
      end if
    end for
    if sorted then return A
  end for
  return A
end procedure

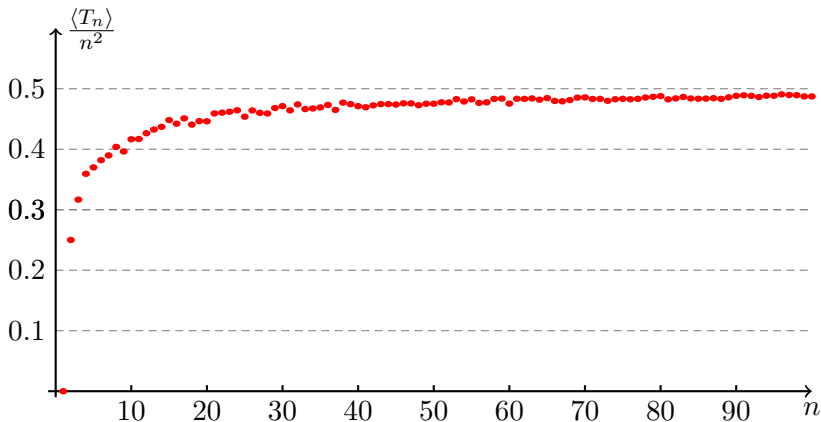
```

Celkový počet porovnání může být nejhůře (pokud je na vstupu seznam v přesně opačném pořadí)

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pokud je na vstupu již setříděný seznam, pak algoritmus provede  $(n-1)$  porovnání (nejlepší varianta). Označíme-li počet porovnání při konkrétním vstupu o velikosti  $n$  jako  $T_n$ , můžeme tedy shrnout, že pro složitost Bubble sort platí

$$T_n = \mathcal{O}(n^2).$$



Obrázek 9.1: Pro každé  $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$  jsme 20-krát setřídili náhodně permutovanou množinu  $\{1, 2, \dots, n\}$  a vypočetli tak střední hodnotu  $\langle T_n \rangle$ . Na grafu je pak vynesena poměr  $\frac{\langle T_n \rangle}{n^2}$ .

### Quick sort

Nechť je opět dán vstup  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

- Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný **pivot**).
- Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
- Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
- Spoj uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoj uspořádaný druhý seznam.

Algoritmus probíhá rekurentně. Uspořádání dvouprvkového seznamu je jednoduché. Označme nyní  $T_n$  **průměrný počet porovnání** pro uspořádání seznamu délky  $n$  pomocí algoritmu *Quick sort*.

Pokud je pivot  $r$ -tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak

$$T_n = n - 1 + T_{r-1} + T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0 = T_1 = 0.$$

Sečtením těchto vztahů pro  $r = 1, 2, \dots, n$ :

$$\sum_{r=1}^n T_n = \sum_{r=1}^n (n-1) + \sum_{r=1}^n (T_{r-1} + T_{n-r}) \implies nT_n = n(n-1) + 2 \sum_{r=1}^{n-1} T_r.$$

Poslední rovnost vyjádříme pro  $k$  a pro  $k-1$  a oba vztahy odečteme (zbavíme se tím součtu vpravo):

$$kT_k = k(k-1) + 2 \sum_{r=1}^{k-1} T_r,$$

$$(k-1)T_{k-1} = (k-1)(k-2) + 2 \sum_{r=1}^{k-2} T_r,$$

$$\text{odečtením: } kT_k - (k-1)T_{k-1} = k(k-1) - (k-1)(k-2) + 2T_{k-1}.$$

Odvodili jsme tedy vztah

$$kT_k - (k+1)T_{k-1} = 2k - 2.$$

Vydělením číslem  $k(k+1)$  dostáváme

$$\frac{T_k}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k} = \frac{2k-2}{k(k+1)}.$$

Konečně, sečtením těchto rovností pro  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n+1} &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \\ &\leq 2 \left( 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \right) = 2(1 + \ln(n)). \end{aligned}$$

Uzavíráme

$$T_n = \mathcal{O}(n \ln(n)).$$

# Rejstřík

## čísla

- celá, 10
- harmonická, 38
- iracionální, 11
- komplexní, 21
- přirozená, 10
- racionální, 10
- reálná, 8

## číslo

- Eulerovo, 25, 57, 58
- kombinační, 18
- komplexně sdružené, 21

## část

- imaginární, 21
- reálná, 21

## řada

- číselná, 52
- absolutní konvergence, 54
- Bolzano-Cauchy, 54
- d'Alembertovo kritérium, 56
- nutná podmínka konvergence, 53
- srovnávací kritérium, 55

## asymptota, 118

## axiom

- úplnosti, 12, 36

## bod

- hromadný, 36
- inflexní, 117

## důkaz

- konstruktivní, 87

## sporem, 11

## dělení

- ekvidistantní, 178
- intervalu, 178
- norma, 178

## derivace, 95

- inverzní funkce, 103
- jednostranná, 107
- složené funkce, 101
- součtu, součinu a podílu, 100
- vyšších řádů, 108
- základní vzorečky, 105

## diference, 208

## dodefinovanání

- spojité, 84

## doplnění

- na čtverec, 173

## dvojice

- uspořádaná, 1

## exponenciála, 66

## extrém

- nutná podmínka existence, 110
- spojité funkce na uzavřeném intervalu, 110

## faktoriál, 18

## filtr

- Gaussovský, 204

## formule

- Newtonova, 185

## funkce

derivace, 95  
diferencovatelná, 95  
exponenciální, 23, 64  
extrémy, 109  
goniometrické, 26  
graf, 12  
konkávní, 116  
konvexní, 116  
lichá, 16  
limita, 68  
logaritmická, 24  
maximum, 109  
minimum, 109  
monotonie, 115  
monotonní, 13  
omezená, 15  
omezená shora, 15  
omezená zdola, 15  
periodická, 16  
průběh, 119  
primitivní, 159  
racionální, 169  
spojitá na intervalu, 85  
spojitá v bodě, 83  
spojitá v bodě zleva, 83  
spojitá v bodě zprava, 83  
sudá, 16  
tečna, 147

hodnota

absolutní, 10, 17, 21

implikace, 9

index

sčítací, 20

indukce

matematická, 17

integrál

aditivita, 184

aditivita v mezích, 185

dolní, 179

horní, 179

multiplikativita, 185

neurčitý, 160

Riemannův, 179

zobecněný Riemannův, 189

integrace

per partes, 163, 187

racionálních funkcí, 168

substituce, 164, 166, 188

základní pravidla, 162

interpolace

kubická, 128

lineární, 128

interval, 9

jednotka

imaginární, 21

křivka

Gaussova, 203

kořen

polynomu, 21

konvergence

kvadratická, 134

kritérium

podílové, 40

kvocient, 18, 208

limita

funkce, 68

jednostranná, 69

logaritmus, 66

přirozený, 25

metoda

nejmenších čtverců, 127

- Newtonova, 131
- množina
  - infimum, 176
  - maximum, 176
  - minimum, 176
  - potenční, 2
  - supremum, 176
- mocnina, 21
  - obecná, 64
- nerovnost
  - trojúhelníková, 17
- obor
  - definiční, 4
  - hodnot, 4
- obraz
  - množiny, 5
  - při zobrazení, 4
- odmocnina, 22
- okolí, 9
  - jednostranné, 9
  - levé, 9
  - oboustranné, 9
  - pravé, 9
- osa
  - reálná rozšířená, 10
- poloměre
  - konvergence, 155
- polynom, 21, 145
  - koefficient, 21
  - stupeň, 21, 146
  - Taylorův, 148
- posloupnost, 29
  - aritmetická, 17, 208
  - divergentní, 34
  - Fibonacciho, 50
  - geometrická, 18, 208
  - klesající, 30
  - konvergentní, 34
  - monotonní, 30
  - neklesající, 30
  - nerostoucí, 30
  - rekurentně zadaná, 50
  - rostoucí, 30
  - vybraná, 35
- pravidlo
  - l'Hospitalovo, 120
  - Simpsonovo, 183
- rovnice
  - diferenciální, 136
- rozklad
  - na kořenové činitele, 170
- rozvoj
  - desetinný, 57
- separace kořenů, 130
- součet
  - dolní při dělení, 179
  - horní při dělení, 179
- součin
  - kartézský, 1
- splines, 128
- spojitost
  - inverzní funkce, 102
- tečna, 99
- transformace
  - Fourierova, 205
- uspořádání, 8, 217
- věta
  - Bolzano-Cauchy, 38
  - Bolzano-Weierstrass, 37
  - Heine, 73

- Heine, pro jednostranné limity, 73
- Lagrangeova, 114
- metoda půlení intervalu, 86
- o jednoznačnosti limity, 33
- o limitě monotonní posloupnosti, 38
- o limitě podílu, 41
- o limitě sevřené funkce, 81
- o limitě sevřené posloupnosti, 46
- o limitě složené funkce, 78
- o limitě součinu, 41
- o limitě součtu, 41
- o limitě vybrané posloupnosti, 35
- o přírůstku funkce, 114
- Rolleova, 113
- vzdálenost, 10
- vzor, 4
  - množiny, 5
- vzorce
  - součtové, 26
- vzorec
  - Taylorův, 149
- zákon
  - asociativní, 8
  - distributivní, 8
  - komutativní, 8
- zápis
  - sumační, 19
- zbytek
  - Peanův tvar, 150
- zlomky
  - parciální, 171
- zobrazení, 4
  - bijektivní, 6
  - hodnota v bodě, 4
  - identické, 7
  - injektivní, 6
  - inverzní, 7
  - na, 6
  - prosté, 6
  - složené, 5
  - surjektivní, 6
  - vzájemně jednoznačné, 6
  - zúžení, 4