

Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda

Matěj Tušek

Katedra aplikované matematiky

Katedra matematiky

FIT ČVUT

FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

| | |
|---|------------|
| Předmluva | iii |
| 1 Rozjezd | 1 |
| Sumační zápis, manipulace se sumami, důkaz matematickou indukcí, aritmetická a geometrická posloupnost, Pascalův trojúhelník, kombinační čísla. | |
| 2 Funkce a jejich vlastnosti | 7 |
| Funkce, definiční obor, obor hodnot, vzor a obraz množiny, prostá funkce, složená funkce, inverzní funkce, elementární funkce. | |
| 3 Posloupnosti | 11 |
| Posloupnosti, limita posloupnosti (definice a výpočet), vybraná posloupnost. | |
| 4 Posloupnosti, pokračování | 17 |
| Věta o sevřené posloupnosti, Eulerovo číslo, podílové kritérium. | |
| 5 Číselné řady | 22 |
| Opakování příkladů na limity, číselné řady. | |
| 6 Limita funkce | 26 |
| Limita funkce; jednostranná limita; existence limity; výpočet limit. | |
| 7 Spojitost a derivace funkce | 31 |
| Spojitost funkce; různé případy nespojitosti; derivace; výpočet derivace. | |
| 8 Extrémy reálných funkcí | 38 |
| Extrémy reálných funkcí; vyšetřování průběhu reálných funkcí. | |
| 9 L'Hospitalovo pravidlo, Taylorova věta, opakování | 44 |
| L'Hospitalovo pravidlo; Taylorova věta a její využití k přibližným výpočtům. | |
| 10 Neurčitý integrál | 49 |
| Primitivní funkce, substitute, per partes. | |

11 Určitý integrál

56

Riemannův určitý integrál; výpočet obsahů ploch ohraničených křivkami; objem a obsah rotačního tělesa; délka křivky.

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora¹. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho [EDUXové stránce](#).

¹tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 4

Posloupnosti, pokračování

Věta o sevřené posloupnosti, Eulerovo číslo, podílové kritérium.

Značení

e Eulerovo číslo

Připomeňme větu o limitě sevřené posloupnosti: necht' pro posloupnosti (a_n) , (b_n) a (c_n) platí

i) existují limity $\lim a_n = \lim c_n =: \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,

ii) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že nerovnost $a_n \leq b_n \leq c_n$ platí pro každé $n \geq n_0$,

potom existuje limita posloupnosti (b_n) a její hodnota je α . Dále také připomeňme limity probrané na přednášce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Příklad 4.1: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4n^3 + 5}.$$

Řešení. Pro všechna kladná $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{4n^3 + 5} \leq \sqrt[n]{9n^3} = \sqrt[n]{9} \sqrt[n]{n^3}.$$

Posloupnosti dolních i horních odhadů mají stejnou limitu, jmenovitě jedničku. Tudíž limita sevřené posloupnosti existuje a rovná se rovněž jedné.

Příklad 4.2: Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)! + (n+2)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

1.

Příklad 4.3: Spočtěte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}.$$

Zde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x , tedy celé číslo $\lfloor x \rfloor$ splňující $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Na přednášce bylo Eulerovo číslo definováno jako součet číselné řady

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Dále jsme odvodili rovnost

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Důrazně na tomto místě upozorňujeme na častou nesprávnou úpravu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 0)^n = 1.$$

Toto „částečné limitění“ samozřejmě nelze ospravedlnit a představuje tak pouze častý omyl.

Příklad 4.4: Vypočtete limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}.$$

Řešení. Stačí upravit na známou limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e^3.$$

Příklad 4.5: Vypočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Nyní

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right)^{1/2} = \sqrt{e},$$

protože $\left(1 + 1/(2n)\right)^{2n}$ je vybraná z $\left(1 + 1/n\right)^n$ a $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ pokud (a_n) je posloupnost s nezápornými členy splňující $\lim a_n = a \geq 0$, což také víme z přednášky.

Příklad 4.6: Vypočtete limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n.$$

Řešení.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} \right)^3 = e^3.$$

Z posloupnosti $\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}$ totiž lze vybrat podposloupnost konvergentní k e a zároveň je tato posloupnost monotónní¹ a tedy má limitu.

Příklad 4.7: Vypočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n.$$

¹Což lze ukázat stejně jako na přednášce.

Řešení. Tento případ můžeme převést na limitu typově shodnou s předchozím příkladem,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4}{n-4+4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{n-4}\right)^{n-4} \cdot \left(1 + \frac{4}{n-4}\right)^4} = \frac{1}{e^4} = e^{-4}$$

Poznamenejme, že z těchto příkladů by mělo být patrné, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}}$$

pro $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$.

Příklad 4.8: Vypočtěte následující limity

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 2n}\right)^{2n},$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^n \cdot \left(\frac{3+n}{n^2}\right)^n,$

a) e^2 , b) e^3 .

Příklad 4.9: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + 4n + 2)}{\ln(3n^4 + 5)}.$$

Řešení. V průběhu řešení užijeme znalosti na přednášce uvedeného tvrzení, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ implikuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + 4n + 2)}{\ln(3n^4 + 5)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(n^2 \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right)\right)}{\ln\left(n^4 \left(3 + \frac{5}{n^4}\right)\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln n + \ln\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{4 \ln n + \ln\left(3 + \frac{5}{n^4}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln n} \ln\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{4 + \frac{1}{\ln n} \ln\left(3 + \frac{5}{n^4}\right)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Připomeňte si důležitou limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ v závislosti na hodnotě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.10: Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n + 5)}{\ln(4^n - 2)}.$$

$\frac{\ln 3}{\ln 4}$.

Příklad 4.11: Dokažte *podílové kritérium*: Buď (a_n) posloupnost kladných členů. Pokud existuje kladné $q \in \mathbb{R}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovno než n_0 je

(a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Řešení. Případ (a). Pro $n \geq n_0$ zřejmě máme $0 < a_n < a_{n_0} q^{n-n_0}$. Tvrzení pak plyne z věty o sevřené posloupnosti a předpokladu $0 < q < 1$.

Případ (b). Pro $n \geq n_0$ zřejmě máme $a_n > a_{n_0} q^{n-n_0}$. Tvrzení pak plyne přímo z definice limity a předpokladu $q > 1$.

Poznamenejme, že k ověření podmínky stačí zkoumat hodnotu limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Tato však nemusí vždy existovat.

Příklad 4.12: Vypočtete limity

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^5}$,

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^3}$.

a) 0, b) $+\infty$, c) $+\infty$.

Následují další příklady vhodné k samostatnému procvičení, ale je možné se jim věnovat i na cvičení podle časových možností.

Domácí cvičení 4.13: Vypočtete limity

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n+2}$,

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+3)!}$,

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$

a) 1, b) 1, c) 0, d) 0

Domácí cvičení 4.14: Vypočtete limity

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 + \sin(n)}$,

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n} + 3^{-n}}{4^{-n} + 9^{-n}}$,

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \arctg((-1)^n n)$,

a) 0, b) $+\infty$, pečlivě zdůvodněte! c) $+\infty$, d) neexistuje

Domácí cvičení 4.15: a) Existuje konvergentní aritmetická posloupnost?

b) Které geometrické posloupnosti jsou konvergentní?

Výsledek tohoto příkladu naleznete níže. Pokuste se nejprve sami na otázky odpovědět, teprve poté svou odpověď konzultujte s řešením.

Domácí cvičení 4.16: Vypočtěte

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^n,$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n},$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n^2 + 3n^3 - 1)}{\ln n}.$

a) e^{-1} , b) 0, c) 3.

Domácí cvičení 4.17: Vypočtěte limity

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 3n + 2} \right)^n,$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n-1}{n+1} \right),$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+n} \right)^n.$

a) e , b) -2 , c) 0.

Výsledek Domácího cvičení 4.15: a) Ano, s diferencí $d = 0$, tedy ty které jsou konstantní. b) geometrická posloupnost konverguje právě tehdy když její kvocient splňuje $q \in (-1, 1)$.